ISSN 0321 - 4117

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

ВЫПУСК 51 · 1983

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР
КИЕВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Т. Г. ШЕВЧЕНКО

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

РЕСПУБЛИКАНСКИЙ
МЕЖДУВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ СБОРНИК

ОСНОВАН В 1965 г.

ВЫПУСК 51

КИЕВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ КИЕВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ «ВИЩА ШКОЛА»
1983

УДК 518:517.944/947

В сборнике помещены статьи, посвященные приближенным численным и аналитическим методам решения задач математической физики, механики, теории управления, прикладной статистики.

Для математиков, механиков, кибернетиков, научных работников и инженеров, занимающихся практическими методами решения задач физики, техники и их теоретическими исследованиями.

Адрес редакционной коллегии: 252601, ГСП, Киев-17, Владимирская, 64, университет, кафедра вычислительной математики, тел. 66-40-74.

Редакция естественной литературы
Зав. редакцией Б. Н. Фляшников

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Выпуск 51

Редактор Т. В. Шмыговская
Художественный редактор Т. М. Зяблицева
Технический редактор Н. Н. Бабюк
Корректоры М. М. Янчицкая, А. И. Бараз

Информ. бланк № 7154

Сдано в набор 18.02.83. Подп. в печать 23.05.83. БФ 03164. Формат 60×90/16. Бумага типогр. № 3. Лит. гарн. Выс. печать. Усл.-печ. л. 9,0. Усл. кр.-отт. 9,13. Уч.-изд. л. 10,51. Тираж 700 экз. Изд. № 1821-к. Зак. № 3-144. Цена 1 р. 60 к.

Издательство при Киевском государственном университете, 252001, Киев-1, Крещатик, 4.

Киевская книжная типография научной книги, 252004, Киев-4, Репина, 4.

В $\dfrac{1702070000\text{-}132}{\text{М}224(04)\text{-}83}$ 462-83

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

УДК 518.517.944/947

В. М. ЛУЖНЫХ, канд. физ.-мат. наук, Киев. ун-т,
И. Л. МАКАРОВ, канд. физ.-мат. наук, Ин-т механики АН УССР,
Ю. Ю. ХАМРАЕВ, асп., Киев. ун-т

ТОЧНАЯ И УСЕЧЕННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В СЛУЧАЕ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с вырождением возникают в теории нестационарной фильтрации жидкости и газа [6, 7]. Точные и усеченные разностные схемы любого порядка точности были введены А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским в работе [9]. На случай систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка теория точных и усеченных разностных схем была распространена в работах [3, 5[. Для краевых задач и задач на собственные значения с вырождением в скалярном случае точные и усеченные разностные схемы были построены в работах [2, 4]. При этом было показано, что наличие вырождения приводит к понижению порядка точности разностных схем в два раза по сравнению с регулярным случаем.

В настоящей работе строятся точная и усеченные любого порядка точности разностные схемы для краевых задач в случае систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с вырождением. Доказывается, что так же, как и в скалярном случае, порядок точности для усеченных разностных схем m-го ранга понижается и равен $O(h^{m+1})$.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения: $\vec{u}(x)$, $\vec{v}(x)$, $\vec{f}(x)$ — n-мерные векторные функции; $W(x)$, $P(x)$, $Q(x)$ — вещественные матричные функции размерности $n \times n$ с элементами соответственно $W_{ij}(x)$, $P_{ij}(x)$, $Q_{ij}(x)$;

$$\|\vec{u}\| = (\vec{u}, \vec{u})^{1/2}; \quad \|W(x)\|_1 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |W_{ij}(x)|;$$

$$\|W(x)\|_1^* = \max_x \|W(x)\|_1;$$

$V[a, b]$ — гильбертово пространство, полученное как пополнение пространства непрерывно дифференцируемых вектор-функций по норме (см., например, работу [10])

$$\|\vec{v}\|_V = (\vec{v}, \vec{v})_V^{1/2},$$

где

$$(\vec{u}, \vec{v})_{V[a,b]} = \int_a^b [((1 - x^2)\vec{u}', \vec{v}') + (\vec{u}, \vec{v})]\, dx, \quad -1 \leqslant a < b \leqslant 1,$$

и под знаком интеграла стоит обычное скалярное произведение векторов в R_n;

$\overset{0}{V}[a, b]$ — пространство вектор-функций с элементами из $V[a, b]$, которые удовлетворяют условиям

$$\delta(a+1) P(x) \vec{u}'(x)|_{x=a} + \operatorname{sign}(a+1) \vec{u}(a) = 0,$$
$$\delta(b-1) P(x) \vec{u}'(x)|_{x=b} + \operatorname{sign}(1-b) \vec{u}(b) = 0,$$

где

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 1 & \text{при } x = a \\ 0 & \text{при } x \neq a. \end{cases}$$

Сеточные аналоги введенных пространств и норм будем снабжать индексом h, например,

$$\|\vec{v}\|_{V_h} = (\|(1-x^2)^{1/2} \vec{v}_{\bar{x}}\|_h^2 + \|\vec{v}\|_h^2)^{1/2},$$

где

$$\|\vec{v}\|_h = (\vec{v}, \vec{v})_h^{1/2}; \quad (\vec{u}, \vec{v})_h = \sum_{k=1}^{N-1} h\,(\vec{u}_k, \vec{v}_k); \quad \vec{u}_k = \vec{u}(x_k);$$

θ — нуль-матрица, $\vec{0}$ — нуль-вектор, δ_{ij} — символ Кронекера. Через $c_i > 0$ будем обозначать константы, не зависящие от h.

Точная разностная схема. Рассмотрим краевую задачу

$$L^{(P,Q)}\vec{u} \equiv \frac{d}{dx}\left(P(x)\frac{d\vec{u}}{dx}\right) - Q(x)\vec{u} = -\vec{f}(x), \quad -1 < x < 1; \qquad (1)$$

$$\|\vec{u}(-1)\| \neq \infty; \quad \|\vec{u}(1)\| \neq \infty, \qquad (2)$$

где $P(x) = (1-x^2) P_1(x)$, $P_1(x)$, $Q(x)$ — заданные вещественные матрицы размерности $n \times n$; $\vec{f}(x)$ — заданный, а $\vec{u}(x)$ — искомый n-мерный вектор-столбец. Предположим также, что выполнены условия

$$P(x), Q(x) \in L^{\infty}[-1, 1], \quad \vec{f}(x) \in L^2[-1, 1], \qquad (3)$$

где принадлежность матричных функций $P(x)$, $Q(x)$ к пространству $L^{\infty}[-1, 1]$ и вектора $\vec{f}(x)$ к пространству $L^2[-1, 1]$ понимается поэлементно и

$$0 < c_1 E \leqslant P_1(x) \leqslant c_2 E, \quad 0 < c_3 E \leqslant Q(x) \leqslant c_4 E. \qquad (4)$$

Здесь неравенства понимаются в смысле скалярного произведения.

