ISSN 0321 - 4117

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Σ

ВЫПУСК 43 · 1981

Министерство высшего и среднего специального образования УССР
Киевский ордена Ленина государственный универ им. Т. Г. Шевченко

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖДУВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ СБОРНИК

Основан в 1965 г.

Выпуск 43

КИЕВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ КИЕВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ «ВИЩА ШКОЛА»
1981

УДК 518:517.944/947

В сборнике помещены статьи, посвященные приближенным методам решения краевых задач математической физики. Приведены некоторые результаты, полученные при решении задач, возникающих в приложениях теории вероятностей и математической статистики. Рассматриваются прикладные вопросы теории управления и автоматического регулирования.

Для математиков, механиков, кибернетиков, научных работников и инженеров, занимающихся решением задач физики, техники и их теоретическими исследованиями.

Адрес редакционной коллегии: 252601, ГСП, Киев-17, Владимирская, 64, университет, кафедра вычислительной математики, тел. 66-40-43.

Редакция естественной литературы

Зав. редакцией *Б. Н. Фляшников*

Вычислительная и прикладная математика

Выпуск 43

Редактор *Г. Д. Шиманская*
Художественный редактор *Т. С. Преснякова*
Технический редактор *Е. Г. Рублев*
Корректоры *Т. А. Лукашина, О. Г. Малышевская*

Информ. бланк № 5693

Сдано в набор 15.10.80. Подп. в печать 23.03.81. БФ 11064.
Формат 60×90/16. Бумага типогр. № 3. Лит. гарн. Выс. печать.
10 усл. печ. л. 10,13 усл. кр.-отт. 9,78 уч.-изд. л. Тираж 1000 экз.
Изд. № 1419-к. Зак. № 0-752. Цена 1 р. 50 к.

Издательство при Киевском государственном университете издательского объединения «Вища школа», 252001, Киев-1, ул. Крещатик, 4

Киевская книжная типография научной книги республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР, 252004, Киев-4, Репина, 4.

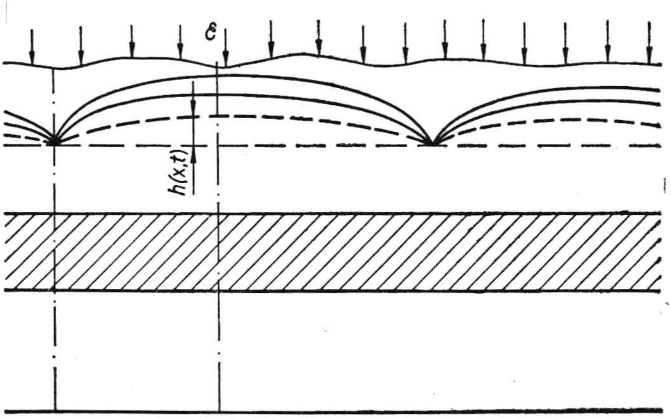
$$\text{В}\ \frac{20204\text{-}064}{\text{М}224(04)\text{-}81}\ 445\text{-}81.\ 1702070000$$

УДК 517:93.518:61

А. А. СКОРОБОГАТЬКО, канд. физ.-мат. наук, Б. П. БЕЗДЕТНЫЙ, канд. физ.-мат. наук, Киевский университет

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ К НЕСОВЕРШЕННЫМ ДРЕНАМ ПРИ НАЛИЧИИ ИНФИЛЬТРАЦИИ

Рассмотрим нестационарную задачу об изменении уровня грунтовых вод в трехслойной среде при наличии инфильтрации, изменяющейся во времени (см. рисунок). Верхний слой состоит из сильнопроницаемых пород с коэффициентом фильтрации k_1 и коэффициентом водоотдачи μ_1. Мощность верхнего слоя m_1. Средний слой состоит из слабопроницаемого грунта с коэффициентом фильтрации k_0 и имеет мощность m_0. Нижний слой, как и верхний, сильнопроницаемый с коэффициентом фильтрации k_2, коэффициентом водоотдачи μ_2 и мощностью пласта m_2. Дрены предполагаются несовершенными.



Допустим, что коэффициент фильтрации k_0 значительно меньше коэффициентов k_1 и k_2. Тогда движение грунтовых вод в таком пласте будет следовать известным предпосылкам Мятиева—Гиринского [1, 2], согласно которым вода в водоносных горизонтах движется в горизонтальном направлении с осреднением напора по глубине, а в прослойке фильтрация происходит вертикально и равномерно.

Движение грунтовых вод в таком трехслойном пласте удовлетворяет следующей системе нелинейных дифференциальных уравнений [1]:

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 h_1^2}{\partial x^2} - \beta_1 (h_1 - h_2) + \frac{\varepsilon(t)}{\mu} = \frac{\partial h_1}{\partial t},$$
$$\alpha_2 \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} + \beta_2 (h_1 - h_2) = \frac{\partial h_2}{\partial t} \tag{1}$$

при краевых условиях

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{1}{\varphi_g} h_1 \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial h_2}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0,$$
$$\frac{\partial h_1}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0, \quad \frac{\partial h_2}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0, \tag{2}$$

где

$$\alpha_1 > 0, \quad \beta_1 > 0, \quad \beta_2 > 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad \varphi_g > 0, \quad \alpha_1 = \frac{k_1 m_1}{\mu_1},$$
$$\beta_1 = \frac{k_0}{\mu_1 m_0}, \quad \alpha_2 = \frac{k_2 m_2}{\mu_2}, \quad \beta_2 = \frac{k_0}{\mu_2 m_0} \tag{1'}$$

(l — половина расстояния между дренами).

Здесь $h_1(x, t)$, $h_2(x, t)$ — искомые функции ($h_1(x, t)$ — напор в верхнем слое, $h_2(x, t)$ — напор в нижнем слое), $\varepsilon(t)$ — инфильтрация, φ_g — сопротивление на несовершенство дренажа.

Будем считать, что в начальный момент времени уровень грунтовых вод близок к уровню поверхности земли. Тогда для начального момента времени

$$h_1(x, 0) = H_0 - \sigma, \quad h_2(x, 0) = 0, \tag{3}$$

где H_0 — расстояние от дрены до поверхности земли.

Так как задача симметрична, то ищем решение в области $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t < T$. При этом предполагается, что закон изменения фильтрации $\varepsilon(t)$ задан [3].

