

А.И. ЛАРИОНОВ
Т.И. ЮРЧЕНКО

ЭКОНОМИКО- МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПЛАНИРОВАНИИ

*учебник
для техникумов*



А. И. ЛАРИОНОВ
Т. И. ЮРЧЕНКО

ЭКОНОМИКО- МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПЛАНИРОВАНИИ

*Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебника для средних
специальных учебных заведений*



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1984

Рецензенты:

доц. А. Д. Шарапов (Киевский институт народного хозяйства им. Д. С. Коротченко); преп. Л. М. Молодцов (Ленинградский промышленно-экономический техникум)

Ларионов А. И., Юрченко Т. И.

Л25 Экономико-математические методы в планировании: Учеб. для учащ. средн. спец. учеб. заведений.— М.: Высш. шк., 1984.— 224 с., ил.

В пер.: 55 к.

В учебнике излагаются экономико-математические методы, используемые для решения оптимизационных задач планирования; рассматриваются модели производственных систем, применительно к которым могут быть использованы указанные методы. Большое внимание уделено вопросам использования специальных методов в реальных условиях производства. Приводятся примеры решения конкретных задач планирования.

Л $\frac{0604020102-481}{001(01)-84}$ 52—84

ББК65.9(2)30—2
33СЗ

Развитие народного хозяйства ставит все более сложные задачи перед системой планирования всех звеньев производства. Коммунистическая партия и Советское правительство на съездах и Пленумах ЦК КПСС, в ряде постановлений неоднократно подчеркивали необходимость совершенствования планирования на всех уровнях народного хозяйства с целью дальнейшего повышения эффективности производства.

В постановлении июньского (1983 г.) Пленума ЦК КПСС отмечается, что в настоящее время особенно актуальны такие вопросы, как улучшение системы управления и планирования¹. Решение этой задачи может быть осуществлено на основе использования последних достижений науки, прежде всего экономико-математического моделирования и вычислительной техники. Проникновение математики в экономику, планирование и управление является определяющей особенностью современного этапа научно-технической революции в области этих наук. На XXVI съезде КПСС поставлены такие задачи, как дальнейшее «развитие математической теории, повышение эффективности ее использования в прикладных целях; ... совершенствование вычислительной техники, ее элементной базы и математического обеспечения...»².

Комплекс экономических и математических научных дисциплин получил обобщенное название — экономико-математические методы (введен акад. В. С. Немчиновым в начале 60-х годов). Развитие и проникновение математики в экономику и планирование в последние двадцатилетие шло интенсивно во всем мире. Появились целые школы математических методов в США, Франции, ФРГ, Англии и некоторых других странах. Это было вызвано объективными причинами.

Расширение масштабов производства, углубление его специализации, развитие кооперации, усложнение межхозяйственных связей и другие качественные и количественные изменения в экономике привели к резкому увеличению числа возможных управленческих решений, из которых надо выбрать лучшее.

Чрезвычайно велико значение экономико-математических методов при принятии плановых заданий.

Увеличение «цены ошибки» в планировании потребовало решения планово-экономических задач на более высоком уровне их научного обоснования, т. е. прежде всего такими методами, которые давали бы или наилучший (оптимальный), или рациональный (квазиоптимальный) результат.

Большинство задач планирования, как правило, многовариантны. Отыскание наиболее эффективного решения путем прямого перебора всех возможных вариантов требует огромных затрат труда, иногда практически неосуществимых. Поэтому возникает объективная необходимость использования экономико-математических методов, обеспечивающих нахождение оптимального или рационального решения наиболее коротким и наименее трудоемким путем.

В то же время отыскание оптимальных или хотя бы рациональных решений с помощью экономико-математических методов, резко ограни-

¹ См.: Материалы Пленума Центрального Комитета КПСС, 14—15 июня 1983 года. М., 1983, с. 70.

² Материалы XXVI съезда КПСС. М., 1981, с. 146.

чивая количество перебираемых вариантов, требует все же выполнения достаточно большого объема расчетов. Поэтому для комплексного решения этой проблемы необходимо широкое использование современной электронно-вычислительной техники. Появление и развитие электронно-вычислительных машин явилось серьезным толчком к расширению сферы приложения экономико-математических методов. Результатом такого комплексного решения стало создание автоматизированных систем управления.