Нетрудно показать, что при выполнении условий (3), (4) в силу теоремы Лакса—Мильграма [8] существует, и притом единственное, решение задачи (1), (2) в пространстве $\overset{0}{V}[-1, 1]$.

Для простоты в дальнейшем все рассуждения будем проводить для равномерной сетки

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = x_0 + ih,\ i = \overline{1, N-1},\ x_0 = -1,\ x_N = 1,\ h = 2N^{-1}\}.$$

Определение 1. Точной трехточечной разностной схемой (ТТРС) для задачи (1), (2) назовем разностную схему вида

$$\vec{y}_i = A_i \vec{y}_{i+1} + B_i \vec{y}_{i-1} + \vec{F}_i, \ i = \overline{1, N-1},$$

$$\| \vec{y}_0 \| \neq \infty, \quad \| \vec{y}_N \| \neq \infty, \tag{5}$$

где матричные коэффициенты A_i, B_i и вектор $\vec{F}_i$ зависят только от коэффициентов исходного дифференциального оператора на отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ и не зависят от решения $\vec{u}(x)$ задачи (1), (2), причем выполняются условия $\vec{y}_i = \vec{u}(x_i)$, $i = \overline{1, N-1}$.

Лемма 1. Если для задачи (1), (2) существует ТТРС вида (5), она единственна.

Доказательство леммы легко проводится от противного.

На сетке $\bar{\omega}_h$ определим шаблонные матричные функции $V_l^i(x)$, $l = \overline{1, 2}$, $i = \overline{1, N-1}$ как решения задач Коши

$$L^{(P,Q)} V_l^i(x) = \theta, \ x_{i-1} < x < x_{i+1}, \ l = \overline{1, 2}, \tag{6}$$

$$V_1^i(x_{i-1}) = \delta_{i1} E, \quad P(x) \frac{dV_1^i}{dx} \bigg|_{x = x_{i-1}} = (1 - \delta_{i1}) E, \ i = \overline{1, N-1}, \tag{7}$$

$$V_2^i(x_{i+1}) = \delta_{iN-1} E, \ P(x) \frac{dV_2^i}{dx} \bigg|_{x = x_{i+1}} (\delta_{iN-1} - 1) E, \tag{8}$$

и векторное решение краевой задачи $\vec{v}_3^i(x)$

$$L^{(P,Q)} \vec{v}_3^i(x) = -\vec{f}(x), \ x_{i-1} < x < x_{i+1},$$

$$\vec{v}_3^i(x_{i-1}) = \vec{v}_3^i(x_{i+1}) = \vec{0}, \quad i = \overline{2, N-2},$$

$$\| \vec{v}_3^1(-1) \| \neq \infty, \quad \vec{v}_3^1(x_2) = \vec{0},$$

$$\| \vec{v}_3^{N-1}(1) \| \neq \infty, \quad \vec{v}_3^{N-1}(x_{N-2}) = \vec{0}. \tag{9}$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть выполнены условия (4) $\forall x \in [-1, 1]$. Тогда шаблонные матричные функции $V_l^i(x)$, $l = \overline{1, 2}$, $i = \overline{1, N-1}$ удовлетворяют условиям

1) $V_l^i(x)$ — невырожденные, т. е. $\det V_l^i(x) \neq 0$, $x_{i-1} < x < x_{i+1}$;

2) $V_l^i(x)$ — линейно независимы, $l = \overline{1, 2}$, $i = \overline{1, N-1}$.

Доказательство первого утверждения леммы проведем для $V_1^i(x)$. Для $V_2^i(x)$ доказательство аналогично. Заметим, прежде всего, что в условиях леммы дифференциальный оператор $-L^{(P,Q)}$ положительно определен относительно скалярного произведения

$$-(L^{(P,Q)}\vec{v}, \vec{v})_{a,b} = \int_a^b \left\{\left(P(x)\frac{d\vec{v}}{dx}, \frac{d\vec{v}}{dx}\right) + (Q(x)\vec{v}, \vec{v})\right\} dx > 0$$

для $\forall \vec{v} \in \overset{0}{V}[a, b], \ -1 \leqslant a < b \leqslant 1$.

Предположим, что $\exists \vec{b} = \vec{0}$, для которого выполняется равенство $V_1^i(x^*)\vec{b} = \vec{0}, \ x^* \in (x_{i-1}, x_{i+1}], \ i = \overline{1, N-1}$. Тогда, представляя решение задачи Коши

$$L^{(P,Q)}\vec{v}_i(x) = \vec{0}, \ x_{i-1} < x < x_{i+1}, \ i = \overline{1, N-1},$$

$$\vec{v}_i(x_{i-1}) = \delta_{i1}\vec{b}_i, \quad P(x)\frac{d\vec{v}_i}{dx} = (1-\delta_{i1})\vec{b}_i, \ (\vec{b}_i \neq \vec{0})$$

в виде $\vec{v}_i(x) = V_1^i(x)\vec{b}_i$, в силу предположения получаем, что $\vec{v}_i(x^*) = \vec{0}, \ \vec{v}_i(x) \not\equiv \vec{0}, \ x_{i-1} < x < x_{i+1}$. Но тогда из равенства $(L^{(P,Q)}\vec{v}_i, \vec{v}_i)_{x_{i-1}x^*} = 0$ следует, что $\vec{v}_i(x) \equiv \vec{0}, \ x_{i-1} < x < x^*$ и, следовательно, $\vec{b}_i = \vec{0}$. Полученное противоречие доказывает первое утверждение леммы.

Второе утверждение леммы легко доказывается от противного.