Введем сетку

$$\Omega_{h\tau} = \{(x_i, t_j)\colon x_i = ih, \quad t_j = j\tau, \quad 0 < i < n,$$
$$0 < j \leqslant M, \quad h = ln^{-1}, \quad \tau = TM^{-1}\}. \tag{4}$$

На сетке (4) задаче (1)—(3) поставим в соответствие следующую регуляризованную разностную схему с весами [4]:

$$u_{1t} = \alpha_1 \Lambda (\sigma \hat{u}_1^2 + (1-\sigma) u_1^2) - \beta_1 (\hat{u}_1 - \hat{u}_2) + \frac{\hat{\varepsilon}}{\mu},$$
$$u_{2t} = \alpha_2 \Lambda (\sigma \hat{u}_2 + (1-\sigma) u_2) + \beta_2 (\hat{u}_1 - \hat{u}_2), \tag{5}$$

$$\hat{u}_{1x,0} - \frac{1}{\varphi_g} \hat{u}_{1,0} - \delta_1 \tau u_{1t,0} = 0, \tag{6}$$

$$\widehat{u}_{2x,0} - \delta_1^* \tau u_{2t,0} = 0, \tag{7}$$

$$\widehat{u}_{1\bar{x},n} + \delta_2 \tau u_{1t,n} = 0, \tag{8}$$

$$\widehat{u}_{2\bar{x},n} + \delta_2^* \tau u_{2t,n} = 0, \tag{9}$$

где δ_1, δ_2, δ_1^*, δ_2^* — некоторые положительные параметры.

Запишем (5) в виде

$$\frac{\widehat{u}_{1i} - u_{1i}}{\tau} = \alpha_1 \sigma \frac{\widehat{u}_{1i-1}^2 - 2\widehat{u}_{1i}^2 + \widehat{u}_{1i+1}^2}{h^2} +$$

$$+ \alpha_1 (1 - \sigma) \Lambda u_{1i}^2 - \beta_1 (\widehat{u}_{1i} - \widehat{u}_{2i}) + \frac{\widehat{\varepsilon}}{\mu}, \tag{10}$$

$$\frac{\widehat{u}_{2i} - u_{2i}}{\tau} = \alpha_2 \sigma \frac{\widehat{u}_{2i-1} - 2\widehat{u}_{2i} + \widehat{u}_{2i+1}}{h^2} +$$

$$+ \alpha_2 (1 - \sigma) \Lambda u_{2i} + \beta_2 (\widehat{u}_{1i} - \widehat{u}_{2i}).$$

Для определения $\widehat{u}_{1i}$ и $\widehat{u}_{2i}$ используем идею квазилинеаризации [5] и построим следующий итерационный процесс:

$$\frac{\widehat{u}_{1i}^{(s+1)} - u_{1i}}{\tau} = \alpha_1 \sigma \frac{\widehat{u}_{1i+1}^{(s)} \widehat{u}_{1i+1}^{(s+1)} - 2\widehat{u}_{1i}^{(s)} \widehat{u}_{1i}^{(s+1)} + \widehat{u}_{1i-1}^{(s)} \widehat{u}_{1i-1}^{(s+1)}}{h^2} -$$

$$- \beta_1 (\widehat{u}_{1i}^{(s+1)} - \widehat{u}_{2i}^{(s+1)}) + \widehat{\varepsilon} \mu^{-1} + \alpha_1 (1 - \sigma) \Lambda u_{1i}^2,$$

$$\frac{\widehat{u}_{2i}^{(s+1)} - u_{2i}}{\tau} = \alpha_2 \sigma \frac{\widehat{u}_{2i-1}^{(s+1)} - 2\widehat{u}_{2i}^{(s+1)} + \widehat{u}_{2i-1}^{(s+1)}}{h^2} + \tag{11}$$

$$+ \beta_2 (\widehat{u}_{1i}^{(s+1)} - \widehat{u}_{2i}^{(s+1)}) + \alpha_2 (1 - \sigma) \Lambda u_{2i};$$

$$\widehat{u}_{10}^{(s+1)} = \tilde{a}_1 \widehat{u}_{11}^{(s+1)} + \tilde{b}_1 u_{10}; \tag{12}$$

$$\widehat{u}_{1n}^{(s+1)} = \tilde{a}_2 \widehat{u}_{1n-1}^{(s+1)} + \tilde{b}_2 u_{1n}; \tag{13}$$

$$\widehat{u}_{20}^{(s+1)} = \tilde{c}_1 \widehat{u}_{21}^{(s+1)} + \tilde{d}_1 u_{20}; \tag{14}$$

$$\widehat{u}_{2n}^{(s+1)} = \tilde{c}_2 \widehat{u}_{2n-1}^{(s+1)} + \tilde{d}_2 u_{2n}, \tag{15}$$

где $\tilde{a}_1 = \dfrac{\varphi_g}{\varphi_g + h}$, $\tilde{b}_1 = \dfrac{\delta_1 h \varphi_g}{\varphi_g + h + \delta_1 h \varphi_g}$; $\tilde{a}_2 = \dfrac{1}{1 + h\delta_2}$,

$\tilde{b}_2 = \dfrac{h\delta_2}{1 + h\delta_2}$; $\tilde{c}_1 = \dfrac{1}{1 + h\delta_1^*}$, $\tilde{d}_1 = \dfrac{h\delta_1^*}{1 + h\delta_1^*}$;

$$\tilde{c}_2 = \frac{1}{1+\delta_2^* h}, \quad \tilde{d}_2 = \frac{h\delta_2^*}{1+h\delta_2^*}.$$

Здесь s — номер итерации. При этом считаем, что

$$\widehat{u}_{1i}^{(0)} = u_{1i}, \quad \widehat{u}_{2i}^{(0)} = u_{2i}. \tag{16}$$

Итерационный процесс продолжается до выполнения условия

$$\max_i \{ | \widehat{u}_{1i}^{(s+1)} - \widehat{u}_{1i}^{(s)} |, \quad | \widehat{u}_{2i}^{s+1} - \widehat{u}_{2i}^{(s)} | \} \leqslant \Delta, \tag{17}$$

где Δ — заданная положительная величина.

