К. С. Демирчян, В. Л. Чечурин

МАШИННЫЕ РАСЧЕТЫ ЭЛЕКТРО-МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

учебное пособие для вузов

ВШ

К. С. Демирчян, В. Л. Чечурин

МАШИННЫЕ РАСЧЕТЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов электротехнических и энергетических специальностей вузов

Москва · Высшая школа · 1986

ББК 32.97
Д30
УДК 681.3

Рецензенты:

кафедра «Теоретические основы электротехники» Ленинградского института авиационного приборостроения (зав. кафедрой проф. П. Ю. Каасик), проф. Московского электротехнического института связи С. Д. Купалян.

Демирчян К. С., Чечурин В. Л.

Д30 Машинные расчеты электромагнитных полей: Учеб. пособие для электротехн. и энерг. спец. вузов. — М.: Высш. шк., 1986. — 240 с.; ил.

В пер.: 80 к.

В книге изложены методы расчета на ЭВМ полей в однородных, кусочно-однородных, неоднородных линейных и нелинейных средах, показаны особенности их применения для расчета стационарных и квазистационарных электромагнитных полей, проведено сопоставление различных методов расчета.

Д $\frac{2302010000-141}{001(01)-86}$ 123—85

ББК 32.97
6Ф7

Камо Серопович Демирчян,
Владимир Леонидович Чечурин

МАШИННЫЕ РАСЧЕТЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Заведующая редакцией Л. А. Романова. Редактор Е. М. Романчук. Младший редактор И. А. Исаева. Художественный редактор Т. М. Скворцова. Художник В. В. Гарбузов. Технический редактор З. В. Нуждина. Корректор В. В. Кожуткина.

ИБ № 4873

Изд. № ЭР—374 Сдано в набор 24.01.85. Подп. в печать 20.01.86. Формат 60×90¹/₁₆. Бум. офс. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 15 усл. печ. л. 15 усл. кр.-отт. 14,51 уч.-изд. л. Тираж 7000 экз. Зак. № 93. Цена 80 коп.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.

Ярославский полиграфкомбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 150014, Ярославль, ул. Свободы, 97.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Построение материально-технической базы коммунизма неразрывно связано с постоянным ростом производительности труда, научно-техническим прогрессом, эффективностью и интенсификацией производства и т. д. Для успешного решения этих проблем необходимы создание более совершенных технологических процессов, устройств и установок, теоретически новый подход к реализации поставленных задач. Так, для осуществления Энергетической программы, создания нового высокопроизводительного электротехнического оборудования, устройств и установок, основанных на использовании свойств электромагнитных полей, приходится реализовать не только уже поставленные и, казалось бы, решенные задачи, но и переходить к изучению новых, которые до настоящего времени решались приближенно и часто только качественно.

Электронные вычислительные машины (ЭВМ) находят все большее применение во всех областях науки и техники, даже там, где еще не использовались количественные методы исследований. Выдвигаемые практикой задачи электротехники уже не могут быть решены без применения ЭВМ, что влечет за собой видоизменение методов расчета электромагнитного поля, электрических и магнитных цепей. По этой причине большую ценность приобретает изучение и разработка новых методов расчета электромагнитных полей, ориентированных на реализацию на ЭВМ определенного вида. Такие методы эффективно развиваются в последние годы, причем с усложнением самих ЭВМ изменяются и методы численных расчетов полей.

Разнообразие практических задач приводит к тому, что применение единого численного метода для их решения невозможно. Каждый из известных численных методов расчета целесообразно использовать для решения определенного круга задач. Например, методы численного расчета электромагнитных полей являются направленными, так как один и тот же подход может быть эффективным для решения задач одного вида и малоэффективным для задач другого типа. Знание методов численного расчета электромагнитных полей, умение правильно выбрать и применить метод, оценить погрешности получаемого решения необходимы каждому студенту.

Книга является первым учебным пособием, в котором изложены хорошо известные и широко применяемые на практике методы численного расчета электромагнитных полей в электроэнергетических устройствах. Для изучения рассмотренных в книге вопросов необходимо знание курсов «Высшая математика» и «Теоретические основы электротехники» в объеме высших технических учебных заведений.