Лемма 3. Пусть выполнены условия (4) и $P(x) = P^*(x)$, $Q(x) = Q^*(x)$, тогда для задачи (1), (2) существует ТТРС, которая имеет вид

$$\vec{u}_i = V_1^i(x_i)[V_1^i(x_{i+1})]^{-1}\vec{u}_{i+1} + V_2^i(x_i)[V_2^i(x_{i-1})]^{-1}\vec{u}_{i-1} + $$

$$+ \vec{v}_3^i(x_i), \ i = \overline{2, N-2};$$

$$\vec{u}_1 = V_1^1(x_1)[V_1^1(x_2)]^{-1}\vec{u}_2 + \vec{v}_3^1(x_1), \ i = 1;$$

$$\vec{u}_{N-1} = V_2^{N-1}(x_{N-1})[V_2^{N-1}(x_{N-2})]^{-1}\vec{u}_{N-2} + \vec{v}_3^{N-1}(x_{N-1}), \ i = N-1;$$

$$\|\vec{u}_0\| \neq \infty, \quad \|\vec{u}_N\| \neq \infty. \tag{10}$$

Доказательство. Решение уравнения (1) на отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ будем искать в виде

$$\vec{u}(x) = V_1^i(x)\vec{a}_i + V_2^i(x)\vec{b}_i + \vec{v}_3^i(x), \ x \in [x_{i-1}, x_{i+1}], \tag{11}$$

где $V_l^i(x), \ l = \overline{1, 2}$ — решение задачи Коши (6) — (9). Полагая в (11) $x = x_{i-1}$ и $x = x_{i+1}$ $i = \overline{2, N-2}$, находим

$$\vec{a}_i = [V_1^i(x_{i+1})]^{-1}\vec{u}(x_{i+1}), \ \vec{b}_i = [V_2^i(x_{i-1})]^{-1}\vec{u}(x_{i-1}). \tag{12}$$

Из задачи Коши для $V_2^{1*}(x)$ с учетом (6), (7) и самосопряженности матриц $P(x)$, $Q(x)$, используя формулу Грина, легко получить равенство

$$V_2^{1*}(x)P(x)[V_1^1(x)]' - [V_2^{1*}(x)]'P(x)V_1^1(x) = V_1^1(x_2), \quad -1 < x < x_2,$$

где $\|V_1^1(x_2)\| \neq \infty$, $V_1^1(x_2) \neq \theta$.

Это равенство при $x \to -1$ выполняется, если $\|V_2^1(x)\| \to \infty$,

$$\|[V_2^1(x)]'\| \to \infty \text{ или } \|V_2^1(x)\| < \infty, \ \|[V_2^1(x)]'\| \to \infty.$$

В обоих случаях легко доказывается, что $\vec{b}_1 = \vec{0}$. Аналогично можно показать, что $\vec{a}_{N-1} = \vec{0}$. Подставляя найденные значения $\vec{a}_i$ и $\vec{b}_i$ в (11), получаем соотношения (10).

Утверждение леммы 3 остается справедливым и в случае несамосопряженных матриц $P(x)$, $Q(x)$.

Лемма 4. Пусть выполнены условия (4) и $P(x) = P^*(x)$, $Q(x) = Q^*(x)$. Тогда шаблонные матричные функции $V_l^i(x)$, $l = \overline{1, 2}$ обладают свойствами

$$V_1^i(x_{i+1}) = V_2^{i*}(x_{i-1}), \quad i = \overline{2, N-2},$$

$$V_1^{i+1}(x_{i+1}) = V_2^{i*}(x_i), \quad i = \overline{1, N-2},$$

$$(1 - \delta_{i,N-1})V_1^i(x_{i+1}) + \delta_{i,N-1}V_2^{i*}(x_{i-1}) =$$

$$= (1 - \delta_{i1})V_2^{i*}(x_i) + V_2^{i*}(x_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} Q(t)V_1^i(t)\,dt +$$

$$+ (1 - \delta_{i,N-1})V_1^i(x_i) + \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} V_2^{i*}(t)Q(t)\,dt\right)V_1^i(x_i), \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Доказательство леммы 4 проводится с помощью формул Грина аналогично работам [5, 9].

Функцию $v_3^i(x)$ можно представить в виде

$$\vec{v}_3^{\,i}(x) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} G(x, \xi)\vec{f}(\xi)\,d\xi, \quad x \in [x_{i-1}, x_{i+1}], \quad i = \overline{1, N-1}, \tag{13}$$

где $G(x, \xi)$ — функция Грина соответствующей задачи вида (9), причем

$$G(x, \xi) = -\begin{cases} V_1^i(x)[V_1^i(x_{i+1})]^{-1}V_2^i(\xi), & x \leqslant \xi, \\ V_2^i(x)[V_1^{i*}(x_{i+1})]^{-1}V_1^{i*}(\xi), & x \geqslant \xi. \end{cases}$$

Отметим, что матричная функция Грина для операторов типа (9) рассматривалась в работах [1, 5].

Используя свойства шаблонных матричных функций и равенство (13), соотношения (10) можно записать в виде

$$(A\vec{u}_{\bar{x}})_x - D\vec{u} = -\vec{\Phi}(x) + \frac{1}{h}(A^* - A)\vec{u}_{\bar{x}}, \ x \in \omega_h,$$

$$\|\vec{u}_0\| \neq \infty, \quad \|\vec{u}_N\| \neq \infty, \tag{14}$$

где

$$A_1 = A_N = \theta, \ A_i = [h^{-1}V_1^{i*}(x_i)]^{-1}, \ i = \overline{2, N-1},$$

$$D_i = T^i(Q), \ \vec{\Phi}_i = T^i(\vec{f}), \tag{15}$$

$$T^i(W) = [V_2^{i*}(x_i)h]^{-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} V_2^{i*}(t)W(t)\,dt +$$

$$+ [V_1^{i*}(x_i)h]^{-1}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} V_1^{i*}(t)W(t)\,dt.$$

Из этих соотношений следует справедливость такого утверждения.

Лемма 5. Пусть выполнены условия леммы 4 и $V_l^i(x) = V_l^{i*}(x)$, $l = \overline{1, 2}$, $i = \overline{1, N-1}$, тогда ТТРС (14) приводится к дивергентному виду:

$$(A\vec{u}_{\bar{x}})_x - D\vec{u} = -\vec{\Phi}, \ x \in \omega_h.$$

Доказательство очевидно.

