ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

А. И. КАРАСЕВ
З. М. АКСЮТИНА Т. И. САВЕЛЬЕВА

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ВУЗОВ

А. И. КАРАСЕВ,
З. М. АКСЮТИНА, Т.

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ВУЗОВ

Часть I

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов
экономических специальностей вузов

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1982

ББК 22.11
К21
УДК 516/517

Рецензенты:
кафедра высшей математики
Ленинградского финансово-экономического института;
д-р физ.-мат. наук, проф. Н. Я. Виленкин

Карасев А. И., Аксютина З. М., Савельева Т. И.
К21 Курс высшей математики для экономических вузов. Ч. I. Основы высшей математики: Учеб. пособие для студентов вузов. — М.: Высш. школа, 1982. — 272 с., ил.
В пер.: 70 к.

Содержание части I охватывает следующие разделы: элементы векторной алгебры и аналитической геометрии; введение в анализ; дифференциальное исчисление; интегральное исчисление; дифференциальные уравнения; ряды. Материал изложен доступно, с привлечением для иллюстрации основных теоретических положений большого числа примеров. К каждой главе даны упражнения для самостоятельной работы.
Предназначается для студентов экономических специальностей вузов.

К $\frac{1702050000-167}{001(01)-82}$ 34—82

ББК 22.11
517

Анатолий Иванович Карасев, Зинаида Марковна Аксютина, Тамара Ивановна Савельева

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

для экономических вузов

ЧАСТЬ I

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Зав. редакцией Е. С. Гридасова. Редактор А. М. Суходский
Мл. редакторы: С. А. Доровских, Н. Г. Закалюкина, Н. П. Майкова
Художественный редактор В. И. Пономаренко
Технический редактор Э. М. Чижевский
Корректор Г. И. Кострикова

ИБ № 3679

Изд. № ФМ-658а. Сдано в набор 20.10.81. Подп. к печати 09.03.82.
Формат 60×90/16. Бум. тип. № 3. Гарнитура литературная. Печать высокая.
Объем 17 усл. п. л. Усл. кр.-отт. 17. 16,45 уч. изд. л. Тираж 50 000 экз.
Заказ № 522. Цена 70 коп.

Издательство «Высшая школа», Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
129041, Москва, Б. Переяславская ул., д. 46

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга предназначена для студентов экономических специальностей высших учебных заведений, в первую очередь для студентов-заочников, подавляющая часть которых имеет перерыв в учебе после получения среднего образования.

Студенты, окончившие средние школы в 1977 г. и в последующие годы, изучали математику по новой программе. Они знакомы с аналитической геометрией и началами математического анализа — традиционными разделами математики, изучаемыми на первом курсе высших учебных заведений. Но в вузы, и особенно на заочные и вечерние отделения, еще не один год будет поступать значительная часть студентов, изучавших математику в школе по старой программе. Поэтому необходимы учебники и учебные пособия, в которых был бы изложен весь тот материал, который нужен студентам соответствующих специальностей независимо от того, по какой программе они изучали математику в школе.

Именно такого типа учебным пособием и является предлагаемая книга. Поэтому одни студенты должны изучать весь материал книги, другие — иметь возможность повторить пройденное ранее, но в том аспекте, который требуется для студентов соответствующей специальности вуза. В последнем случае некоторые главы предлагаемой книги смогут служить для них справочником.

Учитывая назначение книги, авторы стремились по возможности упростить изложение теоретического материала, используя для этого в значительной мере интуицию и привлекая для иллюстрации большое количество решенных примеров и задач. Кроме того, в конце каждой главы содержится значительное количество упражнений.

Содержание книги соответствует действующей программе по высшей математике для экономических специальностей вузов. Однако изложение программного материала несколько отличается от традиционного.

Во Введении даны понятия теории множеств и логики, которые затем используются в книге.