Коммунистическая партия и правительство нашей страны уделяют большое внимание вопросам совершенствования планирования, в том числе и на основе экономико-математических методов и АСУ. На XXV съезде КПСС было подчеркнуто: «Необходимо в первую очередь обеспечить серьезное совершенствование планирования... перед нами сейчас встала задача поднять уровень плановой работы, привести ее в соответствие с новыми масштабами и обликом нашего хозяйства, с новыми требованиями времени... Здесь — широкое поле для приложения усилий экономической науки, для внедрения современных научных методов, в том числе экономико-математических, для использования автоматизированных систем управления»¹.

Одновременно дальнейшее повышение эффективности АСУ зависит от масштаба внедрения в них экономико-математических моделей планирования производства, и прежде всего оптимизационных. Использование современных экономико-математических методов планирования и ЭВМ в значительной степени ускоряет и повышает точность планово-экономических расчетов, дает возможность поднять уровень научного обоснования составляемых планов, повысить эффективность производства.

Настоящий учебник подготовлен в соответствии с программой курса, утвержденной Учебно-методическим управлением по среднему специальному образованию Министерства высшего и среднего специального образования СССР. В учебнике рассматриваются вопросы, связанные с реализацией постановления ЦК КПСС и Совета Министров СССР от 12 июля 1979 г. «Об улучшении планирования и усилении воздействия хозяйственного механизма на повышение эффективности производства и качества работы», решений XXVI съезда КПСС и последующих пленумов ЦК КПСС о повышении роли планирования как центрального звена в управлении народным хозяйством, о более полном учете в планах внутренних резервов производства, об улучшении методов работы плановых органов.

Основной задачей предмета является изучение экономико-математических методов и области их наиболее эффективного применения, что позволит вооружить будущих плановиков и экономистов основами составления экономико-математических моделей, подготовить их к непосредственному участию в управлении производством.

Авторами отдельных глав учебника являются: доц. А. И. Ларионов — предисловие, заключение, гл. 2, гл. 4 п. 1, 2, гл. 6, гл. 8 п. 5 и 6; доц. Т. И. Юрченко — гл. 1, гл. 3 п. 2, 3, 4, гл. 4 п. 3, гл. 5, 7, гл. 8 п. 2, 3, 4. Остальной материал подготовлен авторами совместно.

Авторы выражают глубокую признательность рецензентам — преподавателю Л. М. Молодцову и доценту А. Д. Шарапову за ценные советы, которые помогли улучшить книгу.

¹ Материалы XXV съезда КПСС. М., 1976, с. 59.

СУЩНОСТЬ И КЛАССИФИКАЦИЯ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ И МЕТОДОВ

1. Принципы и методы построения экономико-математических моделей

Экономические системы характеризуются чрезвычайной сложностью: все возрастающими масштабами производства, высокими темпами обновления выпускаемой продукции, ее непрерывным усложнением, появлением принципиально нового технологического оборудования и процессов обработки выпускаемой продукции, усложняющимися внутренними и внешними производственными связями. Изучение этих сложных систем с целью управления ими в оптимальном или хотя бы в рациональном режиме предполагает познание свойств системы, закономерностей ее существования, функционирования и развития.

Получение высоких конечных показателей как результата функционирования экономической системы предполагает прежде всего целенаправленное воздействие как на систему в целом, так и на ее отдельные составляющие. Определение путей такого воздействия, выбор наиболее чувствительных к воздействию элементов требуют апробирования найденных решений в условиях либо натурального эксперимента, либо искусственных, имитирующих реальную систему. Первое решение сопряжено с большими трудностями организационного, технического и экономического порядка, поэтому в рамках большой экономической системы его применение практически нереально. Для такой системы правомерно проведение экспериментов, связанных с определением оптимальной стратегии и тактики управления на копии — так называемой модели.

Под *моделью* мы будем понимать условный образ объекта (системы), характеризующийся комплексом элементов, существенных с позиций поставленной цели, определенным образом взаимосвязанных и отражающих функционирование и развитие данного объекта (системы).

