W. Klingenberg

Lineare Algebra und Geometrie

Hochschultext

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York Tokyo

W. Klingenberg

Lineare Algebra und Geometrie

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York Tokyo 1984

Wilhelm Klingenberg
Mathematisches Institut der Universität Bonn
Wegelerstraße 10, D-5300 Bonn 1

AMS Subject Classification (1980): 15-01, 15A03, 15A04, 15A06, 15A15, 15A18, 15A21, 15A63, 51-01, 51M05, 51M10, 51N10, 51N15, 51N20, 51N25

ISBN 3-540-13427-1 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo
ISBN 0-387-13427-1 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin Tokyo

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek
Klingenberg, Wilhelm:
Lineare Algebra und Geometrie / W. Klingenberg. - Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer, 1984.
(Hochschultext)
ISBN 3-540-13427-1 (Berlin ...)
ISBN 0-387-13427-1 (New York ...)

Printed in Germany

Druck und Bindearbeiten: Weihert-Druck GmbH, Darmstadt
2144/3140-543210

Hochschultext

W. Klingenberg

Eine Vorlesung über Differentialgeometrie

1973. 30 Abbildungen. X, 135 Seiten
(Heidelberger Taschenbücher, Band 107)
DM 24,–. ISBN 3-540-06253-X

Inhaltsübersicht: Differentialrechnung im euklidischen Raum. – Kurven. – Allgemeine Theorie. – Ebene Kurven im Großen. – Lokale Flächentheorie. – Innere Flächentheorie: Lokale Theorie. – 2-dimensionale Riemannsche Geometrie. – Flächentheorie im Großen.

Dieses Buch ist als Einführung in die Theorie der Kurven und Flächen, aber auch zugleich in die Differentialgeometrie und insbesondere in die Riemannsche Geometrie konzipiert. Im Vordergrund der Darstellung steht die globale Theorie (z. B. Umlaufssatz und Vierscheitelsatz in der Kurventheorie, sowie Starrheitssatz und Integralsatz von Gauss-Bonnet in der Flächentheorie).

Springer-Verlag
Berlin
Heidelberg
New York
Tokyo

Zahlen

Von H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, A. Prestel, R. Remmert

1983. 31 Abbildungen. XII, 291 Seiten
(Grundwissen Mathematik, Band 1)
DM 48,-. ISBN 3-540-12666-X

Erstmals werden alle interessanten Zahlsysteme in **einem** Buch ausführlich behandelt. Sieben Autoren und ein Redakteur haben in enger Zusammenarbeit dargestellt, wie sich der Zahlbegriff historisch entwickelt hat und wie er exakt begründet und erweitert werden kann.

Von den natürlichen Zahlen führt der Weg über die ganzen und rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen. Darüber hinaus werden die komplexen Zahlen, die Hamiltonschen Quaternionen und die Cayleyschen Oktaven dargestellt. Mit Methoden der Algebra, Analysis und Topologie wird begründet, warum man mit den Quaternionen und Oktaven an die Grenzen für höherdimensionale Zahlsysteme stößt. In einer anderen Richtung werden die reellen Zahlen zu den Conwayschen Zahlen und Spielen einerseits und zu den Robinsonschen Non-Standard-Zahlen mit ihren infinitesimalen Größen andererseits erweitert.

Der erste Teil bietet zum Thema „Zahlen“ das, was jeder Mathematiker zu diesem Thema gehört und gelesen haben sollte. Die beiden anderen Teile sollen eine über das **Gundwissen** hinausgehende Neugier des Lesers stillen. Sie bieten eine Fülle von Themen auch für Proseminare oder Seminare. In diesem Sinn ist der Zahlenband für die neue deutsche Lehrbuchreihe **Grundwissen Mathematik** nicht charakteristisch; insbesondere können die anderen Bände dieser Reihe unabhängig vom Zahlenband studiert werden.

Jeder, der sich mit Mathematik beschäftigt - an der Hochschule, am Gymnasium oder in Wirtschaft und Industrie - wird dieses Buch mit großem Gewinn lesen und immer wieder gerne zur Hand nehmen.