Книга состоит из введения, где анализируются связи и соотношение аналитических и численных методов расчета электромагнитных полей, рассматриваемые в пособии задачи, возможность использования современных ЭВМ для решения задач по теории поля, и трех разделов. В первом разделе (главы 1, 2) приводятся фундаментальные решения уравнений поля в однородной среде и излагается оригинальный метод перехода от вихревых полей к потенциальным (квазипотенциальным), применение которого оказывается эффективным при численных расчетах как стационарных, так и квазистационарных полей. Во втором разделе (главы 3—6) рассмотрены вопросы применения основных методов (сеток, конечных элементов, вторичных источников) для расчета стационарных полей в кусочно-неоднородных и кусочно-однородных средах. Третий раздел (главы 7, 8) посвящен численным расчетам переменных электромагнитных полей в линейных и нелинейных средах. В нем проанализированы особенности, возникающие при использовании изложенных во втором разделе методов расчета переменных полей и вихревых токов, а также стационарных полей в нелинейных средах.

Приведенные в книге программы расчета стационарных полей методами конечных элементов, вторичных источников и эквивалентных зарядов носят учебный характер и могут использоваться для исследования свойств численных методов при решении представляющих не только академический интерес задач.

Авторы выражают глубокую признательность рецензентам — сотрудникам кафедры «ТОЭ» Ленинградского института авиационного приборостроения (зав. кафедрой проф. П. Ю. Каасик), проф. Московского электротехнического института связи С. Д. Купаляну за полезные советы и замечания, а также канд. техн. наук Р. П. Кияткину, инженерам Ю. П. Кизимовичу и Б. А. Решко за предоставленные программы.

Замечания и предложения по книге просим направлять по адресу: 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14, издательство «Высшая школа».

Авторы

При любом методе количественной оценки параметров электромагнитного поля необходимо выполнение численных расчетов. В этом смысле степень использования ЭВМ для расчетов полей определяется требованиями к полноте расчетов и принятым методом. Даже если применяется аналитический метод решения задачи, для получения численных результатов приходится на последнем этапе использовать ЭВМ. Применение численных методов предполагает запись подлежащих решению уравнений в пригодном для численной реализации виде и нахождение этих решений с помощью методов вычислительной математики. При этом основные затраты времени и средств приходятся на этап составления и анализа алгоритмов, программирования и отладки программ, анализа погрешности результатов.

При решении задач аналитическими методами переработка исходной информации производится только один раз, так что для получения конкретного численного результата нет необходимости повторять вывод формул и уравнений. Кроме того, при аналитическом решении имеется возможность качественного анализа влияния того или иного входящего в решение параметра на интересующую величину или функцию. Преимущества численных методов решения заключаются в том, что они позволяют получить искомый результат с учетом реальных свойств материалов и геометрии всех входящих в расчетную область тел. Отказ от упрощающих геометрию тел допущений и учет свойств (в частности, нелинейных и анизотропных) материалов позволяет получить решение задач с требуемой точностью. Каждый из методов (аналитический или численный) имеет свои преимущества, в связи с чем при использовании одного из них следует по возможности учесть достоинства другого метода. Поэтому при решении задач расчета электромагнитных полей численными методами стремятся использовать аналитические решения, особенно на начальном этапе, при постановке задачи, что имеет исключительно важное значение.

Аналитические методы расчета поля применимы при решении задач в областях простой геометрии с однородной либо кусочно-однородной средой. Для получения аналитических решений иногда упрощают геометрию области и входящих в нее тел, а также изменяют свойства материалов, переходя от реальных, обладающих нелинейными характеристиками, к идеальным, т. е. линейным. Такие методы, как метод разделения переменных, метод комплексного потенциала, метод зеркальных изображений, относят к аналитическим, потому что даваемые ими решения позволяют по их виду анализировать влияние на конечный результат входящих в них параметров либо требуют выполнения численных расчетов по формулам. Граница разделения аналитических и численных методов условна. Действительно, если разностные методы относятся к численным, то вариационные обладают свойствами как аналитических, так и численных методов и приближаются к тем или другим в зависимости от модификации метода. Например, для одного типа задач метод Ритца можно рассматривать как аналитический, а для другого — как численный. Аналогичная ситуация возникает при использовании метода разделения переменных.