В качестве элементов моделируемой системы могут выступать: процедуры, если объектом моделирования является какой-либо процесс; показатели или признаки, если объектом моделирования являются системы.

Элементы системы характеризуются количественно и качественно, при этом одни элементы имеют и количественную, и качественную характеристики, другие же только качественную. Но для отображения взаимозависимостей между элементами системы и работы с моделью при решении задач управления необходимы их количественные характеристики. Поэтому в случае, когда элементы системы характеризуются только качественными показателями, необходимо использовать специальные приемы или специальный аппарат для получения количественных показателей.

С позиций достижения определенных целей управления некоторые элементы системы являются существенными, определяющими ее поведение, другие же несущественны. Поэтому отказ от учета последних при построении модели не приведет к рассогласованию результатов, рассчитанных на базе сформированной модели и полученных в реально функционирующей экономической системе. Таким образом, отпадает необходимость использования всех без исключения признаков объекта (системы), что значительно усложнило бы как сам процесс моделирования, так и работу с моделью. Но при построении модели нельзя ограничиться только определяющими признаками, необходимо учитывать также и специфические. Иначе модель потеряет связь с реальной системой и вследствие этого не сможет быть использована.

Отображение изучаемой системы как совокупности определяющих ее элементов, существенных с точки зрения поставленной цели, и взаимосвязей между ними гомоморфно (подобно) данной системе. Результатом этой работы является создание образа системы или какого-либо процесса. Этому образу строго соответствует построенная модель. В этом случае мы говорим об адекватности (изоморфизме) образа системы и ее модели.

Порядок построения модели можно представить следующей схемой (рис. 1.1).

Построение модели — очень сложный и трудоемкий процесс как в методологическом (в смысле идеологии), так и в техническом (в части исполнения) плане.

Модель призвана заменить реально существующую систему, поэтому она должна быть рабочей, действующей, что обеспечивается соблюдением ряда основных требований, сформулированных на базе основополагающих кибернетических принципов, теоретических разработок по моделированию систем, анализу и оценке опыта функциони-

рования различных моделей при решении конкретных задач управления. К числу указанных требований относятся: 1) четкость постановки цели; 2) обязательность представления взаимосвязей и взаимозависимостей в формализованном виде; 3) целесообразная степень упрощения при отображении реальной экономической системы; 4) соответствие поставленной цели; 5) обеспечение необходимой надежности.

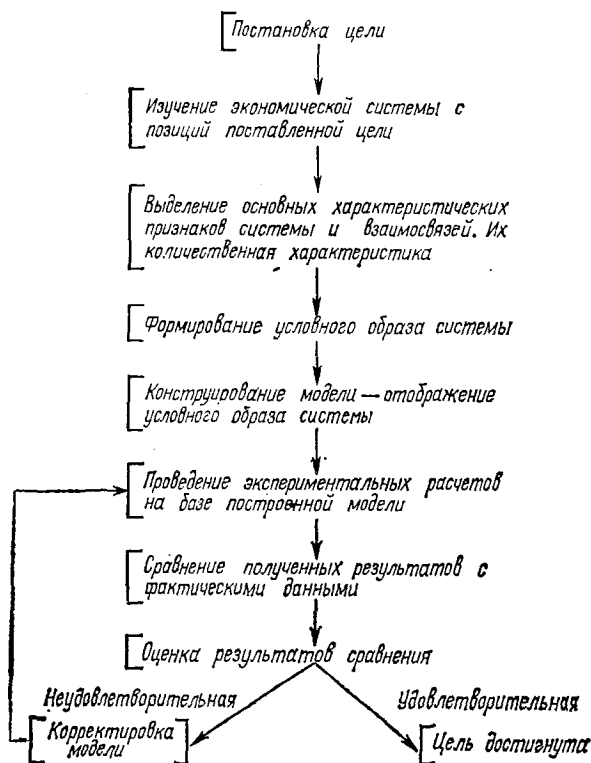


Рис. 1.1. Схема построения модели

Перечисленные требования нельзя рассматривать как самостоятельно действующие и изолированные друг от друга; только комплексный их учет обеспечивает качество модели и обоснованность полученных с ее помощью результатов.