Für Christian, Wilhelm und Karin

Vorwort

AGERE AUT PATI FORTIORA

Das vorliegende Buch ist aus Vorlesungen entstanden, die ich wiederholt in Göttingen, Mainz und Bonn gehalten habe. Die Mainzer Vorlesungen 1963/64 wurden von K.H. Bartsch, K. Steffen und P. Klein ausgearbeitet. P. Klein erstellte eine erweiterte Fassung des algebraischen Teils, die 1971/73 unter gemeinsamem Namen im Bibliographischen Institut erschien. Zu der geplanten Veröffentlichung des geometrischen Teils ist es nie gekommen.

Gegen Ende meiner Lehrtätigkeit lege ich nun eine vollständige Fassung dessen vor, was ich unter "Analytische Geometrie" verstehe. Dies ist zum einen die lineare und bilineare Algebra in voller Allgemeinheit, dann aber auch die klassische Geometrie, d.h., die affine und euklidische Geometrie sowie die projektive und die beiden daraus nach Felix Klein herleitbaren nichteuklidischen Geometrien.

Angesichts des Umfangs der klassischen Geometrie konnte ich natürlich in meinen Vorlesungen nur die Grundlagen entwickeln. Und auch hier bin ich nur bis zur euklidischen Geometrie gekommen, kaum einmal bis zur projektiven Geometrie. Ich konnte aber jedenfalls deutlich machen, wie sich die Fülle des klassischen Materials übersichtlich und einsichtig gestalten läßt, wenn die zuvor entwickelte lineare und bilineare Algebra in ihrer heutigen Gestalt zur Verfügung steht.

In dem vorliegenden Text führe ich nun vieles aus, was in zwei Semestern nicht gebracht werden kann. Durch Selbststudium oder im Rahmen eines Proseminars im dritten Semester kann sich ein Student mit der heute stark vernachlässigten klassischen Geometrie vertraut machen. Er braucht sich dabei nicht mit dem veralteten und umständlichen Stil früherer Generationen herumzuschlagen. Vielmehr findet er hier solche Dinge wie Berührkreise von Dreiecken, Kegelschnitte, Quadriken, Dandelinsche Sphären, Fundamentalsatz der affinen und projektiven Geometrie, konforme Modelle der nichteuklidischen Geometrien, Cliffordflächen bis hin zu solchen Kuriositäten wie den Satz von Morley. Und dies alles in einem Band zusammen mit allem, was man aus der (bi-) linearen Algebra wissen muß.

Von Anfang an wird der Stoff in der später benötigten Allgemeinheit entwickelt. Auf didaktische Präliminarien und Motivationen habe ich verzichtet. Ich bin auch davon überzeugt, daß eine gute Sache sich selber motiviert. Ein angehender Student hat keinerlei Schwierigkeiten, einige "abstrakte" Definitionen zu akzeptieren: Wenn er im Verlaufe der Vorlesung bei den Anwendungen sieht, wie nützlich und weittragend die eingeführten Begriffe sind, so wird er auch mit ihnen vertraut und lernt, mit ihnen umzugehen.

So stehen Gruppen ganz am Anfang. Gruppen treten ganz natürlich als strukturerhaltende Auto-Bijektionen auf. Bei Vektorräumen gibt es zunächst keine Beschränkung auf endliche Dimensionen, da die Funktionalräume zu den wichtigsten Beispielen für Vektorräume gehören. Später wird deutlich gemacht, daß der Verzicht auf endliche Dimension durch eine zusätzliche Struktur weitgehend wettgemacht wird; und dies sogar vollständig für Hilberträume.

Die Jordan-Normalform wird für den komplexen und für den reellen Fall auf elementare Weise hergeleitet. Wir lösen damit lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten und charakterisieren diejenigen Systeme, für welche die Nullösung stabil ist.

Mit Kapitel VI beginnt der geometrische Teil im engeren Sinne:
Affine Räume und projektive Räume werden zunächst über allgemeinen Vektorräumen betrachtet. Wir klassifizieren die Quadriken und zeigen, daß im reellen Fall die Quadriken der Codimension 1 starr sind.
Der Hauptsatz der affinen und projektiven Geometrie, mit dem die allgemeinen Kollineationen charakterisiert werden, wird ergänzt durch den Satz von v. Staudt über die Kennzeichnung der Bijektionen einer projektiven Geraden, die harmonische Quadrupel in ebensolche überführen.
Das Doppelverhältnis wird später in der nichteuklidischen Geometrie eine entscheidende Rolle spielen.
Affine Räume über einem euklidischen Vektorraum liefern die euklidische Geometrie; ihre projektiven Räume führen auf die elliptische Geometrie. Wenn der zugrunde liegende Vektorraum eine Lorentzmetrik trägt, erhalten wir die hyperbolische Geometrie. Die konformen Modelle ebenso wie die Grundformeln der Dreieckslehre werden hergeleitet. Für die Bewegungsgruppe der ebenen Geometrien sind die komplexen Zahlen wichtig, für die Bewegungsgruppe der räumlichen Geometrien die Quaternionen.