Если аналитические методы позволяют получить решения в пригодном для анализа и обобщений виде, то лишь совокупность численных расчетов многих вариантов дает возможность такого анализа. Трудоемкость численных расчетов поля, а также рассмотренные особенности аналитических и численных методов подтверждают целесообразность максимального использования аналитических преобразований и решений.

Особенности численных методов преобразования информации определяются необходимостью применения ЭВМ, возможности которых ограничены. Из-за конечного числа разрядов, которыми представляются числа в ЭВМ, возникают ошибки, связанные с округлением чисел. При выполнении арифметических операций может происходить накопление погрешностей, обусловленных ограниченным числом разрядов (например, при сложении значительно отличающихся или вычитании близких величин). Современные ЭВМ характеризуются хотя и большим быстродействием (десятки миллионов операций в секунду), но недостаточным для решения многих практических задач расчета полей. Поэтому время решения таких задач велико. Еще одна особенность численных методов решения заключается в небходимости затрат на составление и отладку программ, решение контрольных задач.

В одной книге невозможно изложить численные методы, которые применяют для расчетов электромагнитных полей в технике. Рассматриваемые методы ориентированы на решение ограниченного круга задач, прежде всего задач, в которых допустимо пренебрежение излучением электромагнитного поля, т. е. токами смещения в проводниках и окружающем их пространстве. Будем считать распределение объемной плотности электрического заряда $\rho(x, y, z)$ в пространстве заданным. Задачи, связанные с учетом движения свободных под действием сил электромагнитного поля зарядов, не рассматриваются. Случай, когда принимается во внимание плотность тока переноса $J = \rho v$, не разбирается. Для его анализа следует учитывать такие законы движения, как механические, магнитогидродинамические и др. Будем полагать, что диэлектрические и ферромагнитные тела характеризуются в общем случае нелинейными и анизотропными свойствами, т. е. характеристики сред μ_r, γ, ε_r — нелинейные тензорные функции напряженности поля. Рассматриваемые среды будем считать сплошными, так что при движении все элементы тел имеют одну и ту же скорость (угловую или линейную v). Расчет электромагнитных процессов в плазме не дается.

Электромагнитное поле в каждой точке пространства определяется векторами электрического смещения **D**, магнитной индукции **B**, напряженностей электрического **E** и магнитного **H** полей. Как указывалось, не будем рассматривать движение заряженных тел под действием сил поля, в связи с чем функция v является заданной. Принимая во внимание специфику решаемых задач, полагаем $\rho v = 0$. Пренебрежение токами электрического смещения и их магнитным полем позволяет под плотностью тока понимать лишь плотность тока проводимости $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$. Таким образом, система уравнений электромагнитного поля в дифференциальной форме принимает вид

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{H} = \mathbf{J} - \mathrm{rot}\left[\mathbf{v},\ \mathbf{D}\right];\quad \mathrm{rot}\, \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathrm{rot}\left[\mathbf{v},\ \mathbf{B}\right];$$

$$\mathrm{div}\, \mathbf{B} = 0;\ \mathrm{div}\, \mathbf{D} = \rho;\ \mathbf{B} = (\mu_a)\,\mathbf{H};\ \mathbf{D} = (\varepsilon_a)\,\mathbf{E};\ \mathbf{J} = (\gamma)\,\mathbf{E},$$