Четкость постановки цели занимает особое место в комплексе требований, предъявляемых к моделям. Поставленная цель определяет состав и количественную характери-

стику основных определяющих систему элементов. Нечеткость постановки (размытость) цели исключает однозначный набор определяющих систему элементов, не позволяет выделить в комплексе взаимосвязей и взаимозависимостей этих элементов основные, определяющие достижение данной цели. Следовательно, при нечеткой постановке цели появляется не только вероятность создания модели системы, не отвечающей истинной цели, но и возможность принятия на ее основе ошибочных управленческих решений.

Обязательность представления взаимосвязей и взаимозависимостей в формализованном виде обеспечивает выполнение расчетов, связанных с выработкой управленческого решения, на основе строгих математических зависимостей. Тем самым гарантируются объективность и обоснованность результатов расчета, а следовательно, и эффективность управленческого решения. Несоблюдение этого требования приведет к необходимости использования только логических умозаключений, носящих к тому же субъективный характер.

Целесообразность степени упрощения при отображении реальной экономической системы призвана обеспечить возможность работы с построенной моделью. Чрезмерное перенасыщение модели несущественными элементами, все более приближающими ее к реальной системе, может не только значительно усложнить процесс работы с моделью, но даже сделать эту работу невозможной. В то же время излишнее упрощение модели приведет к получению результатов, не свойственных реальной системе, так как существенные признаки и взаимосвязи элементов последней в сформированной модели будут потеряны.

Соответствие модели поставленной цели предопределяет выбор и включение в модель только основных, определяющих реальную экономическую систему элементов и установление между ними взаимозависимостей и взаимосвязей, обеспечивающих достижение поставленной цели и (или) оказывающих влияние на этот процесс. Несоблюдение рассматриваемого требования приведет к включению излишних элементов, которые неоправданно усложнят модель либо обусловят построение модели, на основе которой поставленная цель не может быть достигнута.

Обеспечение необходимой надежности модели призвано гарантировать безопасность работы с ней, достоверность получаемых результатов, допустимый интервал рассогла-

сования результатов моделирования с реальными показателями действующей экономической системы.

В последнее время все более широкое распространение получает использование так называемых *имитационных* моделей, особенностью построения которых является возможно точное отображение моделируемой системы. Это предопределяется тем, что имитационные модели широко используются в исследованиях, при выявлении и установлении тенденций и закономерностей развития той или иной системы. Применительно к экономическим системам это может быть, например, решение задачи наилучшего использования производственной мощности, трудовых, материальных ресурсов, системы создания и поддержания на нормальном уровне заделов, т. е. выработка различных стратегий планирования, регулирования хода производства и т. д. Для имитационного моделирования характерно широкое использование математического аппарата и вычислительной техники.

2. Классификация и область эффективного применения экономико-математических методов в планировании

В глобальной системе управления народным хозяйством страны планирование деятельности предприятия (объединения) является чрезвычайно важным звеном, определяющим в конечном счете результативность функционирования системы в целом. Именно на этом уровне управления осуществляется соединение основных составляющих производства — средств труда, предметов труда и самого труда; устанавливается и поддерживается необходимая пропорциональность между ними, что обеспечивает рациональность использования предприятием имеющихся ресурсов. Правильно сочетать эти элементы производства как в рамках предприятия в целом, так и по его отдельным составляющим — цехам, участкам, рабочим местам — важная задача обеспечения выполнения государственного планового задания. Рациональность ее решения определяется в известной мере эффективностью действующей системы планирования. Улучшение планирования — составная часть деятельности партии по руководству социалистической экономикой.

Особенностью решения задач планирования является необходимость учета при их решении множества переменных величин, характеризующих постоянно изменяющиеся производственные условия. А так как число сочетаний этих

величин в течение определенного времени — планового периода — может быть достаточно большим, то возможно существование значительного числа вариантов плановых решений. Отсюда большая размерность решаемых плановых задач. И тем не менее необходимо получить оптимальное или близкое к нему решение. В этих условиях простым перебором и сравнением всех возможных вариантов решения конкретной плановой задачи нельзя получить требуемый результат из-за огромной трудоемкости вычислений. Поэтому требуются специальные методы, позволяющие в приемлемые сроки с достаточной степенью обоснованности, с учетом особенностей конкретного производства выйти на искомое решение.