Представим уравнения системы (11) в виде

$$\begin{aligned} &a_i \widehat{u}_{1i-1}^{(s+1)} - b_i \widehat{u}_{1i}^{(s+1)} + d_i \widehat{u}_{1i+1}^{(s+1)} + c_i \widehat{u}_{2i}^{(s+1)} = -f_i, \\ &a_i' \widehat{u}_{2i-1}^{(s+1)} - b_i' \widehat{u}_{2i}^{(s+1)} + d_i' \widehat{u}_{2i+1}^{(s+1)} + c_i' \widehat{u}_{1i}^{(s+1)} = -f_i', \end{aligned} \tag{18}$$

где $a_i = \dfrac{\alpha_1 \sigma \widehat{u}_{1i-1}^{(s)}}{h^2}$, $b_i = \dfrac{2\widehat{u}_{1i}^{(s)} \alpha_1 \sigma}{h^2} + \dfrac{1}{\tau} + \beta_1$, $d_i = \dfrac{\alpha_1 \sigma \widehat{u}_{1i+1}^{(s+1)}}{h^2}$, $c_i = \beta_1$, $f_i = -\alpha_1 (1-\sigma) \Lambda u_{1i}^2 - \widehat{\varepsilon\mu}^{-1} - \tau^{-1} u_{1i}$, $a_i' = \alpha_2 \sigma h^{-2}$, $b_i' = 2\alpha_2 \sigma h^{-2} + \tau^{-1} + \beta_2$, $d_i' = \alpha_2 \sigma h^{-2}$, $c_i' = \beta_2$, $f_i' = -\alpha_2 (1-\sigma) \Lambda u_{2i} - \tau^{-1} u_{2i}$.

Решение системы (18) для каждого s будем искать методом прогонки [6]. Пусть

$$\begin{aligned} &\widehat{u}_{1i}^{(s+1)} = A_i \widehat{u}_{1i+1}^{(s+1)} + B_i \widehat{u}_{2i+1}^{(s+1)} + C_i, \\ &\widehat{u}_{2i}^{(s+1)} = A_i' \widehat{u}_{2i+1}^{(s+1)} + B_i' \widehat{u}_{1i+1}^{(s+1)} + C_i'. \end{aligned} \tag{19}$$

Тогда прогоночные коэффициенты A_i, B_i, C_i, A_i', B_i', C_i' будут определяться из соотношений

$$A_i = \frac{c_i (b_i' - a_i' A_{i-1}')}{R_i}, \quad B_i = \frac{c_i' (a_i B_{i-1} + d_i)}{R_i}, \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &C_i = \frac{(a_i B_{i-1} + d_i)(a_i' C_{i-1}' + f_i') + (a_i C_{i-1} + f_i)(b_i' - a_i A_{i-1}')}{R_i}, \\ &A_i' = \frac{c_i' (b_i - a_i A_{i-1})}{R_i}, \quad B_i' = \frac{c_i (a_i' B_{i-1}' + d_i')}{R_i}, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} &C_i' = \frac{(a_i' B_{i-1}' + d_i')(a_i C_{i-1} + f_i) + (a_i' C_{i-1}' + f_i')(b_i - a_i A_{i-1})}{R_i}, \\ &R_i = (b_i - a_i A_{i-1})(b_i' - a_i' A_{i-1}') - (a_i B_{i-1} + d_i)(a_i' B_{i-1}' + d_i'). \end{aligned} \tag{22}$$

Значения A_0, B_0, C_0, A_0', B_0', C_0' получим, принимая во внимание (19) и краевые условия (12).

При исследовании сходимости разностной схемы (5)—(9) будем использовать метод энергетических неравенств и априорных оценок [4]. Предположим для простоты, что в (5) $\sigma = 1$. Тогда система уравнений для функций погрешности $z_1 = u_1 - h_1$, $z_2 = u_2 - h_2$ будет иметь вид

$$z_{1\bar{t}} = \gamma(x, t)\, z_{1\bar{x}x} - \beta_1 (z_1 - z_2) + \psi_1; \tag{23}$$

$$z_{2\bar{t}} = \alpha_2 z_{2\bar{x}x} + \beta_2 (z_1 - z_2) + \psi_2; \tag{24}$$

$$z_{1x,0} = \delta_1 \tau z_{1\bar{t},0} + \varphi_g^{-1} z_{1,0} + \nu_1, \quad z_{1\bar{x},n} = -\delta_2 \tau z_{1\bar{t},n} - \nu_2; \tag{25}$$

$$z_{2x,0} = \delta_1^* \tau z_{2\bar{t},0} + \nu_3, \quad z_{2\bar{x},n} = -\delta_2^* \tau z_{2\bar{t},n} - \nu_4; \quad z_{1i}^{(0)} = 0, \quad z_{2i}^{(0)} = 0, \tag{26}$$

где $\gamma(x, t) = 2\alpha_1 \bar{h}_{1\bar{x}x}$, $\psi_i = O(\tau + h^2)$ $(i = 1, 2)$, $\nu_j = O(\tau + h)$ $(j = \overline{1, 4})$.

В дальнейшем будем предполагать, что

$$0 < C_0 \leqslant \gamma(x, t) \leqslant C_1 < \infty. \tag{27}$$

Умножив скалярно уравнение (23) на $\tau z_{1\bar{t}}$, а уравнение (24) — на $\tau z_{2\bar{t}}$ и воспользовавшись первой разностной формулой Грина [4] и краевыми условиями (25), получим

$$\begin{aligned} \tau(z_{1\bar{t}}, z_{1\bar{t}}) = {} & -\gamma(z_{1\bar{x}}, z_{1\bar{x}}] + \gamma(z_{1\bar{x}}, \breve{z}_{1\bar{x}}] - \beta_1(z_1, z_1) + \beta_1(z_1, \breve{z}_1) + \\ & + \tau\beta_1(\breve{z}_2, z_{1\bar{t}}) + \tau^2\beta_1(z_{2\bar{t}}, z_{1\bar{t}}) + \frac{\gamma}{\varphi_g} z_{10}\breve{z}_{10} - \frac{\gamma}{\varphi_g} z_{10}^2 - \gamma\tau^2\delta_1 z_{1\bar{t},0}^2 - \\ & - \gamma\tau^2\delta_2 z_{1\bar{t},n}^2 + \tau\gamma z_{1\bar{t},n} + \tau\gamma\nu_1 z_{1\bar{t},0} - \tau(\psi_1, z_{1\bar{t}}), \\ \tau(z_{2\bar{t}}, z_{2\bar{t}}) = {} & -\alpha_2(z_{2\bar{x}}, z_{2\bar{x}}] + \alpha_2(z_{2\bar{x}}, \breve{z}_{2\bar{x}}] - \tau\beta_2(\breve{z}_1, z_{2\bar{t}}) + \\ & + \tau^2\beta_2(z_{1\bar{t}}, z_{2\bar{t}}) + \beta_2(z_2, \breve{z}_2) - \beta_2(1, z_2^2) - \alpha_2\delta_1^*\tau^2 z_{2\bar{t},0}^2 - \alpha_2\delta_2^*\tau^2 z_{2\bar{t},n}^2 + \\ & + \alpha_2\tau\nu_4 z_{2\bar{t},n} - \tau\alpha_2\nu_3 z_{2\bar{t},0} - \tau(\psi_2, z_{2\bar{t}}). \end{aligned} \tag{28}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} w(t) = {} & \| z_{1\bar{t}} \|^2 + \| z_{2\bar{t}} \|^2 + \tau[\gamma\delta_1 z_{1\bar{t},0}^2 + \gamma\delta_2 z_{1\bar{t},n}^2 + \\ & + \alpha_2\delta_1^* z_{2\bar{t},0}^2 + \alpha_2\delta_2^* z_{2\bar{t},n}^2], \end{aligned}$$