Изложение векторной алгебры начинается с n-мерных векторов, имеющих широкое приложение в экономике. Геометрические векторы вводятся как удобная геометрическая интерпретация двумерных и трехмерных векторов, которая используется в дальнейшем в аналитической геометрии. Рассматривается только евклидово векторное пространство. Векторное и смешанное произведения векторов не вводятся, так как они практически не используются в приложениях математики в экономике.

Аналитическая геометрия излагается на базе векторной алгебры. После введения понятий поверхности и линии рассматриваются прямая и плоскость в пространстве, а прямая на плоскости вводится как частный случай прямой в пространстве.

Уравнения кривых второго порядка в каноническом виде не даются, а рассматриваются так, как они используются в экономике: в виде обратной пропорциональной зависимости, уравнения квадратного трехчлена и дробно-линейной функции.

Во введении в анализ сначала дается понятие непрерывности как интуитивно более знакомое, а затем понятие предела функции (подобно тому, как это сделано в книге О. С. Ивашева-Мусатова «Начала математического анализа» (М., Наука, 1976) и некоторых других книгах). Такой порядок изложения, по нашему мнению, упрощает усвоение основных понятий анализа и доказательства теорем.

Для удобства пользования книгой в ней приняты следующие обозначения: начало и конец доказательства теоремы или утверждения отмечаются соответственно значками □ и ■: аналогично, начало и конец решения примера — соответственно значками △ и ▲.

Разделы I—III ч. 1 написаны доц. З. М. Аксютиной (при написании Введения, § 7 и 8 гл. 1, а также гл. 7 и 8 использованы материалы доц. Э. Л. Торчинской). Разделы IV—VI ч. 1 и разделы I—III ч. 2 написаны проф. А. И. Карасевым, а раздел IV ч. 2 — доц. Т. И. Савельевой.

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

В данном курсе используются некоторые понятия теории множеств и логики, которые мы здесь кратко изложим.

Некоторые сведения о множествах. Термин *множество* применяется для обозначения совокупности, собрания, системы объектов, называемых *элементами множества*. Например, можно говорить о множестве государств Европы, множестве станков в цехе, множестве студентов в группе, множестве точек отрезка прямой, множестве всех натуральных чисел и т. п.

В первых трех примерах множества таковы, что каждое из них имеет конечное число элементов. Такие множества называют *конечными*. Множества, указанные в двух последних примерах, не состоят из конечного числа элементов и называются *бесконечными*.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым*. Оно обозначается символом $\varnothing$. Пустое множество конечно, так как число его элементов равно нулю. Примерами пустого множества могут служить множество точек пересечения параллельных прямых, множество живых мамонтов в наши дни.

Обычно множества обозначают заглавными буквами, а их элементы — малыми. Если a есть элемент множества A, то употребляется запись $a \in A$ или $A \ni a$ (читается: «a принадлежит множеству A» или «a входит в множество A»). Если же элемент b не принадлежит множеству B, то пишут $b \notin B$ или $B \not\ni b$.

Множество A, состоящее из некоторых элементов множества B, называется *подмножеством* множества B. Это записывается так: $A \subset B$ или $B \supset A$ (читается: «множество A содержится в множестве B»). Например, если B — множество книг в данной библиотеке, а A — множество тех из них, которые имеют твердый переплет, то $A \subset B$.

Условлено считать, что пустое множество является подмножеством всякого множества A, т. е. $\varnothing \subset A$; кроме того, в число подмножеств каждого множества входит оно само, т. е. $A \subset A$. Символы $\in$, $\ni$, $\subset$, $\supset$ называют соответственно *знаками принадлежности и включения*.

Если два множества A и B состоят из одних и тех же элементов, то их называют *равными* и пишут $A = B$; это равносильно тому, что имеют место включения $A \subset B$ и $B \subset A$.