Für weitere Einzelheiten über den Inhalt sei auf das folgende Verzeichnis und den Index verwiesen.

Abschließend möchte ich noch einmal betonen, daß dieses Buch mehr sein will, als nur ein weiterer Text zur linearen Algebra - und noch ein recht vollständiger dazu: Es soll darüber hinaus den Studenten - und hier insbesondere den angehenden Lehrer - mit der klassischen Geometrie vertraut machen. Sie ist eine der großen Leistungen unserer europäischen Kultur. In den Köpfen der jüngeren Generation ist die klassische Geometrie vom Aussterben bedroht. Davor möchte ich sie bewahren.

Beim Korrekturlesen haben mir meine Assistenten geholfen. Mancher Fehler wurde noch ganz am Schluß von meiner Kollegin A.M. Pastore entdeckt. Das Manuskript stellte in mühevoller Arbeit Frau Christine Sacher her. Ihnen allen gebührt mein Dank.

Bonn, im November 1983

Wilhelm Klingenberg

Inhaltsverzeichnis

I. Allgemeine Grundbegriffe

1. Mengen und Abbildungen

Wir betrachten Mengen $A, B, C, \ldots$. Ohne auf eine formallogische Begründung einzugehen, soll es für uns genügen, eine Menge A als eine Zusammenfassung von Objekten $x, y, z \ldots$ zu betrachten. Ein Objekt x der Menge A heißt Element und wir bezeichnen mit $x \in A$, daß x zu der Menge A gehört. Gelegentlich beschreiben wir eine Menge A auch in der Form $\{x, y, z, \ldots\}$, d.h., wir führen die Elemente in A explizit auf.

Daß die Menge A eine Teilmenge der Menge B ist, bedeutet, daß jedes Element x von A auch Element von B ist. Bezeichnung: $A \subset B$. Falls $A \subset B$, so bezeichnet $B \setminus A$ die Menge der $x \in B$, $x \notin A$.

Es ist zweckmäßig, auch von der leeren Menge $\emptyset$ zu reden. Dies ist die Menge ohne jedes Element.

1.1 <u>Definition.</u> A und B seien Mengen. Eine <u>Abbildung</u> $f: A \longrightarrow B$ ist eine Vorschrift, die jedem $x \in A$ genau ein $y \in B$ zuordnet. Dies y wird mit $f(x)$ oder einfach fx bezeichnet und heißt Bild von x. Wenn $fx = y$, so heißt x ein <u>Urbild</u> von y.

1.2 <u>Beispiele</u>. (i) Sei $A = \mathbb{N}$ = die Menge der natürlichen Zahlen $\{0,1,2,..\}$, m sei eine feste natürliche Zahl. Durch die Vorschrift $f(x) = mx$ ist eine Abbildung $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ gegeben.

(ii) $id_A: A \longrightarrow A;\ x \longmapsto x$, heißt <u>identische Abbildung</u> von A auf A.

1.3 <u>Definition.</u> Sei $f: A \longrightarrow B$ eine Abbildung.

(i) f heißt <u>surjektiv</u>, wenn $f(A) = \{f(x); x \in A\} = B$

(ii) f heißt <u>injektiv</u>, wenn aus $f(x) = f(x')$ folgt $x = x'$, für alle Paare (x, x') aus A.

(iii) f heißt <u>bijektiv</u>, wenn f surjektiv und injektiv ist.

1.4 Satz. Wenn $f: A \longrightarrow B$ bijektiv ist, so gibt es die sogenannte Umkehrabbildung oder inverse Abbildung $f^{-1}: B \longrightarrow A$: Falls $y = f(x)$, so setze $f^{-1}(y) = x$. f^{-1} ist bijektiv.