$$I(t) = \gamma \| z_{1\bar{x}}]|^2 + \alpha_2 \| z_{2\bar{x}}]|^2 + \beta_1 \| z_1 \|^2 + \beta_2 \| z_2 \|^2 + \gamma\varphi_g^{-1} z_{1,0}^2, \tag{29}$$

$$R(t) = \gamma(z_{1\bar{x}}, \breve{z}_{1\bar{x}}] + \alpha_2(z_{2\bar{x}}, \breve{z}_{2\bar{x}}] + \beta_1(z_1, \breve{z}_1) + \beta_2(z_2, \breve{z}_2) + \gamma\varphi_g^{-1} z_{1,0}\breve{z}_{1,0},$$

$$r(t) = \beta_1 (\breve{z}_2, z_{1\bar{t}}) + \beta_2 (\breve{z}_1, z_{2\bar{t}}) + \tau (\beta_1 + \beta_2)(z_{2\bar{t}}, z_{1\bar{t}}) +$$
$$+ \gamma \nu_1 z_{1\bar{t},0} + \gamma \nu_2 z_{1\bar{t},n} + \alpha_2 \nu_3 z_{2\bar{t},0} + \alpha_2 \nu_4 z_{2\bar{t},n},$$
$$g(t) = (\psi_1, z_{1\bar{t}}) + (\psi_2, z_{2\bar{t}}).$$

Очевидно, что $w(t) \geqslant 0$, $I(t) \geqslant 0$. Из (28), принимая во внимание (29), получаем

$$\tau w(t) + I(t) = R(t) + \tau r(t) + \tau g(t). \tag{30}$$

Просуммируем обе части (30) по t_k $(k = \overline{1, j+1})$:

$$\sum_{k=1}^{j+1} [\tau w(t_k) + I(t_k)] = \sum_{k=1}^{j+1} \{R(t_k) + \tau [r(t_k) + g(t_k)]\}. \tag{31}$$

Используя неравенство Коши — Буняковского и ε-неравенство, оцениваем величины, входящие в правую часть (31), через величины $w(t_k)$, $I(t_k)$. Тогда

$$R(t) \leqslant \frac{\gamma}{2} \| z_{1\bar{x}}] |^2 + \| z_{1\bar{x}}] |^2 + \frac{\alpha_2}{2} (\| z_{2\bar{x}}] |^2 + \| \breve{z}_{2\bar{x}}] |^2) + \frac{\beta_1}{2} (\| z_1 \|^2 +$$

$$+ \| \breve{z}_1 \|^2) + \frac{\beta_2}{2} (\| z_2 \|^2 + \| \breve{z}_2 \|^2) + \frac{\gamma}{2\varphi_g} (z_{1,0}^2 + \breve{z}_{1,0}^2) \leqslant \frac{I(t) + \breve{I}(t)}{2}. \tag{32}$$

Подбирая положительные постоянные ε_i $(i = \overline{1, 9})$, τ так, чтобы они удовлетворяли неравенствам

$$\begin{aligned} &\beta_1 \varepsilon_1 + \tau \varepsilon_3 (\beta_1 + \beta_2) + \varepsilon_8 \leqslant 1, \quad \varepsilon_6 \geqslant \frac{1}{4\tau \delta_1^*}, \quad \varepsilon_7 \geqslant \frac{1}{4\tau\delta_2^*}, \\ &\beta_2 \varepsilon_2 + \tau \frac{\beta_1 + \beta_2}{4\varepsilon_3} + \varepsilon_9 \leqslant 1, \quad \varepsilon_4 \geqslant \frac{1}{4\tau\delta_1}, \quad \varepsilon_5 \geqslant \frac{1}{4\tau\delta_2}, \end{aligned} \tag{33}$$

получаем

$$| r(t) + g(t) | \leqslant w(t) + \breve{I}(t) + \gamma \varepsilon_4 \nu_1^2 + \gamma \varepsilon_5 \nu_2^2 +$$
$$+ \alpha_2 \varepsilon_6 \nu_3^2 + \alpha_2 \varepsilon_7 \nu_4^2 + \frac{\| \psi_1 \|^2}{4\varepsilon_8} + \frac{\| \psi_2 \|^2}{4\varepsilon_9}. \tag{34}$$

Подставляя (32), (34) в (31), находим

$$\sum_{k=1}^{j+1} [\tau w(t_k) + I(t_k)] \leqslant \sum_{k=1}^{j+1} \left\{ \frac{I(t_k) + \breve{I}(t_k)}{2} + \tau w(t_k) + \right.$$
$$\left. + \tau \breve{I}(t_k) + \widetilde{M} \sum_{i=1}^{4} \nu_i^2 + \tau [\| \psi_1(t_k) \|^2 + \| \psi_2(t_k) \|^2] \right\} \tag{35}$$

или

$$I(t_{j+1}) \leqslant 2 \sum_{k=1}^{j+1} \tau \breve{I}(t_k) + \omega(t_{j+1}) = 2 \sum_{k=0}^{j} \tau I(t_k) + \omega(t_{j+1}), \tag{36}$$

где $\widetilde{M}$ — положительная постоянная, не зависящая от τ и h, а

$$\omega(t_{j+1}) = 2\left\{\widetilde{M}\sum_{i=1}^{4} \nu_i^2 + \sum_{k=1}^{j+1} \tau\left[\|\psi_1(t_k)\|^2 + \|\psi_2(t_k)\|^2\right]\right\} \tag{37}$$

— неубывающая положительная функция.