Чаще всего множества задаются в двух формах:

1) непосредственной записью элементов множества: $X = \{x_1; x_2; \ldots; x_n; \ldots\}$ (например, $X = \{1; 2; 5; 10\}$ — множество всех делителей числа 10; $\mathbf{N} = \{1; 2; \ldots; n; \ldots\}$ — множество всех натуральных чисел);

2) указанием свойств, которыми обладают все элементы множества (например, $X = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| \geqslant 1\}$ — множество всех действительных чисел, абсолютная величина которых не меньше единицы).

Объединением двух множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \cup B$ и состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B.

Пересечением двух множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \cap B$ и состоящее из всех элементов, общих для A и B, т. е. принадлежащих одновременно и множеству A, и множеству B.

Пример 1. Пусть $A = \{-2; -1; 0; 3; 5\}$, $B = \{-2; 0; 4; 5\}$. Тогда $A \cup B = \{-2; -1; 0; 3; 4; 5\}$, $A \cap B = \{-2; 0; 5\}$. Здесь A, B, $A \cup B$, $A \cap B$ — конечные множества, заданные перечислением своих элементов.

Пример 2. Пусть $X = \{x | 1 \leqslant x \leqslant 3\}$, $Y = \{y | 2 \leqslant y \leqslant 4\}$ (X и Y — множества действительных чисел, удовлетворяющих заданным неравенствам). Тогда их объединение $X \cup Y = Z = \{z | 1 \leqslant z \leqslant 4\}$, а пересечение $X \cap Y = V = \{v | 2 \leqslant v \leqslant 3\}$.

Если множества X и Y не имеют общих элементов, то их пересечение — пустое множество: $X \cap Y = \varnothing$.

Говорят, что между элементами множеств A и B установлено *взаимно-однозначное соответствие*, если каждому элементу множества A соответствует единственный элемент множества B и, наоборот, каждому элементу множества B соответствует единственный элемент множества A.

Если между элементами множеств A и B можно установить взаимно-однозначное соответствие, то эти множества называют *эквивалентными* и пишут $A \sim B$.

Множество, эквивалентное множеству всех натуральных чисел $\mathbf{N} = \{1; 2; 3; \ldots; n; \ldots\}$, называется *счетным*. Очевидно, все счетные множества эквивалентны между собой.

Действительные числа и числовые множества. *Числовым множеством* называется множество, элементами которого являются действительные числа.

С понятием действительного числа учащийся познакомился в школьном курсе. Напомним, что *множество* $\mathbf{R}$ *действительных чисел является объединением множества* $\mathbf{Q}$ *рациональных чисел и множества* $\mathbf{I}$ *иррациональных чисел*: $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$.

Множество $\mathbf{Q}$ объединяет все целые и дробные, положительные и отрицательные числа. Иррациональные числа — это бесконечные непериодические дроби (например, $\sqrt{2}$, $\pi = 3{,}141592\ldots$). В подмножества множества $\mathbf{R}$ также входят множество $\mathbf{N} = \{1; 2; 3; \ldots; n; \ldots\}$ натуральных чисел и множество $\mathbf{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$ целых чисел.

Между всеми перечисленными множествами существует следующее соотношение: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$; кроме того, $\mathbf{I} \subset \mathbf{R}$.

В данном курсе мы будем рассматривать только действительные числа, поэтому для краткости часто будем говорить «число» вместо «действительное число».

Абсолютной величиной (или *модулем*) числа x называется само это число x, если $x \geqslant 0$, и число $-x$, если $x < 0$, т. е.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Например, $|4| = 4$, $|0| = 0$, $|-2| = -(-2) = 2$.

Таким образом, модуль любого действительного числа, кроме нуля, есть число положительное.

Геометрически действительные числа изображаются точками *числовой прямой*, т. е. прямой, на которой выбраны положительное направление, начало отсчета и масштаб. Каждому действительному числу x соответствует точка $M(x)$ числовой прямой Ox, находящаяся на расстоянии $|x|$ от начала отсчета — точки O, причем она находится справа от этой точки, если $x > 0$, и слева, если $x < 0$. Наоборот, каждой точке числовой прямой соответствует единственное действительное число. Таким образом, *множество действительных чисел эквивалентно множеству точек числовой прямой*. Поэтому вместо термина «число x» часто говорят «точка x», а вместо числового множества рассматривают соответствующее множество точек числовой прямой.