где μ_a, ε_a, γ — тензоры, характеризующие свойства сред. Знак [,] означает векторное произведение соответствующих величин. Так как электротехнические материалы обладают нелинейными и анизотропными свойствами, то материальные уравнения $\mathbf{B} = (\mu_a)\mathbf{H}$, $\mathbf{D} = (\varepsilon_a)\mathbf{E}$, $\mathbf{J} = (\gamma)\mathbf{E}$ являются нелинейными и, следовательно, вся система дифференциальных уравнений также нелинейной. Особенностью этих уравнений является то, что характеристики сред резко изменяются в зависимости от координат. Такое изменение может происходить на границе воздуха с параметрами ε_0, μ_0 с диэлектриками и ферромагнетиками с параметрами ε_a, μ_a. Например, для ферромагнитного материала относительная магнитная проницаемость μ_r может изменяться от единиц до десятков тысяч и, следовательно, магнитная проницаемость изменяется скачком на границе раздела сред. Скачкообразное изменение параметров сред ведет к резкому изменению поля в точках, лежащих на поверхностях тел. Так как на границах раздела сред искомые функции разрывны, то погрешность аппроксимации уравнений в этих точках, т. е. погрешность замены непрерывных уравнений дискретными, повышается. Явление неравномерности распределения поля в ферромагнитных проводниках, характерное для электротехнических устройств, ведет, как и при аппроксимации разрывных функций, к росту погрешности численного решения. Разрывность коэффициентов уравнений, а также явление резкой неравномерности распределения поля помимо роста погрешности при аппроксимации ухудшает свойства численно решаемых уравнений. Это проявляется в медленной сходимости используемых при решении уравнений итерационных процессов, а также в потере точности за счет усиления влияния ошибок округления при численных решениях уравнений прямыми методами.

На практике требуется расчет трехмерных полей, когда число определяемых в совокупности точек неизвестных достигает сотен тысяч. Алгоритмы обработки такого объема информации предъявляют жесткие требования как к самим ЭВМ, так и к методам решения системы уравнений электромагнитного поля. Для решения нестационарных задач, когда к пространственным координатам добавляется временна́я, необходимо еще большее увеличение объема обрабатываемой информации и ужесточение предъявляемых к ЭВМ требований. Технические возможности современных ЭВМ не позволяют рассчитать трехмерные нестационарные поля с требуемой точностью. Если учесть, что при поиске оптимальных конструкций производят расчет многих вариантов, то уменьшение времени расчета одного варианта становится первостепенной задачей.

Современное состояние развития ЭВМ, достигнутые характеристики вычислительных систем можно считать обнадеживающими. Например, построены ЭВМ с быстродействием до 800 млн. оп/с при вычислениях с 72-разрядными числами и объемом оперативной памяти до $3{,}2\cdot 10^7$ байт. В перспективе ЭВМ будут иметь быстродействие до 10^9 оп/с и объем оперативной памяти до 10^9 байт. Для оценки возможностей таких ЭВМ при решении задач расчета полей будем полагать в первом приближении, что объем оперативной памяти равен $ОП = N^S$ (N — число интервалов, на которое разбивается пространственный габаритный размер расчетной области; S — число пространственных переменных), а число необходимых для решения задачи арифметических операций $АО = 10\cdot N^{S+1}$. При решении трехмерных задач $S = 3$. Если каждый габаритный размер области разделен на 1000 интервалов, то $N = 10^3$. В этом случае область содержит N^3 элементарных объемов. Если каждому такому объему соответствует одна переменная (скаляр), то следует располагать памятью с N^3 ячейками. Если для решения задачи следует произвести N переборов и около 10 арифметических операций при обработке каждого уравнения для элементарного объема, то число арифметических операций составит около $10\cdot(10^3)^{3+1} = 10^{13}$. ЭВМ с быстродействием 10^9 оп/с решит такую задачу за 10^4 с (2,5—3 ч). Такая оценка оптимистична, поскольку подразумевается, что ЭВМ имеет оперативную память 10^9 слов ($4 - 9\cdot 10^9$ байт при длине слова 32—72 разряда). Если потребитель не располагает такой памятью, то хранить данные приходится на магнитных дисках. Так как скорость обмена лежит в этом случае в пределах 4—10 Мбит/с, то обращение к дисковой памяти значительно (на несколько порядков) снижает скорость вычислений. Точность решения задач (определяемая числом N), их размерность S и приемлемое время расчета связаны соотношением