Обозначая

$$Q(z) = \gamma\|z_{1\bar{x}}]|^2 + \alpha_2\|z_{2\bar{x}}]|^2 + \beta_1\|z_1\|^2 + \beta_2\|z_2\|^2 + \frac{\gamma}{\varphi_g} z_{1,0}^2, \tag{37'}$$

неравенство (36) записываем в виде

$$Q(z(t_{j+1})) \leqslant \omega(t_{j+1}) + 2\sum_{k=1}^{j} \tau\|z(t_k)\|^2. \tag{38}$$

Последовательно применяя неравенство (38), получаем

$$Q(z(t_{j+1})) \leqslant \omega(t_{j+1}) + A_1 e^{A_1 t_j} \sum_{k=1}^{j} \tau\omega(t_k) \leqslant A_2(h+\tau), \tag{39}$$

где A_i $(i = 1, 2)$ — положительные постоянные, не зависящие от τ и h. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема. Если $h_i(x, t) \in C_\alpha^\beta$ $(0 < x < l,\ 0 < t < T)$ $(i = 1, 2,$ $\alpha = 4,\ \beta = 2$, α — дифференцируемость по x, β — по t) и выполнены условия (1′), (27), то для достаточно малых τ и h решение разностной задачи (5)—(10) при $\tau \to 0$, $h \to 0$ сходится к решению дифференциальной задачи (1), (2) и для погрешности метода справедлива оценка (39).

Числовой пример. Пусть $k_1 = 0{,}36$ м/сутки, $\mu_1 = 0{,}08$ м²/сутки, $m_1 = 1{,}2$ м, $k_2 = 5$ м/сутки, $\mu_2 = 0{,}15$ м²/сутки, $m_2 = 8$ м, $k_0 = 0{,}05$ м/сутки, $m_0 = 1{,}4$ м, $l = 8$ м, $\sigma = 0{,}1\, H_0$.

Для расчета φ_g используем формулу $\varphi_g = 0{,}73 m_1 \lg \frac{m_1}{\pi r_g}$, где r_g взято равным 0,035 м.

Зависимость инфильтрации $\varepsilon(t)$ от времени задана табл. 1, составленной в результате замера осадков в зоне Прикарпатья, причем временной интервал выбран равным 1 суткам. Для расчета необходимых значений $\varepsilon(t)$ в любой момент времени приближаем эти значения при помощи метода наименьших квадратов. При этом полу-

Таблица 1

t	1	2	3	4	5	6	7
$\varepsilon(t)$	0,0123	0,0018	0,0009	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004
t	8	9	10	11	12	13	14
$\varepsilon(t)$	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	

Таблица 2

t	h	x									
		0,0	0,8	1,6	2,4	3,2	4,0	4,8	5,6	6,4	7,2
0	h_1	0,1098	0,1590	0,1590	0,1590	0,1590	0,1590	0,1590	0,1590	0,1590	0,1590
	h_2	0,0681	0,0681	0,0681	0,0681	0,0681	0,0681	0,0681	0,0681	0,0681	0,0681
1	h_1	0,0836	0,1210	0,1210	0,1210	0,1210	0,1210	0,1210	0,1210	0,1210	0,1210
	h_2	0,0819	0,0819	0,0819	0,0819	0,0819	0,0819	0,0819	0,0819	0,0819	0,0819
2	h_1	0,0783	0,1133	0,1133	0,1133	0,1133	0,1133	0,1133	0,1133	0,1133	0,1133
	h_2	0,0890	0,0890	0,0890	0,0890	0,0890	0,0890	0,0890	0,0890	0,0890	0,0890
3	h_1	0,0770	0,1115	0,1114	0,1115	0,1115	0,1115	0,1115	0,1115	0,1115	0,1115
	h_2	0,0937	0,0937	0,0937	0,0937	0,0937	0,0937	0,0937	0,0937	0,0937	0,0937
4	h_1	0,0768	0,1112	0,1112	0,1112	0,1112	0,1112	0,1112	0,1112	0,1112	0,1112
	h_2	0,0973	0,0973	0,0973	0,0973	0,0973	0,0973	0,0973	0,0973	0,0973	0,0973
5	h_1	0,0771	0,1116	0,1116	0,1116	0,1116	0,1116	0,1116	0,1116	0,1116	0,1116
	h_2	0,1001	0,1001	0,1001	0,1001	0,1001	0,1001	0,1001	0,1001	0,1001	0,1001
6	h_1	0,0776	0,1123	0,1123	0,1123	0,1123	0,1123	0,1123	0,1123	0,1123	0,1123
	h_2	0,1024	0,1024	0,1024	0,1024	0,1024	0,1024	0,1024	0,1024	0,1024	0,1024
7	h_1	0,0781	0,1132	0,1132	0,1132	0,1132	0,1132	0,1132	0,1132	0,1132	0,1132
	h_2	0,1044	0,1044	0,1044	0,1044	0,1044	0,1044	0,1044	0,1044	0,1044	0,1044
8	h_1	0,0789	0,1142	0,1142	0,1142	0,1142	0,1142	0,1142	0,1142	0,1142	0,1142
	h_2	0,1062	0,1062	0,1062	0,1062	0,1062	0,1062	0,1062	0,1062	0,1062	0,1062
9	h_1	0,0795	0,1151	0,1151	0,1151	0,1151	0,1151	0,1151	0,1151	0,1151	0,1151
	h_2	0,1078	0,1078	0,1078	0,1078	0,1078	0,1078	0,1078	0,1078	0,1078	0,1078

чаем следующие значения параметров: $\varphi_g = 1{,}785$; $\alpha_1 = 5{,}4$; $\alpha_2 = 266$; $\beta_1 = 0{,}446$; $\beta_2 = 0{,}238$.

В табл. 2 приведены результаты расчета на ЭВМ значений $h_1(x, t)$ и $h_2(x, t)$ при значениях $\varepsilon(t)$, заданных табл. 1, в моменты времени, соответствующие 1, 2, ..., 10 суткам. Значения $h_1(x, t)$, $h_2(x, t)$ приведены в точках $x = 0, 0{,}1l, \ldots, l$. Расчет проведен при $\tau = 0{,}01$ и $h = 0{,}8$.

1. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М., 1977. 2. *Олейник А. Я., Насиковский В. П.* Расчет систематического несовершенного горизонтального дренажа в однородном грунте при неустановившемся режиме фильтрации.— Мелиорация и водное хозяйство, 1969, вып. 10. 3. *Липовой Г. С.* Применение численных методов к решению нестационарной задачи фильтрации к несовершенным дренам при наличии переменной инфильтрации.— В кн.: Аналитические численные и аналоговые методы в задачах теплопроводности. Киев, 1977. 4. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М., 1977. 5. *Беллман Р., Калаба Р.* Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М., 1968. 6. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.

Поступила в редколлегию 14.05.79

A. A. Skorobogat'ko, B. P. Bezdetnyi

NUMERICAL SOLUTION OF NONSTATIONARY FILTRATION PROBLEM TO NONPERFECT DRAINES WITH PRESENCE OF INFILTRATION

The nonlinear boundary value problem of change of subsoil waters level in three-layer space with presence of infiltration is considered. The cenvergence of difference scheme is proved.

УДК 517.947

В. Я. КАРАЧУН, ст. инж., г. Киев

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ БРОМВИЧА, СОДЕРЖАЩИХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Интегралы Бромвича типа

$$Б_1(z, t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{s}(1-z)}{\sqrt{s}\operatorname{ch}\sqrt{s}+\gamma\operatorname{sh}\sqrt{s}}e^{st}ds, \quad 0\leqslant z\leqslant 1, \tag{1}$$

$$Б_2(z, t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\operatorname{ch}\sqrt{s}(1-z)}{\sqrt{s}\operatorname{sh}\sqrt{s}+\gamma\operatorname{ch}\sqrt{s}}e^{st}ds, \tag{1'}$$

$$Б_3(z, t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\sqrt{s}\operatorname{ch}\sqrt{s}(1-z)+\gamma\operatorname{sh}\sqrt{s}(1-z)}{(s+\gamma^2)\operatorname{sh}\sqrt{s}+2\gamma\sqrt{s}\operatorname{ch}\sqrt{s}}e^{st}ds \tag{1''}$$

весьма часто встречаются в приложениях математической физики, так как через них с помощью преобразования Лапласа выражаются решения задач теплопроводности и диффузии в слоевых областях [2, 3].

К сожалению, в существующих таблицах интегральных преобразований [1] интегралы (1)—(1″) отсутствуют, поскольку они не выражаются через известные специальные функции. Вычисление таких интегралов Бромвича представляет собой довольно трудную и малоизученную задачу [2]. В данной работе вычисление рассматриваемых интегралов сведено к решению специальных интегральных уравнений Вольтерра второго рода, решаемых численно.

Итак, рассмотрим методику вычисления интегралов (1)—(1″). Непосредственной проверкой убеждаемся, что функции $Б_i(z, t)$ удовлетворяют уравнению теплопроводности

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial}{\partial t}\right)Б_i(z, t) = 0, \tag{2}$$

начальному условию

$$Б_i(z, 0) = 0 \tag{3}$$

и следующим граничным условиям

$$\left(\frac{\partial Б_1(z, t)}{\partial z}-\gamma Б_1(z, t)\right)_{z=0} = \delta(t), \quad Б_1(1, t) = 0; \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial Б_2(z, t)}{\partial z}-\gamma Б_2(z, t)\right)_{z=0} = \delta(t), \quad \left.\frac{\partial Б_2(z, t)}{\partial z}\right|_{z=1} = 0; \tag{4'}$$

$$\left(\frac{\partial Б_3(z, t)}{\partial z}-\gamma B_3(z, t)\right)_{z=0} = \delta(t), \tag{4''}$$

$$\left(\frac{\partial Б_3(z, t)}{\partial z} + \gamma Б_3(z, t)\right)_{z=1} = 0,$$

где $i = 1, 2, 3$; $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака.

Из формул (1)—(1″), (2)—(4″) следует, что вычисление интегралов $Б_i(z, t)$ сводится к решению специально сформулированных задач теплопроводности вида (2)—(4″). Очевидно, что для решения начально-краевых задач теплопроводности (2)—(4″) нельзя применить преобразование Лапласа, поскольку решения этих задач будут выражаться через интегралы $Б_i(z, t)$.

Использовав принцип суперпозиции решений и результаты [3], решение начально-краевых задач (2)—(4″) представим в виде

$$Б_i(z, t) = K_*(z, t) + K_{0i}(z, t), \tag{5}$$

где

$$K_*(z, t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{z^2}{4t}} + \gamma e^{\gamma z + t\gamma^2} \operatorname{Erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{t}} + \gamma\sqrt{t}\right), \tag{6}$$

а функция $K_{0i}(z, t)$ определяется из решения следующих начально-краевых задач теплопроводности:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right) K_{0i}(z, t) = 0, \tag{7}$$

$$K_{0i}(z, 0) = 0, \tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial K_{01}}{\partial z} - \gamma K_{01}\right)_{z=0} = 0, \quad K_{01}(1, t) = -K_*(1, t); \tag{9}$$

$$\left(\frac{\partial K_{02}}{\partial z} - \gamma K_{02}\right)_{z=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial K_{02}}{\partial z}\right|_{z=1} = -\left.\frac{\partial K_*}{\partial z}\right|_{z=1}; \tag{9'}$$

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial K_{03}}{\partial z} - \gamma K_{03}\right)_{z=0} = 0, \\ \left(\frac{\partial K_{03}}{\partial z} + \gamma K_{03}\right)_{z=1} = -\left(\frac{\partial K_*}{\partial z} + \gamma K_*\right)_{z=1}.\end{gathered} \tag{9''}$$

Решение начально-краевых задач (7) — (9), (7), (8), (9′) и (7), (8), (9″) представим в виде

$$K_{0i}(z, t) = \int_0^t \left\{\omega_{1i}(\tau) \operatorname{Erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{t-\tau}}\right) + \omega_{2i}(\tau) \operatorname{Erfc}\left(\frac{1-z}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\right\} d\tau, \tag{10}$$

где $\operatorname{Erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{t}}\right) = 2\pi^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{\frac{z}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta$; $\omega_{1i}(t)$ и $\omega_{2i}(t)$ — произвольные непрерывные функции. Решение вида (10) удовлетворяет начальному условию (8), а неизвестные функции $\omega_{1i}(t)$, $\omega_{2i}(t)$ можно определить с помощью граничных условий соответствующих начально-краевых задач.