Усеченные разностные схемы. Сходимость и точность. При $Q(x) \neq \theta$ коэффициенты ТТРС (14) с помощью квадратур в общем случае не находятся, поэтому будем находить их приближенно, аналогично работам [4, 5]. Для этого в точке x_i введем местную систему координат по формулам $x = x_i + sh$, $s = x - x_i/h$. Тогда отрезок $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ перейдет в $[-1, 1]$.

Полагая

$$V_1^i(x) = V_1^i(x_i + sh) = \begin{cases} h\alpha^i(s, h), & i = \overline{2, N}, \\ \alpha^1(s, h), & i = 1, \end{cases}$$

$$V_2^i(x) = V_2^i(x_i + sh) = \begin{cases} h\beta^i(s, h), & i = \overline{1, N-1}, \\ \beta^N(s, h), & i = N, \end{cases}$$

для матричных функций $\alpha^i(s, h)$, $\beta^i(s, h)$ получим задачи Коши

$$\frac{d}{ds}\left(\tilde{P}(s)\frac{d\alpha^i(s, h)}{ds}\right) - h^2\tilde{Q}(s)\alpha^i(s, h) = \theta, \ -1 < s < 1, \tag{16}$$

$$\alpha^i(-1, h) = \delta_{i1}E, \ \tilde{P}(s)\frac{d\alpha^i(s, h)}{ds}\bigg|_{s=-1} = (1 - \delta_{i1})E, \ i = \overline{1, N-1},$$

$$\frac{d}{ds}\left(\tilde{P}(s)\frac{d\beta^i(s, h)}{ds}\right) - h^2\tilde{Q}(s)\beta^i(s, h) = \theta, \ -1 < s < 1, \tag{17}$$

$$\beta^i(1, h) = \delta_{i,N-1}E, \ \tilde{P}(s)\frac{d\beta^i(s, h)}{ds}\bigg|_{s=1} = (\delta_{i,N-1} - 1)E, \ i = \overline{1, N-1},$$

где принято обозначение $\tilde{W}(s) = W(x_i + sh)$.

Тогда коэффициенты ТТРС выразятся через шаблонные функции $\alpha^i(s, h)$, $\beta^i(s, h)$ следующим образом:

$$A_1 = A_N = \theta, \; A_i = [\alpha^i(0, h)]^{-1},$$

$$D_i = A_i^* \int_{-1}^{0} \alpha^{i^*}(\xi, h) \widetilde{Q}(\xi)\, d\xi + A_{i+1}^* \int_{0}^{1} \beta^{i^*}(\xi, h) \widetilde{Q}(\xi)\, d\xi,$$

$$\vec{\Phi}_i = A_i^* \int_{-1}^{0} \alpha^{i^*}(\xi, h) \vec{\tilde{f}}(\xi)\, d\xi + A_{i+1}^* \int_{0}^{1} \beta^{i^*}(\xi, h) \vec{\tilde{f}}(\xi)\, d\xi, \; i = \overline{1, N-1}. \quad (18)$$

Решение задачи Коши (16), (17) будем искать в виде

$$\alpha^i(s, h) = \sum_{k=0}^{\infty} h^{2k} \alpha_k^i(s), \quad \beta^i(s, h) = \sum_{k=0}^{\infty} h^{2k} \beta_k^i(s),$$

где матрицы $\alpha_k^i(s)$, $\beta_k^i(s)$ определяются по рекуррентным формулам

$$\alpha_0^i(s) = \int_{-1}^{s} \widetilde{P}^{-1}(\xi)\, d\xi, \; i = \overline{2, N-1}, \; \alpha_0^1(s) \equiv E,$$

$$\alpha_k^i(s) = \int_{-1}^{s} \widetilde{P}^{-1}(\xi) \int_{-1}^{\xi} \widetilde{Q}(t)\, \alpha_{k-1}^i(t)\, dt d\xi, \; i = \overline{1, N-1}, \; k = 1, 2, \ldots;$$

$$\beta_0^i(s) = \int_{s}^{1} \widetilde{P}^{-1}(\xi)\, d\xi, \; i = \overline{1, N-2}, \; \beta_0^{N-1}(s) \equiv E,$$

$$\beta_k^i(s) = \int_{s}^{1} \widetilde{P}^{-1}(\xi) \int_{\xi}^{1} \widetilde{Q}(t)\, \beta_{k-1}^i(t)\, dt d\xi, \; i = \overline{1, N-1}, \; k = 1, 2, \ldots .$$

Если в формулах (18) вместо шаблонных функций $\alpha^i(s, h)$, $\beta^i(s, h)$ подставить полиномы

$$P_{i1}^{(m)}(s, h) = \sum_{k=0}^{m} h^{2k} \alpha_k^i(s), \quad P_{i2}^{(m)}(s, h) = \sum_{k=0}^{m} h^{2k} \beta_k^i(s), \quad (19)$$

то придем к усеченной разностной схеме m-го ранга

$$(A^{(m)} \vec{y}_{\bar{x}})_x - D^{(m)} \vec{y} = -\vec{\Phi}^{(m)} + \frac{1}{h} (A^{(m)*} - A^{(m)}) \vec{y}_{\bar{x}}, \; x \in \omega_h, \quad (20)$$

$$\| \vec{y}_0 \| \neq \infty, \; \| \vec{y}_N \| \neq \infty,$$

где

$$A_1^{(m)} = A_N^{(m)} = \theta, \; A_i^{(m)} = [P_{i1}^{(m)}(0, h)]^{-1},$$

$$D_i^{(m)} = A_i^{(m)*} \int_{-1}^{0} P_{i1}^{(m)}(\xi, h) \widetilde{Q}(\xi)\, d\xi + A_{i+1}^{(m)*} \int_{0}^{1} P_{i2}^{(m)}(\xi, h) \widetilde{Q}(\xi)\, d\xi,$$

$$\vec{\Phi}_i^{(m)} = A_i^{(m)*} \int_{-1}^{0} P_{i1}^{(m)}(\xi, h) \vec{\tilde{f}}(\xi)\, d\xi + A_{i+1}^{(m)*} \int_{0}^{1} P_{i2}^{(m)}(\xi, h) \vec{\tilde{f}}(\xi)\, d\xi, \; i = \overline{1, N-1}.$$

(21)

Изучим свойства шаблонных матричных функций $\alpha^i(s, h)$, $\beta^i(s, h)$, $\alpha_k^i(s)$, $\beta_k^i(s)$. Для краткости изложения в дальнейшем доказательство будем проводить только для матричных функций $\alpha^i(s, h)$, $\alpha_k^i(s)$. Свойства $\beta^i(s, h)$, $\beta_k^i(s)$ доказываются аналогично.