В процессе выработки плановых решений приходится формализовать зависимости между отдельными элементами экономической системы, применять математический аппарат, общие кибернетические закономерности и принципы, т. е. использовать экономико-математические методы.

Эффективное применение этих методов требует прежде всего их серьезного и глубокого изучения, а значит определенной систематики и классификации. Любая классификация подчинена целям исследования или анализа того или иного явления. В соответствии с целью выбирается и классификационный признак. Поскольку целью изучения экономико-математических методов являются раскрытие механизма их реализации, определение области наиболее эффективного использования, то в качестве классификационного признака можно принять, например, характер используемого математического аппарата. По этому признаку можно выделить методы классической и прикладной математики.

Методы *классической математики* включают математический анализ и теорию вероятностей. Методы математического анализа в свою очередь могут быть классифицированы на дифференциальное и вариационное исчисление. Эти методы целесообразно использовать при расчете параметров календарно-плановых нормативов — определении размеров партий деталей, длительности производственного цикла, величины заделов, а также при решении задач оперативного регулирования хода производства и т. д.

Группа методов *прикладной математики* очень обширна по номенклатуре. Включаемые в нее методы неоднородны по составу элементарных расчетов, способам их реализации, применяемым приемам и т. д. По общности указанных

признаков методы рассматриваемой группы можно далее классифицировать следующим образом: оптимального, линейного программирования, математической статистики, комбинаторные, теорий расписаний, игр, массового обслуживания, управления запасами, экспертных оценок.

Оптимальное программирование — это комплекс специальных методов, обеспечивающих в условиях множества возможных решений выбор такого, которое является наилучшим (оптимальным) по заданному критерию при определенных ограничительных условиях. Оптимальное программирование — действенный инструмент эффективного решения задач управления. В их числе — линейное, нелинейное, динамическое, стохастическое, выпуклое, квадратичное, параметрическое, блочное, целочисленное (дискретное) программирование и др. Название указанного комплекса методов обусловлено тем, что в процессе их использования получают оптимальные решения, но для выхода на такое решение необходимо выполнить ряд действий по определенной программе. В математике решаемые на оптимум задачи называются *экстремальными*, в них требуется отыскать максимум или минимум некоторой целевой функции.

Линейное программирование используется при решении задач в том случае, когда целевая функция и ограничительные условия выражены линейными зависимостями. Отыскиваемые при этом неизвестные переменные обеспечивают экстремум (минимум или максимум) целевой функции.

Изучение экономических явлений показывает, что в экономических системах зависимости, как правило, очень сложны и имеют нелинейный характер. Приведение этих зависимостей к линейным огрубляет и тем самым упрощает модель системы или явления. При этом в некоторых случаях такое упрощение не искажает существенно получаемых результатов и потому является приемлемым. В других же случаях получаемые результаты настолько далеки от реальности, что использование линейного программирования просто исключается. Использование при решении задач линейного программирования электронно-вычислительных машин позволяет включать в модель сотни и тысячи переменных, уравнений и неравенств.

Если в системе равенств или неравенств содержатся случайные элементы, но зависимости между переменными — линейные, то такая задача решается методами *стохастического программирования*.

Если при нахождении неизвестных переменных необходимо, чтобы одна из них или несколько принимали только целочисленные значения, то в этом случае при решении поставленной задачи необходимо использовать методы *целочисленного программирования*.

Названные экономико-математические методы используются при решении плановых задач, таких, например, как формирование специфицированной годовой производственной программы предприятия, распределение производственной программы по коротким плановым периодам, формирование оперативных производственных программ предприятия и его основных подразделений, составление сменно-суточных заданий, разработка календарных планов-графиков запуска-выпуска изделий (деталей).