Beweis. Da f surjektiv ist, gibt es zu jedem $y \in B$ ein $x \in A$ mit $f(x) = y$. Da f injektiv ist, gibt es zu $y \in B$ nur ein einziges x mit $f(x) = y$. Daher ist f^{-1} eine Abbildung. Der Rest ist klar. □

1.5 Beispiele. (i) Die Abbildung $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ aus 1.2,i ist injektiv für jedes $m > 0$, denn aus $mx = mx'$ folgt $m(x-x') = 0$, also $x-x' = 0$. Für $m > 1$ ist f jedoch nicht surjektiv.

(ii) Sei $\mathbb{Z}$ die Menge aller ganzen Zahlen $\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$. Die Abbildung $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$,

$$x \longmapsto \begin{cases} x, & \text{für } x \geq 0 \\ -x, & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

ist surjektiv, aber nicht injektiv, da $f(-x) = f(x)$ für alle x.

(iii) Sei $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen $\{0, \pm p/q;\ p$ und q aus $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} - \{0\}\}$. Die Abbildung $f: x \in \mathbb{Q} \longmapsto mx \in \mathbb{Q};\ m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ist bijektiv, wie man verifiziere.

1.6 Definition. Seien $f: A \longrightarrow B$; $g: B \longrightarrow C$ Abbildungen. Dann ist eine Abbildung $g \circ f: A \longrightarrow C$ erklärt durch $x \longmapsto g(f(x))$. $g \circ f$ heiße Komposition von f mit g.

Bemerkung. Beachte die Reihenfolge $g \circ f$ und nicht $f \circ g$ für die Komposition von f mit g. Dies rührt von der Konvention her, $f(x)$ zu schreiben anstelle $(x)f$.

1.7 Satz. Seien

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

Abbildungen. Dann gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

und wir schreiben daher einfach $h \circ g \circ f$.

Beweis. Benutze die Definition der Komposition:

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h(g(f(x)))$$
$$= (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x) \qquad \square$$

1.8 Satz. Wenn $f\colon A \longrightarrow B$ und $g\colon B \longrightarrow C$

$$\left.\begin{array}{l}\text{surjektiv}\\ \text{injektiv}\\ \text{bijektiv}\end{array}\right\} \text{ dann auch } g \circ f \left\{\begin{array}{l}\text{surjektiv}\\ \text{injektiv}\\ \text{bijektiv}\end{array}\right. .$$

Beweis. Seien f und g injektiv.
Aus $(f \circ g)(x) = (f \circ g)(x')$ folgt $g(x) = g(x')$ und $x = x'$.
Seien f und g surjektiv. Da $f(A) = B$, $g(B) = C$, gilt $(g \circ f)(A) = C$. $\square$

1.9 Beispiel. In 1.4 zeigten wir, daß zu einer bijektiven Abbildung $f\colon A \longrightarrow B$ die inverse Abbildung $f^{-1}\colon B \longrightarrow A$ existiert. Dann gilt

$$f^{-1} \circ f = id_A; \; f \circ f^{-1} = id_B.$$

Der folgende Satz liefert eine Umkehrung.

1.10 Satz. Seien $f\colon A \longrightarrow B$, $g\colon B \longrightarrow A$ Abbildungen mit $f \circ g = id_B$. Dann ist f surjektiv und g injektiv.

Beweis. Schreibe $y \in B$ als $f(g(y)) = y$. Also f surjektiv.
Aus $g(y) = g(y')$ folgt $y = f(g(y)) = f(g(y')) = y'$, also g injektiv. $\square$

1.11 Korollar 1. $f\colon A \longrightarrow B$ ist bijektiv dann und nur dann, wenn es ein $g\colon B \longrightarrow A$ gibt mit $f \circ g = id_B$, $g \circ f = id_A$. Und zwar ist $g = f^{-1}$. $\square$

1.12 Korollar 2. Sei $f\colon A \longrightarrow B$ bijektiv. Dann ist $(f^{-1})^{-1} = f$.

Beweis. Nach 1.9 und der Definition von $(f^{-1})^{-1}$ ist $f^{-1} \circ f = f^{-1} \circ (f^{-1})^{-1} = id_A$; $f \circ f^{-1} = (f^{-1})^{-1} \circ f^{-1} = id_B$. Wende 1.11 an. $\square$

2. Gruppen

Wir kommen nun zu dem ersten und zugleich sehr wichtigen Beispiel einer Menge mit einer zusätzlichen Struktur. Bei der Definition werden wir benutzen, daß mit zwei Mengen A und B auch die sogenannte Produktemenge $A \times B$ erklärt ist. Dies ist die Menge der Paare (x,y) mit $x \in A$ und $y \in B$

2.1 Definition. Eine Gruppe ist eine Menge (die wir ebenfalls mit G bezeichnen) mit einer Verknüpfung

$$G \times G \longrightarrow G;$$
$$(x,y) \longmapsto x \cdot y,$$

welche die folgenden sogenannten Gruppenaxiome erfüllt.