$$\log N \leqslant \frac{8 + \log Б + \log T}{S + 1},$$

где $Б$ — быстродействие, 10^6 оп/с; T — допускаемое время решения, 10^3 с. При $N = 10$ имеем грубое, при $N = 10^2$ — приемлемое, а при $N = 10^3$ — практически точное решение. Следовательно, для ЭВМ с быстродействием 10^6 оп/с ($Б = 1$) за время $T = 1$ (10^3 с) можно решить трехмерную стационарную (либо двумерную нестационарную) задачу ($S = 3$) с достаточной точностью ($\log N = 2$; $N = 10^2$). ЭВМ с быстродействием 10^7 оп/с позволяет решить трехмерную нестационарную задачу при $N = 10^2$ за 10^4 с ($\sim$3 ч). Действительно, при $Б = 1$, $T = 1$, $S = 4$ получаем $\log N = 2$. Время решения можно оценить как $t = 10^{-5}\cdot N^{S+1} Б^{-1}$. Время решения трехмерной стационарной задачи при $N = 100$ ($S = 3$) и быстродействии ЭВМ $3 \cdot 10^5$ оп/с ($Б = 0{,}3$) составляет $t = 3{,}3 \cdot 10^9$ с $\approx$ 1 ч. На практике время решения будет больше полученного из-за особенностей как самой задачи, так и метода и алгоритма ее решения.

В связи с изложенным при выборе метода и алгоритма решения задачи большое внимание следует уделять анализу тех методов, которые позволяют ограничиться использованием только оперативной памяти ЭВМ, а также таких алгоритмов, которые дают возможность в условиях обращения к накопителям на дисках уменьшить время вычислений. Важное значение имеет также организация вычислительного процесса при решении задач расчета полей. Все это с учетом нелинейности и разрывности свойств среды предъявляет специфические требования к численному решению и определяет необходимость применения таких численных методов расчета, которые в наибольшей мере учитывали бы особенности решаемых задач.

В частных случаях система уравнений упрощается, что приводит к упрощению численного решения соответствующих уравнений. Особый интерес представляют задачи расчета электромагнитного поля, изменяющегося во времени по гармоническому закону ($v = 0$). Для комплексных значений переменных система уравнений поля принимает вид

$$\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}};\ \mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{E}} = -j\omega\dot{\mathbf{B}};\ \mathrm{div}\,\dot{\mathbf{B}} = 0;$$

$$\mathrm{div}\,\dot{\mathbf{D}} = \dot{\rho};\quad \dot{\mathbf{B}} = (\mu_a)\,\dot{\mathbf{H}};\quad \dot{\mathbf{D}} = (\varepsilon_a)\,\dot{\mathbf{E}};\quad \dot{\mathbf{J}} = (\gamma)\,\dot{\mathbf{E}}.$$

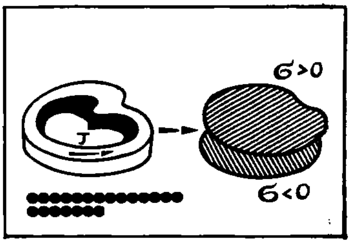
При введении комплексных значений переменных расчету подлежат действительная и мнимая части неизвестных. Это приводит к удвоению числа неизвестных при численном решении алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами. Решение уравнений для проводящих сред характеризуется параметром $\alpha^2 = j\omega\mu_a\gamma$, определяющим степень проявления поверхностного эффекта. С ростом параметра α^2 происходит уменьшение интенсивности электромагнитного поля в глубине проводящих массивов, что при неизменной степени дискретизации приводит к возрастанию погрешности аппроксимации и численного решения.

Исходная система уравнений еще больше упрощается при расчете статических и стационарных полей, когда $v = 0$; $\partial/\partial t = 0$. В этом случае можно раздельно рассчитать электрическое поле в диэлектрике и проводящей среде, а также магнитное поле.