Лемма 6. Пусть выполнены условия (4). Тогда при достаточно малом h имеют место оценки

$$c_6(1-x_{l_1}^2)^{-1} \leqslant \| \alpha^i(s, h) \|_1 \leqslant c_7(1-x_l^2)^{-1}, \tag{22}$$

$$c_6(1-x_{l_1}^2)^{-1} \leqslant \| P_{i1}^{(m)}(s, h) \|_1 \leqslant c_7(1-x_l^2)^{-1}, \tag{23}$$

$$c_8(1-x_l^2) \leqslant \| [\alpha^i(0, h)]^{-1} \|_1 \leqslant c_9(1-x_{l_1}^2), \tag{24}$$

$$c_8(1-x_l^2) \leqslant \| [P_{i1}^{(m)}(0, h)]^{-1} \|_1 \leqslant c_9(1-x_{l_1}^2). \tag{25}$$

Доказательство. В силу (4) из соотношений

$$c_2^{-1} \| \vec{y} \|^2 (1-x_{l_1}^2)^{-1} \leqslant (\alpha_0^i(s)\vec{y}, \vec{y}) = \int_{-1}^{s} \frac{(\widetilde{P}_1^{-1}(\eta)\vec{y}, \vec{y})}{1-(x_i+\eta h)^2}\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant c_1^{-1} \| \vec{y} \|^2 (1-x_l^2)^{-1},$$

где

$$l = \begin{cases} i-1 & \text{при } x<0, \\ i & \text{при } x>0; \end{cases} \quad l_1 = \begin{cases} i & \text{при } x<0, \\ i-1 & \text{при } x>0, \end{cases}$$

следует, что

$$c_2^{-1}(1-x_{l_1}^2)^{-1}E \leqslant \alpha_0^i(s) \leqslant c_1^{-1}(1-x_l^2)^{-1}E, \ i=\overline{2, N-1}.$$

Тогда

$$\| \alpha_1^i(s) \|_1 = \left\| \int_{-1}^{s} \widetilde{P}^{-1}(\eta) \int_{-1}^{\eta} \widetilde{Q}(t)\, \alpha_0^i(t)\, dt d\eta \right\|_1 \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-1}^{s} \frac{\| \widetilde{P}_1^{-1}(\eta) \|_1}{1-(x_i+\eta h)^2} \int_{-1}^{\eta} \| \widetilde{Q}(t) \|_1 \| \alpha_0^i(t) \|_1\, dt d\eta \leqslant \| \alpha_0^i \|_1^* M_{i1}(0),$$

где

$$M_{i1}(0) = c_5 \int_{-1}^{0} \frac{\eta+1}{1-(x_i+\eta h)^2}\, d\eta, \quad c_5 = \frac{c_4}{c_1}.$$

С помощью индукции легко показывается, что

$$\| \alpha_k^i(s) \|_1 \leqslant \| \alpha_0^i \|_1^* M_{i1}^k(0), \ i=\overline{1, N-1}, \ \| \alpha_0^1(s) \|_1 \equiv 1.$$

Пользуясь тем, что $0 < M_{i1}(0) < c_6/h$ [4], и энергетической эквивалентностью норм матрицы, имеем

$$\| \alpha_0^i \|_1^* \leqslant c_{10}(1-x_l^2)^{-1}, \ c_{10} = c_4\gamma_2 c_1^{-1};$$

$$\| \alpha_0^i \|_1 \geqslant c_{11}(1-x_{l_1}^2)^{-1}, \ c_{11} = c_3\gamma_1 c_2^{-1};$$

поэтому

$$\| \alpha_k^i (s) \|_1 \leqslant c_{12} (1 - x_l^2)^{-1} M_{i1}^k (0),$$

где γ_1 и γ_2 — константы эквивалентности норм. При достаточно малом h имеем $0 < \nu = M_{i1} (s) h^2 < 1$ и

$$\| \alpha^i (s, h) \|_1 = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} h^{2k} \alpha_k^i (s) \right\|_1 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \| \alpha_k^i (s) \|_1 h^{2k} \leqslant$$

$$\leqslant \| \alpha_0^i \|_1^* \sum_{k=0}^{\infty} h^{2k} M_{i1}^k (0) = \frac{1}{1 - \nu} \| \alpha_0^i \|_1^* \leqslant c_7 (1 - x_l^2)^{-1}.$$

Для получения оценки снизу поступим следующим образом:

$$\| \alpha^i (s, h) \|_1 = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} h^{2k} \alpha_k^i (s) \right\|_1 \geqslant \| \alpha_0^i \|_1 - \| \alpha_0^i \|_1^* \sum_{k=1}^{\infty} h^{2k} M_{i1}^k (0) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\gamma_1}{c_2} (1 - x_{l_1}^2)^{-1} \left[1 - \frac{c_4 c_2 \gamma_2}{c_1^2} \frac{1 - x_{l_1}^2}{1 - x_l^2} \frac{h}{1 - h} \right].$$

Пусть $\varepsilon > 0$ такое, что $1 - x_l^2 - \varepsilon > 0$, тогда h выберем так, чтобы выполнялось неравенство

$$0 < \varepsilon < 1 - \frac{c_4 c_2 \gamma_2}{c_1^2} \frac{1 - x_{l_1}^2}{1 - x_l^2} \frac{h}{1 - h} < 1.$$

Это можно сделать, так как последнее неравенство будет выполняться при всех $h < h_0$, где

$$h_0 = c_{13} \frac{1 - x_l^2 - \varepsilon}{1 - x_{l_1}^2} > 0.$$

Аналогично доказываются неравенства (23). Верхняя оценка в (24) следует из того, что при достаточно малом $h \alpha^i (0, h) \sim \alpha^i (0)$, и из известной теоремы об оценке обратного оператора.