В работе [3] было показано, что неизвестные функции $\omega_{11}(t)$ и $\omega_{21}(t)$ являются решениями следующих интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \omega_{11}(t) &= -\int_0^t \omega_{11}(\tau) L(t-\tau)\, d\tau + G(t); \\ \omega_{21}(t) &= -\int_0^t \omega_{21}(\tau) L(t-\tau)\, d\tau + R(t), \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$L(t) = \pi^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{t}} (t^{-1} - 2\gamma) + 2\gamma^2 e^{2\gamma+\gamma^2 t} \operatorname{Erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \gamma\sqrt{t}\right);$$

$$\begin{aligned} G(t) = \Big\{ & \pi^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{t}} (t^{-1} + 1 + \gamma) - 3\gamma e^{2\gamma+\gamma^2 t} \operatorname{Erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \right. \\ & \left. + \gamma\sqrt{t}\right) - 2\gamma^2 \frac{\partial}{\partial\gamma} e^{2\gamma+\gamma^2 t} \operatorname{Erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \gamma\sqrt{t}\right)\Big\}'_t; \end{aligned} \tag{12}$$

$$R(t) = \left\{\pi^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4t}} - \gamma e^{\gamma+\gamma^2 t} \operatorname{Erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}} + \gamma\sqrt{t}\right)\right\}'_t.$$

Покажем, что в случае граничных условий (9′) и (9″) неизвестные функции $\omega_{1i}(t)$ и $\omega_{2i}(t)$ будут определяться из решения аналогичных интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Действительно, подставляя выражение $K_{02}(z, t)$ в граничные условия (9′), получаем систему интегральных уравнений Вольтерра для неизвестных функций $\omega_{12}(t)$ и $\omega_{22}(t)$:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^t \left\{-\frac{\omega_{12}(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} + \frac{\omega_{22}(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{1}{4(t-\tau)}}\right\} d\tau - \gamma\int_0^t \Big\{\omega_{12}(\tau) - \\ \displaystyle - \omega_{22}(\tau) \operatorname{Erfc}\left(\frac{1}{\pi\sqrt{t-\tau}}\right)\Big\} d\tau = 0, \\ \displaystyle\int_0^t \left\{-\frac{\omega_{12}(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{1}{4(t-\tau)}} + \frac{\omega_{22}(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\right\} d\tau = Q(t), \end{cases} \tag{13}$$

где $Q(t) = -\left.\dfrac{\partial K_*}{\partial z}\right|_{z=1}$.

Применяя к системе интегральных уравнений (13) преобразование Лапласа [1], на основании теоремы о свертке получаем

$$\begin{cases} -\Omega_{12}(p) p^{-\frac{1}{2}} + \Omega_{22}(p) p^{-\frac{1}{2}} e^{-\sqrt{p}} - \gamma p^{-1} (\Omega_{12}(p) + \\ + e^{-\sqrt{p}} \Omega_{22}(p)) = 0, \\ -\Omega_{12}(p) p^{-\frac{1}{2}} e^{-\sqrt{p}} + \Omega_{22}(p) p^{-\frac{1}{2}} = Q(p), \end{cases} \tag{14}$$

где $\Omega(p) = \int_0^\infty \omega(t) e^{-pt} dt$.

Систему (14) преобразуем к виду

$$\begin{cases} \Omega_{22}(p) = \dfrac{\sqrt{p}-\gamma}{\sqrt{p}+\gamma} e^{-2\sqrt{p}}\, \Omega_{22}(p) + Q(p)\, p^{\frac{1}{2}}, \\ \Omega_{12}(p) = \dfrac{\sqrt{p}-\gamma}{\sqrt{p}+\gamma} e^{-2\sqrt{p}}\, \Omega_{12}(p) + \dfrac{Q(p)\, p^{\frac{1}{2}}(\sqrt{p}-\gamma)}{\sqrt{p}+\gamma} e^{-\sqrt{p}}. \end{cases} \tag{15}$$

Применяя к (15) обратные преобразования Лапласа [1], после ряда несложных преобразований получаем два интегральных уравнения для определения неизвестных функций $\omega_{12}(t)$ и $\omega_{22}(t)$:

$$\begin{gathered} \omega_{12}(t) = \int_0^t \omega_{12}(\tau)\, L(t-\tau)\, d\tau + G(t); \\ \omega_{22}(t) = \int_0^t \omega_{22}(\tau)\, L(t-\tau)\, d\tau + R(t), \end{gathered} \tag{11$'$}$$

где

$$G(t) = t^{-\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{1}{2}}\left[-t^{-2} + t^{-1}(2^{-1}+3\gamma) - \gamma^2 - 2\gamma^3(\gamma+1)\,t\right] e^{-\frac{1}{t}} + \\ + \gamma^3(2\gamma^2 t + 2\gamma t + 2\gamma + 9)\, e^{2\gamma+\gamma^2 t}\, \mathrm{Erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \gamma\sqrt{t}\right);$$

$$R(t) = t^{-\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{1}{2}}\left[-t^{-2}2^{-2} + t^{-1}2^{-1}(1+\gamma) - \gamma^2\right] e^{-\frac{1}{4t}} + \\ + \gamma^3 e^{\gamma+\gamma^2 t}\, \mathrm{Erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}} + \gamma\sqrt{t}\right). \tag{12$'$}$$

Функции $\omega_{13}(t)$ и $\omega_{23}(t)$ также являются решениями интегральных уравнений вида (11′), в которых

$$L(t) = \pi^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{t}} - 4\gamma \frac{\partial}{\partial t}\left[2\pi^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{t}} - \right. \\ \left. - (2\gamma t + 2)\, e^{2\gamma+\gamma^2 t}\, \mathrm{Erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \gamma\sqrt{t}\right)\right]$$