Методы *нелинейного программирования* используются тогда, когда зависимости между переменными носят нелинейный характер. При этом возможны различные ситуации: целевая функция линейна, нелинейны ограничения; линейны ограничения (или хотя бы одно из них), а функция нелинейна; нелинейны и ограничения, и целевая функция. Задачи, решаемые методами нелинейного программирования, достаточно сложны, так как нет универсального метода их реализации. Этим объясняются весьма активные, особенно в последние годы, поиски специальных приемов и способов решения указанных задач. Этому в значительной степени способствует и использование современной быстродействующей вычислительной техники.

В числе методов нелинейного программирования можно выделить квадратичное и выпуклое программирование. *Выпуклое программирование* представляет собой совокупность специальных методов решения нелинейных экстремальных задач, у которых выпуклы либо целевые функции, либо ограничительные условия. Целью решения такого рода задач является отыскание такого множества переменных, которое обеспечивает минимум выпуклой функции или максимум вогнутой. *Квадратичное программирование* — это совокупность методов решения особого класса экстремальных задач, в которых ограничительные условия линейны, а целевая функция является многочленом второй степени. Для решения задачи квадратичного программирования могут также применяться методы решения общей задачи выпуклого программирования. Указанные группы методов нелинейного программирования используются при решении, например, задачи расчета показателей роста производительности труда с учетом различных факторов,

изменения издержек производства (общей величины и удельных) при росте объема производства и т. п.

Методы динамического программирования могут применяться для решения таких оптимизационных задач, в которых необходимо рассматривать процесс производства или управления в пространстве или во времени, т. е. в развитии. При этом процедура вычислений реализуется по своеобразной схеме: весь процесс поиска оптимального решения представляется в виде определенной последовательности шагов, для каждого из которых находится оптимальное решение, причем оптимальность определяется влиянием на последующие шаги. В основу использования методов динамического программирования положен принцип оптимальности, сформулированный американским математиком Р. Беллманом. Сам процесс поиска решения на базе рассматриваемых методов является многошаговым. При этом одна задача со множеством переменных заменяется многими задачами с небольшим (даже одной) числом переменных, что ощутимо снижает объем вычислений. Ограничительными условиями применения указанных методов являются следующие: итоговый оптимум является суммой оптимальных решений каждого из выделенных шагов, а состояние системы в рассматриваемый момент времени определяет выбор оптимального решения, причем на последнее не оказывают влияния состояния системы в предшествующие рассматриваемому моменты. Этими методами могут решаться задачи выбора момента времени замены оборудования при условии получения за период эксплуатации наибольшей прибыли, распределения различных видов ресурсов по производствам (например, между выпуском готовых изделий и запасных частей; между производством электродвигателей и бензоагрегатов) и т. д. В состав методов динамического программирования входят методы последовательного анализа вариантов, переработки списка состояний и др.

В моделях реальных экономических систем коэффициенты целевой функции или ограничительные условия могут являться не постоянными величинами, а изменяться от различных факторов в течение периода времени, для которого решается экстремальная задача: формирование производственной программы для предприятия, на котором ведется реконструкция; определение величины дополнительных капитальных вложений в условиях замены технологических процессов обработки деталей (изделий) и т. д.

Для реализации такого рода задач эффективно использовать методы *параметрического программирования*.

Модели, содержащие большое число показателей, очень сложны в реализации, поэтому в тех случаях, когда это возможно, их преобразуют в несколько моделей меньшей размерности. Тем самым разлагают задачу. Полученные локальные задачи решаются совместно по специальным правилам. Наиболее известными являются метод разложения Данцига—Вульфа и метод планирования на двух уровнях Карнаи—Липтака. Методы, позволяющие решать задачи в рассмотренном порядке, относятся к методам *блочного программирования*.

Методы математической статистики используются для нахождения и раскрытия закономерностей, свойственных большим совокупностям однородных объектов. При этом изучается не каждый элемент совокупности, а определенная выборка. Полученные характеристики такой выборки могут использоваться для сравнительной оценки элементов различных совокупностей или их характеристик, а также для установления связей между отдельными величинами и прогнозирования на этой основе развития системы в будущем. Математическая статистика включает: **корреляционный анализ, регрессионный анализ, дисперсионный анализ, факторный анализ** и др. Методы математической статистики широко используются при расчете параметров нормативов, при разработке текущих и перспективных планов, в анализе производственно-хозяйственной деятельности предприятий (объединений). Эти методы используются также при решении задач управления запасами, массового обслуживания.