Для получения оценки снизу в (24) воспользуемся неравенством

$$\| [\alpha^i (0, h)]^{-1} \|_1 \geqslant \| \alpha^i (0, h) \|_1^{-1}$$

и верхней оценкой в (22). Если обозначить

$$\Omega_{i1}^{(m+1)} (s, h) = \sum_{k=0}^{\infty} h^{2k} \alpha_{k+m+1}^i (s) = \alpha^i (s, h) - P_{i1}^{(m)} (s, h),$$

то для $\Omega_{i1}^{(m+1)} (s, h)$ имеем оценку

$$\| \Omega^{(m+1)} (s, h) \|_1 = \begin{cases} c_{14} (1 - x_l^2)^{-1} h^{m+1}, & i = \overline{2, N-1}, \\ c_{15} h^{m+1}, & i = 1. \end{cases} \tag{26}$$

Лемма 7. Пусть выполнены условия леммы 4. Тогда при достаточно малом h имеют место неравенства

$$(D^{(m)}\vec{v}, \vec{v})_h + (A^{(m)}\vec{v}_{\bar{x}}, \vec{v}_{\bar{x}}]_h \geqslant c_{16} (\| (1 - x^2)^{1/2} \vec{v}_{\bar{x}}] |_h^2 + \| \vec{v} \|_h^2); \tag{27}$$

$$((A^{(m)} - A^{(m)*}) \vec{u}_{\bar{x}}, \vec{v})_h \leqslant c_{17} h \| (1 - x^2)^{1/2} \vec{u}_{\bar{x}}] |_h \| \vec{v} \|_h; \tag{28}$$

$$\| D - D^{(m)} \|_1 \leqslant c_{18} h^{m+1}, \ \| \vec{\Phi} - \vec{\Phi}^{(m)} \|_1 \leqslant c_{13} h^{m+1}. \tag{29}$$

Если потребовать дополнительно, чтобы матрицы $P(x)$ и $Q(x)$ были Липшиц-непрерывны, то

$$((A^{(m)} - A^{(m)*}) \vec{u}_{\bar{x}}, \vec{v})_h \leqslant c_{20} h^2 \| (1 - x^2)^{1/2} \vec{u}_{\bar{x}}] |_h \| \vec{v} \|_h. \tag{30}$$

Доказательство. Неравенство (27) следует из того, что

$$D^{(m)}(0) = \widetilde{Q}(0) + c_1 h, \ \| c_1 \| \neq \infty \ \text{ и } \ A^{(m)}_{(x)} = P(x) + ch,$$

$| c \| \neq \infty$, поскольку при $h < h_0$, где $h_0 = \min \left\{ \frac{\nu_3 - c_3}{\| c_1 \|}, \ \frac{c_1}{\| c \|} \right\}$, $\nu_3 > 0$ выполняется

$$(A^{(m)}\vec{v}_{\bar{x}}, \vec{v}_{\bar{x}}]_h \geqslant c_1 \| (1 - x^2)^{1/2} \vec{v}_{\bar{x}}] |_2^h - \| c \| h \| (1 - x^2)^{1/2} v_{\bar{x}}] |_h^2 \geqslant$$

$$\geqslant c_{18} \| (1 - X^2)^{1/2} \vec{v}_{\bar{x}}] |_h^2 .$$

Следовательно,

$$(A^{(m)}\vec{v}_{\bar{x}}, \vec{v}_{\bar{x}}]_h + (D^{(m)}\vec{v}, \vec{v})_h \geqslant c_{16} (\| (1 - x^2)^{1/2} \vec{v}_{\bar{x}}] |_h^2 + \| \vec{v} \|_h^2),$$

где $c_{16} = \min \{ c_1 - \| c \| h, \nu_3 \}$.

Поскольку $| A^{(m)} - A^{(m)*} \|_1 \leqslant c_{19} h (1 - x_i^2)$, то $\| (A^{(m)} - A^{(m)*}) \vec{u}_{\bar{x}} \|_h \leqslant$ $\leqslant c_{20} h \| (1 - x^2)^{1/2} \vec{u}_{\bar{x}}] |_h$, отсюда следует неравенство (28).

Оценки (29) легко получаются с учетом неравенств (22) — (26).

Из представления

$$A_i^{(m)} - A_i^{(m)*} = A_i^{(m)} [P_{i1}^{(m)*}(0, h) - P_{i1}^{(m)}(0, h)] A_i^{(m)*}$$

и равенства

$$\| P_{i1}^{(m)*}(0, h) - P_{i1}^{(m)}(0, h) \|_1 = \Bigg\| \int_{-1}^{0} \int_{-1}^{\xi_1} \dots \int_{-1}^{\xi_{2m}} \widetilde{P}^{-1}(\xi_1) \dots \widetilde{Q}(\xi_{2m-2}) \dots$$

$$\dots \widetilde{P}^{-1}(\xi_{2m}) - \widetilde{P}^{-1}(\xi_{2m}) \widetilde{Q}(\xi_{2m-1}) \dots \widetilde{Q}(\xi_2) \widetilde{P}^{-1}(\xi_1) \, d\xi_{2m} \dots d\xi_1 \Bigg\|_1,$$

используя Липшиц-непрерывность матриц $P(x)$ и $Q(x)$, получаем

$$\| A_i^{(m)} - A_i^{(m)*} \|_1 \leqslant c_{21} h^2 (1 - x_{i_1}^2). \tag{31}$$

Аналогично предыдущему находим

$$((A_i^{(m)} - A_i^{(m)*})\,\vec{u}_{\bar{x}},\,\vec{v})_h \leqslant c_{21}h^2\,\|(1-x^2)^1$$

Неравенство (30) доказано.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть выполнены условия леммы 4 и матрицы $P(x)$, $Q(x)$ Липшиц-непрерывны. Тогда при достаточно малых h усеченная разностная схема m-го ранга (20) имеет точность $O(h^{m+1})$, т. е. справедливы неравенства

$$\|\vec{y} - \vec{u}\|_{V_h} \leqslant c_{22}h^{m+1}\,\|\vec{u}\|_{V_h}.$$

Доказательство. Для погрешности $\vec{z} = \vec{y} - \vec{u}$ имеем задачу

$$(A^{(m)}\vec{z}_{\bar{x}})_x - D^{(m)}\vec{z} + \frac{1}{h}\,(A^{(m)} - A^{(m)*})\,\vec{z}_{\bar{x}} =$$

$$= \vec{\Phi} - \vec{\Phi}^{(m)} + ((A - A^{(m)})\,\vec{u}_{\bar{x}})_x + (D^{(m)} - D)\,\vec{u} +$$

$$+ \frac{1}{h}\,(A - A^{(m)} + A^{(m)*} - A^*)\,\vec{u}_{\bar{x}},\quad \|\vec{z}_0\| \neq \infty,\ \|\vec{z}_N\| \neq \infty,$$

$$A_1^{(m)} = A_N^{(m)} = \theta. \tag{32}$$

Скалярно умножив (32) на $\vec{z}$, использовав разностные формулы Грина и применив неравенство Коши—Буняковского с учетом оценок (27), (29), (30) методом энергетических неравенств получим

$$\|\vec{z}\|_{V_h} \leqslant C_{23}h^{m+1}\,\|\vec{u}\|_{V_h}.$$

Полученные результаты остаются справедливыми для произвольных неравномерных сеток.