При любом $a > 0$ неравенство $|x| < a$ означает, что расстояние точки x на прямой Ox от точки O меньше a независимо от того, лежит ли она справа или слева от этой точки. Поэтому точка x обязательно лежит между точками $-a$ и a, т. е. *неравенство* $|x| < a$ *эквивалентно двойному неравенству* $-a < x < a$.

Кванторы. Логические символы. При изложении некоторых разделов курса мы будем пользоваться символами: $\forall x$ — «для всех x», «для любого x»; $\exists\, x$ — «найдется такое x, что...», «существует по крайней мере одно x...», называемыми соответственно *кванторами общности* и *существования*. Например, запись $\forall x \geqslant 0$ читается: «для любого неотрицательного значения x»; выражение $\exists n \in \mathbf{N}$ означает: «существует такое число n в множестве натуральных чисел».

Символ $\Rightarrow$ означает *логическое следствие*. Запись $A \Rightarrow B$ читается: «из A следует B» или «если выполняется A, то выполняется B».

Символ $\Leftrightarrow$ используется для обозначения *логической равносильности*. Запись $A \Longleftrightarrow B$ означает: «из A следует B и, наоборот, из B следует A».

Например, запись $|x - x_0| < a \Longleftrightarrow x_0 - a < x < x_0 + a$ означает, что $|x - x_0| < a$ равносильно $x_0 - a < x < x_0 + a$.

Принятые в книге обозначения:

$\mathbf{N}$ — множество всех натуральных чисел;
$\mathbf{Z}$ — множество всех целых чисел;
$\mathbf{Q}$ — множество всех рациональных чисел;
$\mathbf{I}$ — множество всех иррациональных чисел;
$\mathbf{R}$ — множество всех действительных чисел, числовая прямая;
$\mathbf{R}^2$ — множество всех точек числовой плоскости;
$\mathbf{R}^3$ — множество всех точек числового пространства;
$\in$ — принадлежит (знак принадлежности);
$\subset$ — знак включения;
$\varnothing$ — пустое множество;
$\forall$ — для любого, для любой (квантор общности);
$\exists$ — существует, найдется (квантор существования);
$\cup$ — объединение;
$\cap$ — пересечение;
$\Rightarrow$ — следует, влечет (знак следования);
$\Longleftrightarrow$ — тогда и только тогда (знак равносильности).

РАЗДЕЛ I

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

ГЛАВА I

ВЕКТОРЫ

§ 1. n-мерные векторы и операции над ними

Вектором называется упорядоченный набор из n действительных чисел, записываемый в виде * $x = (x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$, где x_i — i-й элемент (или i-я координата) вектора x.

Размерность вектора определяется числом его координат и является его отличительной характеристикой. Например, (2; 5) — двумерный вектор, (2; —3; 0) — трехмерный, (1; 3; — 2; — 4; 7) — пятимерный, $(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ — n-мерный вектор.

Векторы равны только в том случае, если они имеют одну и ту же размерность и равные соответствующие координаты. Отсюда следует, что координаты вектора нельзя менять местами: так, $(0;\ 5;\ -3) \neq (-3;\ 0;\ 5)$.

Нулевым вектором называется вектор, все координаты которого равны нулю: $0 = (0;\ 0;\ \ldots;\ 0)$.

Над векторами по определенным правилам можно выполнять линейные операции: складывать их, умножать на число, вычитать. Поэтому векторная алгебра широко используется в приложениях, в частности в экономических исследованиях; она позволяет обозначать одним символом множество чисел и выполнять над ними операции подобно тому, как они выполняются над отдельными числами. Введем линейные операции над векторами.