Для решения таких задач, которые не могут быть реализованы классическими методами математического программирования (методами линейного, выпуклого программирования и др.), используются комбинаторные методы, например ветвей и границ. К рассматриваемым методам близко подходят эвристические, основанные на опыте, интуиции исполнителя. Комбинаторные методы могут давать и точные, и приближенные решения.

Особую группу представляют задачи календарного планирования производства, при решении которых кроме соответствующего критерия качества расписания необходимо выполнить требование соблюдения определенных технологических условий. Такими задачами являются закрепление деталей за оборудованием во времени, сбалансированность работы конвейера и др. Эти задачи решают-

ся методами теории расписаний, дающими оптимальное (методы дискретного и динамического программирования) или приближенное (эвристические или случайного поиска) решение.

Когда приходится принимать решение в условиях неопределенности, причем такое решение должно обеспечивать наибольший эффект или наименьшие потери, целесообразно пользоваться методами теории игр. Эти задачи могут решаться и другими методами, например линейного программирования.

В современных условиях все возрастающих масштабов производства важное значение приобретает решение проблемы оптимальной регламентации производства продукции различного вида, заготовок, степени их готовности на различных стадиях изготовления. Актуальность решения такого рода задач определяется их местом в системе управления, так как оптимизируемые запасы в конечном счете определяют затраты на производство и хранение. Разработкой методов решения этих задач занимается *теория управления запасами*.

ГЛАВА 2

МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ

1. Матрица и ее основные элементы.

Виды матричных моделей

Матричные модели представляют собой модели, построенные в виде таблиц (матриц). Эти модели находят широкое использование при решении плановых и экономических задач, обработки больших массивов информации.

Операции над матрицами изучаются в матричной алгебре, или алгебре матриц. Методы матричной алгебры применяются в нормативных экономико-математических моделях, во многих разделах математической статистики, линейном программировании. Операции с матрицами не слишком громоздки. Матричную алгебру во многих случаях ценят именно за краткость, простоту и ясность.

Числа или другие величины, необходимые для решения задач с помощью матричного моделирования, представляются в виде специальных таблиц или массивов чисел.

Матрица — это *прямоугольная таблица чисел или других величин*. Чаще других в матрицах используются действительные числа (положительные, отрицательные или нули).

Рассмотрим следующий пример. Три инструментальных завода страны выпустили в 1983 г. продукцию трех наименований в определенном количестве, шт.:

	Завод № 1	Завод № 2	Завод № 3
Фрезы	500	800	600
Сверла	400	700	300
Метчики	200	900	100

Эти данные можно записать в форме массива чисел:

$$\begin{pmatrix} 500 & 800 & 600 \\ 400 & 700 & 300 \\ 200 & 900 & 100 \end{pmatrix}$$

Содержательное значение каждой величины этого массива определяется ее местом в общем массиве. Например, число 600 говорит о том, что завод № 3 выпустил в 1983 г. 600 фрез.

Записанный в круглых скобках массив чисел представляет собой матрицу. Такая форма записи чисел является весьма удобной для математической обработки.

Коэффициенты при неизвестных системы линейных уравнений также могут быть выделены в отдельную матрицу. Например, для системы уравнений

$$\begin{cases} 3x - 5y + z = 14 \\ x + 3y - 7z = -22 \\ 2x + y - 3z = -6 \end{cases}$$

матрица коэффициентов будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Матрицы коэффициентов — инструмент решения задач линейного программирования. Любое число такого массива называется элементом матрицы. Ряд чисел, расположенных в матрице горизонтально, называется *строкой* матрицы, вертикально — *столбцом*.

Количество строк в матрице обозначается обычно m , количество столбцов — n . Когда в матрице число строк равно числу столбцов, т. е. $m=n$, то такая матрица называется *квадратной*. Общие размеры матрицы определяются количеством строк и количеством столбцов. Размерность матрицы определяется произведением $m \times n$. Это произведение определяет общее число элементов в матрице. Размеры квадратной матрицы определяются величиной m , которая называется ее порядком.