(i) Für alle x,y,z aus G gilt das Assoziativgesetz

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

(ii) Es gibt ein Element $e \in G$, das sog. neutrale Element, so daß

$$e \cdot x = x \cdot e = x \quad \text{für alle } x \in G.$$

(iii) Zu jedem $x \in G$ gibt es ein $y \in G$ mit

$$y \cdot x = e.$$

y heißt links-inverses Element von x.

2.2 Beispiel. Sei M eine beliebige Menge. Die Menge S_M oder $\operatorname{Perm} M$ der bijektiven Abbildungen (auch Permutationen genannt) bildet eine Gruppe, indem wir als Verknüpfung $f \cdot g$ die Komposition $g \circ f$ (vgl. 1.6) wählen. In der Tat, das Assoziativgesetz gilt nach 1.7 , id_M ist neutrales Element und f^{-1} ist links-inverses Element gemäß 1.9.

2.3 Definition. Falls für alle $(x,y) \in G \times G$ gilt $x \cdot y = y \cdot x$, so heißt G abelsche oder kommutative Gruppe.

In diesem Falle schreibt man auch oft $x+y$ anstelle $x \cdot y$.

2.4 Beispiele. (i) Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist eine abelsche Gruppe unter der Verknüpfung $(x,y) \longmapsto x+y$.

0 ist neutrales Element, $-x$ links-inverses Element von x.

(ii) Die Menge $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ der rationalen Zahlen $\neq 0$ ist eine abelsche Gruppe unter der Verknüpfung $(x,y) \longmapsto x \cdot y$. 1 ist neutrales Element, $1/x$ links-inverses Element.

(iii) Die Gruppe $S_3 \equiv S\{1,2,3\}$ der Permutationen von 3 Elementen ist nicht abelsch: Man zeige, daß z.B. die Permuationen $\{1 \longmapsto 2, 2 \longmapsto 1, 3 \longmapsto 3\}$ und $\{1 \longmapsto 1, 2 \longmapsto 3, 3 \longmapsto 2\}$ nicht kommutieren.

2.5 Satz. (i) In einer Gruppe G gibt es nur ein einziges neutrales Element.

(ii) In einer Gruppe G gibt es zu $x \in G$ nur ein einziges links-inverses Element y, und dieses ist auch rechts-inverses Element, d.h., $x \cdot y = e$.

Bemerkung. Für das eindeutig bestimmte rechts- und links-inverse Element y von x schreiben wir auch x^{-1} oder (falls G abelsch ist und die Verknüpfung mit $+$ bezeichnet ist) auch $-x$. Anstelle $x+(-y)$ schreiben wir auch $x-y$.

Beweis. Zu (i). Seien e, e' neutrale Elemente in G. Dann ist $e = e \cdot e' = e'$. Zu (ii). Sei $y \cdot x = e$. Dann ist $y \cdot x \cdot y = e \cdot y = y$. Sei z links-inverses Element von y. Unter Verwendung des Assoziativgesetzes finden wir $x \cdot y = z \cdot y \cdot x \cdot y = z \cdot y = e$. Schließlich folgt aus $y \cdot x = y' \cdot x$: $y \cdot x \cdot y = y' \cdot x \cdot y$, also $y = y'$. □

2.6 Korollar. $(x^{-1})^{-1} = x$; $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$

Beweis. $e = x^{-1} \cdot (x^{-1})^{-1}$ impliziert $x = (x^{-1})^{-1}$. Und $e = x \cdot y \cdot y^{-1} \cdot x^{-1} = (x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1})$ beweist, wegen der Eindeutigkeit des inversen Elements, die zweite Behauptung. □

2.7 Definition. Sei G eine Gruppe. Für jedes $g \in G$ erkläre

$$L_g : G \longrightarrow G;\ x \longrightarrow g \cdot x,$$
$$R_g : G \longrightarrow G;\ x \longrightarrow x \cdot g.$$

L_g und R_g heißen Links- bzw. Rechtstranslation (mit dem Element $g \in G$).