Произведением вектора $x = (x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ *на* действительное *число* λ называется вектор

$$\lambda x = (\lambda x_1;\ \lambda x_2;\ \ldots;\ \lambda x_n), \tag{1.1}$$

т. е. *при умножении вектора на число каждая его координата умножается на это число.*

Зная вектор $x = (x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$, можно получить *противоположный вектор* $-x = -1 \cdot x = (-x_1;\ -x_2;\ \ldots;\ -x_n)$.

Суммой векторов $x = (x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ и $y = (y_1;\ y_2;\ \ldots;\ y_n)$ называется вектор

$$x + y = (x_1 + y_1;\ x_2 + y_2;\ \ldots;\ x_n + y_n) \tag{1.2}$$

т. е. *при сложении векторов одной и той же размерности их соответствующие координаты почленно складываются.*

---

* Возможна и другая запись вектора — в виде столбца координат.

Экономические величины являются, как правило, многомерными, и векторы служат удобной формой их представления. Например, некоторый набор товаров можно охарактеризовать вектором $x = (x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$, а соответствующие цены — вектором $p = (p_1;\ p_2;\ \ldots;\ p_n)$.

Если в производственной программе предприятия выпуски продукции определить как положительные уровни товаров, а затраты — как отрицательные, то получим вектор затрат-выпуска $y^k = (y_1^k;\ y_2^k;\ \ldots;\ y_n^k)$, где y_i^k — выпуск (затраты) k-м предприятием товара i и предполагается, что y_i^k положителен (отрицателен), а $k = 1, 2, 3, \ldots, m$.

Общеэкономический вектор затрат-выпуска y определяется суммированием векторов затрат-выпуска всех m предприятий:

$$y = \sum_{k=1}^{m} y^k = \left(\sum_{k=1}^{m} y_1^k;\ \sum_{k=1}^{m} y_2^k; \ldots,\ \sum_{k=1}^{m} y_n^k\right)$$

(греческая буква Σ (сигма) используется для обозначения суммы).

Очевидно, что

$$x + (-x) = (x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n) + (-x_1;\ -x_2;\ \ldots;\ -x_n) = (0;\ 0;\ \ldots;\ 0)$$

т. е. *сумма противоположных векторов дает нулевой вектор.*

Используя понятие противоположного вектора, можно определить операцию вычитания векторов:

$$x - y = x + (-y) = (x_1;\ x_2; \ldots;\ x_n) + (-y_1;\ -y_2; \ldots;\ -y_n) =$$
$$= (x_1 - y_1;\ x_2 - y_2; \ldots;\ x_n - y_n),$$

т. е. *при вычитании двух векторов одной и той же размерности их соответствующие координаты почленно вычитаются.*

Нетрудно проверить, что линейные операции над векторами удовлетворяют следующим свойствам:

1°. $x + y = y + x$.
2°. $(x + y) + z = x + (y + z)$.
3°. $\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y$.
4°. $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$.
5°. $\alpha (\beta x) = \alpha\beta x$.
6°. $0x = \alpha 0 = 0$.

Скалярным произведением двух векторов $x = (x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ и $y = (y_1;\ y_2;\ \ldots;\ y_n)$ называется число

$$xy = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n, \tag{1.3}$$

равное сумме произведений соответствующих координат векторов.

В экономических задачах можно рассматривать скалярное произведение вектора цен p на вектор объема продукции x. Скалярное произведение px в этом случае дает суммарную стоимость продукции x при ценах p.

Например, если объем всей продукции, выпущенной предприятием, выражается вектором $x = (400;\ 750;\ 200;\ 300)$, элементы которого означают соответственно количество изделий высшего, первого, второго и третьего сортов, а цены в одних и тех же денежных единицах заданы в соответствующем порядке вектором $p = (3;\ 2{,}1;\ 1{,}2;\ 0{,}5)$, то скалярное произведение $px = 3\cdot 400 + 2{,}1\cdot 750 + 1{,}2\cdot 200 + 0{,}5\cdot 300 = 3165$ выражает суммарную стоимость всей продукции x.