1. *Авдеев А. Д.* О матричных дифференциальных уравнениях второго порядка.— Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 4, с. 577—591. 2. *Лужных В. М.* Разностные схемы для некоторых дифференциальных операторов с особенностями. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Киев, 1980. 115 с. 3. *Макаров И. Л.* Разностные схемы любого порядка точности для задачи Штурма — Лиувилля для систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.— В кн.: Труды II Респ. конф. молодых ученых по механике. Киев, 1979, с. 129—132. 4. *Макаров В. Л., Гаврилюк И. П., Лужных В. М.* Точная и усеченная разностные схемы для одного класса задач Штурма—Лиувилля с вырождением.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 7, с. 1265—1275. 5. *Макаров В. Л., Макаров И. Л., Приказчиков В. Г.* Точные разностные схемы и схемы любого порядка точности для систем дифференциальных уравнений второго порядка.— Дифференц. уравнения, 1979, т. 15, № 7, с. 1194—1205. 6. *Мукидинов Н.* Газогидродинамические исследования нелинейной фильтрации жидкости и газа. Ташкент: Фан, 1977. 152 с. 7. *Мухидинов Н.* Методы расчета показателей разработки многопластовых месторождений нефти и газа. Ташкент: Фан, 1978. 117 с. 8. *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1977. 383 с. 9. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Об однородных разностных схемах.—Докл. АН СССР, 1960, т. 131, № 3, с. 514—517. 10. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 496 с.

Поступила в редколлегию 26.05.82

УДК 517.544

А. А. КАПШИВЫЙ, канд. физ.-мат. наук, Киев. ун-т,
И. В. ЧЕРНЫЙ, ст. преп., Брянск. технол. ин-т

ЗАДАЧИ О КОМПЛЕКСНОМ x-АНАЛИТИЧЕСКОМ ПОТЕНЦИАЛЕ СИСТЕМЫ КОЛЬЦЕВЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ДИСКОВ

Осесимметричные задачи о потенциале одного кольцевого сферического диска рассматривались в статье [10]. В настоящей работе рассматриваются задачи о комплексном x-аналитическом потенциале системы концентрических кольцевых сферических дисков, когда на поверхностях дисков заданы граничные значения потенциальной функции или функции тока. На основании аппаратных свойств основного интегрального представления x-аналитических функций [2, 6] и методики работы [4] решение обеих задач сведено к решению системы интегральных уравнений второго рода. Заметим, что ранее осесимметричные задачи о потенциале двух сферических дисков исследовались различными методами в работах [3, 5, 8, 9], а в более общей постановке, как задачи о комплексном x-аналитическом потенциале системы концентрических сферических дисков — в статье [1].

Пусть G — правая полуплоскость $z=x+iy$ с разрезами вдоль дуг $C_j=\{z=R_je^{i\theta};\ -\pi/2<\alpha_j\leqslant\theta\leqslant\beta_j<\pi/2;\ \ \alpha_j<\beta_j\}$ $(j=\overline{1,n})$ концентрических окружностей. Предполагаем, что $R_1>R_2>\ldots>R_n$. Через G_1 обозначим правую полуплоскость $z=x+iy$ с разрезами вдоль дуг $C_j^{(1)}=\{z=R_je^{i\theta};\ \alpha_j\leqslant\theta\leqslant\pi/2\}$ $(j=\overline{1,n})$.

Задача 1. Требуется определить функцию $\tilde f(z)=\tilde u(x,y)+i\tilde v(x,y)$, x-аналитическую в G, непрерывную на границе и удовлетворяющую краевым условиям

$$\tilde v(0,y)=0\quad(-\infty<y<\infty),\tag{1}$$

$$\tilde u^+|_{C_j}=\Phi_j(\theta),\quad \tilde u^-|_{C_j}=\Psi_i(\theta)\quad(\alpha_j\leqslant\theta\leqslant\beta_j),\quad j=\overline{1,n}.\tag{2}$$

Здесь $\Phi_j(\theta)$, $\Psi_j(\theta)$ — известные функции от θ, ограниченные при подходе к точкам $\theta=\alpha_j$, $\theta=\beta_j$ и удовлетворяющие условиям

$$\Phi_j(\alpha_j)=\Psi_j(\alpha_j),\quad \Phi_j(\beta_j)=\Psi_j(\beta_j).\tag{3}$$

Решение задачи (1), (2) с помощью основного интегрального представления x-аналитических функций [6] ищем в виде

$$\tilde f(z)=\mathrm{Re}\int_\Gamma f(\zeta)\,[(z-\zeta)(\bar z+\zeta)]^{-1/2}d\zeta+$$
$$+i\,\mathrm{Im}\int_\Gamma f(\zeta)\,(\zeta-iy)\,[(z-\zeta)(\bar z+\zeta)]^{-1/2}d\zeta,\tag{4}$$

где Γ —контур в G_1, соединяющий произвольную (нефиксированную) точку оси $0y$ на участке $(R_1\leqslant y<\infty)$ с точкой $z=x+iy$; $f(z)$ — функция, аналитическая в G_1, причем $\mathrm{Im}\,f(z)|_{x=0}=0$, а на бесконечности $f(z)$ регулярна и имеет нуль не ниже первого порядка; $\arg(z-\zeta)(\overline{z}+\zeta)$ в начальной точке контура Γ равен нулю.