и

$$G(t) = \frac{\partial^2}{\partial t\,\partial\gamma}\gamma^2 e^{2\gamma+\gamma^2 t}\, \mathrm{Erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \gamma\sqrt{t}\right) + \pi^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}}\left[t^{-1}(3\gamma + 2^{-1}) - \right. \\ \left. - t^{-2} - 10\gamma^2\right] e^{-\frac{1}{t}} + 3\gamma \frac{\partial}{\partial\gamma}\gamma^3 e^{2\gamma+\gamma^2 t}\, \mathrm{Erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \gamma\sqrt{t}\right) + \\ + \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\gamma^3 e^{2\gamma+\gamma^2 t}\, \mathrm{Erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \gamma\sqrt{t}\right) + \gamma^3 \frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\gamma^2 e^{2\gamma+\gamma^2 t} \times \\ \times \mathrm{Erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \gamma\sqrt{t}\right) + 2\gamma^2 \frac{\partial}{\partial\gamma}\gamma^2 e^{2\gamma+\gamma^2 t}\, \mathrm{Erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \gamma\sqrt{t}\right); \tag{12$''$}$$

$$R(t) = -\pi^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} [(1 + 4\gamma^2) + \gamma(\gamma + 1) t^{-1}] e^{-\frac{1}{4t}} +$$
$$+ (4\gamma^5 t + 2\gamma^4 + 6\gamma^3 + \gamma) e^{\gamma + \gamma^2 t} \operatorname{Erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}} + \gamma\sqrt{t}\right) +$$
$$+ (4\gamma^3 t + 2\gamma^2) e^{\gamma + \gamma^2 t} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}} + \gamma\sqrt{t}\right).$$

Рассмотрим теперь алгоритм решения полученных интегральных уравнений и алгоритм вычисления функций $K_{0i}(z, t)$. Поскольку ядра интегральных уравнений Вольтерра (11) разностные, то их решения можно находить с помощью интегрального преобразования Лапласа, используя теорему о свертке. Однако получаемые при этом решения будут довольно сложными, а их применение для вычисления функций $K_{0i}(z, t)$ весьма затруднительным [3]. Интегральные уравнения (11) целесообразнее решать численно на ЭВМ с помощью метода шагов по переменной t. Для вычисления $K_{0i}(z, t)$ введем вспомогательные функции

$$g(t) = \int_0^t \operatorname{Erfc}\left(\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\tau}}\right) d\tau \tag{16}$$

и

$$I(t_{n+1}) \equiv \int_0^{t_{n-1}} \omega(\tau) \operatorname{Erfc}\left(\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{t_{n+1} - \tau}}\right) d\tau =$$
$$= \sum_{j=0}^{n} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \omega(\tau) \operatorname{Erfc}\left(\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{t_{n+1} - \tau}}\right) d\tau, \tag{17}$$

где $t_j = jh,\ j = 0, 1, 2, \dots$.

Использовав преобразование Лапласа [1], функцию $g(t)$ представим в виде

$$g(t) = \left(t + \frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{Erfc}\left(\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{t}}\right) - \pi^{-\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha}{4t}};$$
$$g(0) = 0;\ \ g'(t) = \operatorname{Erfc}\left(\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{t}}\right). \tag{18}$$

В каждом из интегралов суммы (17) сделаем аппроксимацию:

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \omega(\tau) \operatorname{Erfc}\left(\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{t_{n+1} - \tau}}\right) d\tau = \omega(t_j) \int_{t_j}^{t_{j+1}} g'(t_{n+1} - \tau)\, d\tau =$$
$$= \omega(t_j) [g(t_{n+1} - t_{j+1}) - g(t_{n+1} - t_j)]. \tag{19}$$

Учитывая формулы (17) — (19), получаем

$$I[h(n+1)] = -\sum_{j=0}^{n} \omega(jh)\langle g[h(n-j)] - g[h(n+1-j)]\rangle, \tag{20}$$

где $g(jh) = \left(jh + \frac{\alpha}{2}\right)\mathrm{Erfc}\left(\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{jh}}\right) - \pi^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\alpha jh}\, e^{-\frac{\alpha}{4jh}}$.

Полагая $\alpha^{\frac{1}{2}} = z$ и $\alpha^{\frac{1}{2}} = 1 - z$, получаем окончательную формулу для вычисления функции $K_{0i}(z, t)$:

$$K_{0i}[z, h(n+1)] = -\sum_{j=0}^{n} \omega_{1i}(jh)\langle A[z, h(n-j)] -$$

$$- A[z, h(n+1-j)]\rangle - \sum_{j=0}^{n} \omega_{2i}(jh)\langle A[1-z, h(n-j)] -$$

$$- A[1-z, h(n+1-j)]\rangle, \tag{21}$$

где $A(z, jh) = \left(jh + \frac{z^2}{2}\right)\mathrm{Erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{jh}}\right) - z\pi^{-\frac{1}{2}}\sqrt{jh}\, e^{-\frac{z^2}{4jh}}$.

При $0 < t < 2$, $0 < z < 1$ и $\gamma = 1$ функция $K_{01}(z, t)$ принимает значения, указанные в таблице.

t/z	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,2	—0,004	—0,003	—0,003	—0,004	—0,005	—0,009	—0,014	—0,021	—0,031
0,3	—0,029	—0,021	—0,015	—0,012	—0,011	—0,013	—0,017	—0,024	—0,034
0,4	—0,050	—0,040	—0,031	—0,025	—0,021	—0,019	—0,018	—0,020	—0,026
0,5	—0,056	—0,048	—0,041	—0,035	—0,029	—0,024	—0,021	—0,019	—0,018
0,6	—0,046	—0,044	—0,040	—0,036	—0,031	—0,026	—0,021	—0,017	—0,012
0,7	—0,023	—0,027	—0,029	—0,028	—0,026	—0,022	—0,018	—0,012	—0,006
0,8	0,011	0,001	—0,006	—0,011	—0,013	—0,012	—0,009	—0,004	0,003
0,9	0,055	0,037	0,023	0,014	0,007	0,004	0,004	0,008	0,016
1	0,107	0,082	0,062	0,046	0,034	0,027	0,024	0,026	0,032
1,1	0,167	0,134	0,107	0,085	0,068	0,056	0,049	0,048	0,052
1,2	1,155	0,821	0,585	0,431	0,346	0,321	0,355	0,447	0,605
1,3	2,614	2,000	1,528	1,174	0,928	0,780	0,726	0,766	0,905
1,4	4,257	3,414	2,726	2,180	1,762	1,465	1,286	1,224	1,285
1,5	5,983	4,943	4,068	3,346	2,766	2,321	2,011	1,834	1,797
1,6	7,755	6,542	5,500	4,618	3,887	3,303	2,864	2,571	2,430
1,7	9,562	8,192	6,997	5,967	5,096	4,380	3,811	3,410	3,166
1,8	11,399	9,882	8,544	7,376	6,373	5,531	4,851	4,334	3,989
1,9	13,263	11,607	10,134	8,836	7,708	6,746	5,952	5,330	4,886
2	15,153	13,365	11,763	10,341	9,091	8,014	7,111	6,386	5,847