Нетрудно проверить, что скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1°. $x\cdot x \geqslant 0$, причем $x\cdot x = 0$ лишь при $x = 0$.
2°. $xy = yx$.
3°. $(x + y) z = xz + yz$.
4°. $(\lambda x) y = \lambda (xy)$.

Среди скалярных произведений особое место занимает *скалярный квадрат*:

$$x \cdot x = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2.$$

Число

$$|x| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}, \qquad (1.4)$$

равное корню квадратному из суммы квадратов координат вектора, называется *модулем* (или *длиной*) вектора $x = (x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$.

Пример 1. Вектор $x = (3;\ 0;\ 4)$ имеет длину, равную $|x| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = 5$.

Два вектора называют *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

Пример 2. Векторы $x = (3;\ 0;\ 1;\ -1)$ и $y = (-2;\ 5;\ 6;\ 0)$ ортогональны, так как $xy = 3 \cdot (-2) + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 6 - 1 \cdot 0 = 0$.

§ 2. Понятие о линейных пространствах

Некоторое множество U образует *линейное пространство*, если для любых двух его элементов $x \in U$ и $y \in U$ определена операция сложения $x + y = U$ и для каждого элемента $x \in U$ и любого действительного числа $\lambda \in \mathbf{R}$ определено произведение $\lambda x \in U$, причем эти операции удовлетворяют свойствам $1^\circ - 6^\circ$ (см. с. 13).

Таким образом, множество n-мерных векторов с действительными координатами образует линейное векторное пространство.

Так как единственными операциями, которые введены в векторном пространстве, являются операции сложения векторов и умножения вектора на число, то из алгебраической структуры векторного пространства следует, что для всех векторов одного и того же пространства число координат n должно оставаться постоянным. Векторы с различным числом координат являются элементами различных векторных пространств. Поэтому n-мерное векторное пространство можно рассматривать как пространство всевозможных строк (столбцов) из n действительных чисел и обозначать $\mathbf{R}^n$. В частности, пространство трехмерных векторов обозначается $\mathbf{R}^3$, двумерных — $\mathbf{R}^2$.

Линейное пространство называют *евклидовым*, если в нем определено скалярное произведение, удовлетворяющее свойствам $1^\circ - 4^\circ$ (см. с. 13). Так как для n-мерных векторов скалярное произведение определено, то все множество n-мерных векторов образует евклидово векторное пространство.

§ 3. Геометрические векторы

В двумерном и трехмерном пространствах вектор можно представить геометрически в виде *направленного отрезка*, т. е. отрезка, у которого различают начало и конец.

Если A — начало вектора, а B — его конец, то вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ или одной строчной буквой $\vec{a}$. На рисунке конец вектора указывается стрелкой (рис. 1).

Исторически геометрические векторы возникли раньше n-мерных в связи с потребностями физики и механики, где кроме скалярных величин, которые полностью определяются своими числовыми значениями (например, температура, объем, масса), рассматриваются векторные величины, которые кроме числовых значений характеризуются еще и направлением (примерами таких величин могут служить путь, сила, скорость, ускорение). В дальнейшем мы используем геометрические векторы при изучении аналитической геометрии.

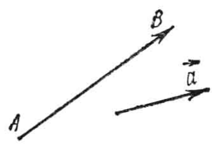

Рис. 1

Длиной (или *модулем*) геометрического вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина порождающего его отрезка $|AB|$.

Два вектора называют *равными*, если они могут быть совмещены (при совпадении направлений) путем параллельного переноса, т. е. если они параллельны, направлены в одну и ту же сторону и имеют равные длины.