Введем обозначения:

$$\omega_j(t) = f^+(t) - f^-(t) =$$
$$= \begin{cases} [\lambda_j^{(1)}(\theta) + i\mu_j^{(1)}(\theta)]\, e^{-i(\theta+\pi/2)/2}, & (\beta_j \leqslant \theta \leqslant \pi/2), \\ [\lambda_j(\theta) + i\mu_j(\theta)]\, e^{-i(\theta+\pi/2)/2}, & (\alpha_j \leqslant \theta \leqslant \beta_j), \\ & j = \overline{1, n}, \end{cases} \tag{5}$$

где $t = R_j e^{i\theta} \in C_j^{(1)}$, а индексами «+» и «—» обозначены граничные значения функции $f(z)$ соответственно на левом и на правом краях разреза $C_j^{(1)}$.

Из равенств $\tilde{f}^+(t) - \tilde{f}^-(t) = 0$ $(t = R_j e^{i\theta},\ \beta_j \leqslant \theta \leqslant \pi/2,\ j = \overline{1, n})$ с помощью интегральных представлений скачков x-аналитической функции $\tilde{f}(z)$ вдоль разрезов $C_j^{(1)}$ [1, 2] и решения интегрального уравнения типа Абеля [6] получаем

$$\lambda_j^{(1)}(\theta) = -\frac{2}{\pi}\frac{\cos\theta}{\sqrt{2\sin\theta - 2\sin\beta_j}}\int\limits_{\alpha_j}^{\beta_j}\frac{\sqrt{2\sin\beta_j - 2\sin\varphi}}{2\sin\theta - 2\sin\varphi}\lambda_j(\varphi)\,d\varphi, \tag{6}$$

$$\mu_j^{(1)}(\theta) = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\sin\theta - 2\sin\beta_j}}\int\limits_{\alpha_j}^{\beta_j}\frac{\cos\varphi\sqrt{2\sin\beta_j - 2\sin\varphi}}{2\sin\theta - 2\sin\varphi}\mu_j(\varphi)\,d\varphi +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\sin\theta - 2\sin\beta_j}}\int\limits_{\alpha_j}^{\beta_j}\sqrt{2\sin\beta_j - 2\sin\varphi}\,\lambda_j(\varphi)\,d\varphi. \tag{7}$$

Из равенств (6), (7) следует, что

$$\int\limits_{\alpha_j}^{\beta_j}\frac{\lambda_j(\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{2\sin\beta_j - 2\sin\varphi}} = 0, \tag{8}$$

$$\int\limits_{\alpha_j}^{\beta_j}\frac{2\cos\varphi\,\mu_j(\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{2\sin\beta_j - 2\sin\varphi}} - \int\limits_{\alpha_j}^{\beta_j}\sqrt{2\sin\beta_j - 2\sin\varphi}\,\lambda_j(\varphi)\,d\varphi = 0. \tag{9}$$

В соответствии с работой [2] интегральное представление (4) запишем в виде

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{2}\Bigg[\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{C_j^{(1)}}\frac{\omega_j(\zeta)\,d\zeta}{\sqrt{(z-\zeta)(\overline{z}+\zeta)}} +$$
$$+ i\Bigg(\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{C_j^{(1)}}\frac{(\zeta - iy)\,\omega_j(\zeta)\,d\zeta}{\sqrt{(z-\zeta)(\overline{z}+\zeta)}} + D\Bigg)\Bigg], \tag{10}$$

где $D = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n} \int_{C_j^{(1)}} \omega_j(\xi)\, d\zeta$; $\arg(z-\zeta)(\bar{z}+\zeta)$ в начальной точке дуги $C_j^{(1)}$ (в точке $\zeta = R_j e^{i\pi/2}$) равен нулю.

Для граничных значений $\tilde{u}^{+}(t)$ и $\tilde{u}^{-}(t)$ действительной части x-аналитической функции $\tilde{f}(z)$, определенной равенством (10), при подходе к контуру C_i справедливы интегральные представления

$$\tilde{u}^{\pm}(t) = \frac{1}{2}\Big[-\int_{\pi/2}^{\beta_j} \operatorname{Re}\{\omega_j(\zeta)\, e^{i(\varphi-\pi/2)/2}\}(2\sin\varphi - 2\sin\theta)^{-1/2}\, d\varphi -$$

$$-\int_{\beta_j}^{\theta} \operatorname{Re}\{\omega_j(\zeta)\, e^{i(\varphi-\pi/2)/2}\}(2\sin\varphi - 2\sin\theta)^{-1/2}\, d\varphi \mp$$

$$\mp \int_{\alpha_j}^{\theta} \operatorname{Re}\{\omega_j(\zeta)\, e^{i(\varphi+\pi/2)/2}\}(2\sin\theta - 2\sin\varphi)^{-1/2} d\varphi\Big] + \tag{11}$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{Re}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \int_{C_k^{(1)}} \omega_k(\zeta)\,[(t-\zeta)(\bar{t}+\zeta)]^{-1/2}\, d\zeta, \quad (t = R_j e^{i\theta}, \quad \alpha_j \leqslant \theta \leqslant \beta_j).$$

С помощью интегральных представлений (11) и решения интегрального уравнения типа Абеля [6] из краевых условий (2) находим

$$\lambda_j(\theta) = -\frac{2}{\pi}\,\frac{d}{d\theta}\int_{\alpha_j}^{\theta} \frac{\Phi_j(\varphi) - \Psi_j(\varphi)}{\sqrt{2\sin\theta - 2\sin\varphi}} \cos\varphi\, d\varphi, \quad j = \overline{1,n}, \tag{12}$$

а для определения $\mu_j(\theta)$, $j = \overline{1,n}$ с учетом равенств (6) — (8) получаем систему интегральных уравнений второго рода

$$(\sin\beta_j - \sin\theta)\,\tilde{\mu}_j(\theta) + \frac{1}{\pi^2}\int_{\alpha_j}^{\beta_j} K_j(\theta,\varphi)\,\tilde{\mu}_j(\varphi)\, d\varphi +$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\int_{\alpha_k}^{\beta_k} M_{jk}(\theta,\varphi)\,\tilde{\mu}_k(\varphi)\, d\varphi = q(\theta) + \frac{\sqrt{2\sin\beta_j - 2\sin\theta}}{\pi} \times$$

$$\times \frac{d}{d\theta}\int_{\alpha_j}^{\beta_j} \frac{\Phi_j(\varphi) + \Psi_j(\varphi)}{\sqrt{2\sin\varphi - 2\sin\theta}} \cos\varphi\, d\varphi, \quad (j = \overline{1,n}), \tag{13}$$