В физике часто рассматриваются закрепленные векторы, заданные точкой приложения, длиной и направлением. Если точка приложения вектора не имеет значения, то его можно переносить, сохраняя длину и направление, в любую точку пространства. В этом случае вектор называется *свободным*. В данном курсе будут рассматриваться только свободные векторы, поэтому, говоря «вектор», мы будем понимать «свободный геометрический вектор».

Рассмотрим линейные операции над геометрическими векторами.

Произведением вектора $\vec{a}$ *на число* λ называется вектор, получающийся из вектора $\vec{a}$ растяжением (при $|\lambda| > 1$) или сжатием (при $|\lambda| < 1$) в $|\lambda|$ раз, причем направление вектора $\vec{a}$ сохраняется, если $\lambda > 0$, и меняется на противоположное, если $\lambda < 0$ (рис. 2).

Из определения следует, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ всегда расположены на одной или на параллельных прямых. Такие векторы называются *коллинеарными*. Справедливо и обратное утверждение: если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то они связаны соотношением

$$\vec{b} = \lambda\vec{a}. \tag{1.5}$$

Следовательно, равенство (1.5) выражает **условие коллинеарности двух векторов**.

Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец — с концом вектора $\vec{b}$, при условии, что начало вектора $\vec{b}$ приложено к концу вектора $\vec{a}$ (рис. 3).

Это определение может быть распределено на любое конечное число векторов. Пусть в пространстве даны n свободных векторов $\vec{a}_1$

$\vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Если к концу вектора $\vec{a}_1$ приложить начало вектора $\vec{a}_2$, к концу вектора $\vec{a}_2$ — начало вектора $\vec{a}_3$ и т. д. и, наконец, к концу вектора $\vec{a}_{n-1}$ — начало вектора $\vec{a}_n$, то суммой этих векторов служит замыкающий вектор $\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n$, начало которого совпадает с началом первого вектора $\vec{a}_1$, а конец — с концом последнего вектора $\vec{a}_n$ (рис. 4).

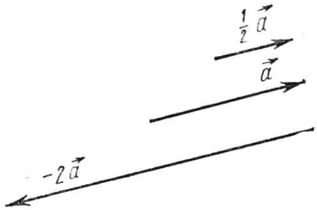

Рис. 2

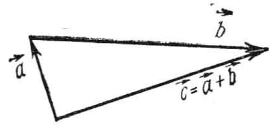

Рис. 3

Слагаемые $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются *составляющими* вектора $\vec{s}$, а сформулированное правило сложения векторов — п р а в и л о м м н о г о у г о л ь н и к а. Разумеется, этот многоугольник может и не быть плоским.

При умножении вектора $\vec{a}$ на число -1 получается *противоположный вектор* $-\vec{a}$. Векторы $\vec{a}$ и $-\vec{a}$ имеют одинаковые длины и про-

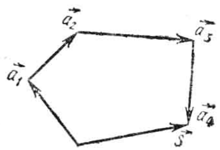

Рис. 4

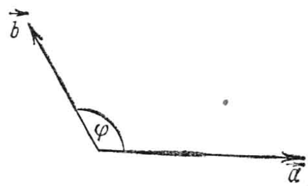

Рис. 5

тивоположные направления. Их сумма $a + (-\vec{a}) = \vec{0}$ дает *нулевой вектор*, длина которого равна нулю. Направление нулевого вектора не определено.

В алгебре векторов нет надобности рассматривать отдельно операцию вычитания: вычесть из вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$ означает прибавить к вектору $\vec{a}$ противоположный вектор $-\vec{b}$, т. е. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Нетрудно убедиться, что рассмотренные линейные операции над геометрическими векторами удовлетворяют свойствам 1°—6° (см. с. 13).

Чтобы определить скалярное произведение геометрических векторов, введем понятие угла между ними. *Углом* φ *между* двумя ненулевыми *векторами* (или между вектором и осью) называется наименьший угол, на который нужно повернуть один из векторов, чтобы его направление совпало с направлением другого вектора (рис. 5). По опреде-