Важно отметить, что число неизвестных определяется числом составляющих искомых векторов. Для численных расчетов эффективно введение потенциалов поля и аналитическое преобразование исходных уравнений. Отличительная особенность таких преобразований заключается в сохранении существенных свойств задачи: нелинейности и анизотропии материалов, действительной геометрии тел. Введение потенциалов целесообразно и при выполнении расчетов численными методами. Хотя быстродействие и память ЭВМ позволяют численно решать системы уравнений большой размерности, т. е. решать уравнения, записанные относительно напряженностей поля, усложнение задач, повышение требований к точности расчетов делает целесообразным переход к уравнениям относительно потенциалов, что сокращает число неизвестных и упрощает решение. Известно несколько видов потенциальных функций, с помощью которых можно определить векторы **E**, **H**. Используя тождество $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, X = 0$, получим $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\, u$ (из уравнения $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0$); $\mathrm{H} = -\mathrm{grad}\, u_{\text{м}}$ (из уравнения $\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = 0$). С помощью тождества $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{Y} = 0$ найдем: $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ (из уравнения $\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$); $\mathbf{D} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}_{\text{э}}$ (из уравнения $\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 0$), $\mathbf{J} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}_{\text{т}}$ (из уравнения $\mathrm{div}\,\mathbf{J} = 0$). Рассмотренные тождества определяют также и способ вычисления векторов поля через потенциалы. Они показывают, что введение векторного магнитного **A** и векторного потенциала тока $\mathbf{A}_{\text{т}}$ не связано с какими-либо ограничениями. Введение других потенциалов возможно лишь в областях, где отсутствуют заряды ($\mathbf{A}_{\text{э}}$), токи ($u_{\text{м}}$) или изменяющееся магнитное поле (u). Напряженности поля в общем случае определяются через несколько потенциальных функций. Например, $\mathbf{E} = -\partial\mathbf{A}/\partial t - \mathrm{grad}\, u$ (из уравнений $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$; $\mu_a\mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$). Напряженности **E**, **H** выражают и через потенциалы $\mathbf{A}_{\text{т}}$, u: $\gamma\mathbf{E} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}_{\text{т}}$; $\mathbf{H} = \mathbf{A}_{\text{т}} - \mathrm{grad}\, u_{\text{м}}$ (из уравнений $\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J}$; $\mathbf{J} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}_{\text{т}}$). Введение потенциалов приводит к упрощению решаемых уравнений вследствие уменьшения числа неизвестных. Так, при расчете плоскопараллельных и плоскомеридианных полей и использовании векторов напряженности поля расчету подлежат две составляющие напряженности поля. Число неизвестных равно $2n$, если n — число точек, в которых следует рассчитать поле. В то же время при использовании потенциалов число неизвестных сокращается до n. Поэтому введение потенциальных функций при расчете трехмерных полей должно быть эффективным. Однако ряд особенностей, связанных с реализацией граничных условий и решением алгебраических уравнений, заставляет анализировать потенциальные функции с целью выбора наиболее подходящих из них.

Раздел первый

Статические и стационарные поля в однородной среде



При расчете электрических и магнитных полей, когда проницаемости μ_a, ε_a постоянны и не зависят от координат, можно применить аналитические решения уравнений поля для численного определения его характеристик. Но даже в этом наиболее простом случае возможности аналитических методов ограничены и приходится переходить к численному расчету интегралов от плотностей источников по объемам, поверхностям, линиям. Интерес к изучению поля в однородной среде обусловлен также тем, что некоторые методы, применяемые для расчета поля в неоднородной среде, основаны на замене неоднородной среды на однородную. При этом рассчитывают потенциалы и напряженности поля в однородной среде и производят численный расчет интегралов.

Одним из способов аналитического преобразования уравнений магнитного поля является их предварительное сведение к уравнению относительно скалярного либо векторного магнитного потенциала. На практике для численных расчетов магнитного поля в однородной среде применяют также метод непосредственного вычисления напряженности поля с помощью формулы Био—Саварра.

При расчете магнитного поля, источником которого является электрический ток, метод, основанный на введении скалярного магнитного потенциала, малоэффективен (при традиционном подходе к его использованию) из-за невозможности учета вихревого характера поля. Исключение же областей с токами приводит к непреодолимым трудностям при формулировании краевых условий для скалярного магнитного потенциала. Сведение объемов с токами к поверхностям недопустимо упрощает задачу. Вместе с тем преимущества метода, при котором искомой является скалярная величина, а решаемое уравнение — скалярным, важны как с точки зрения общеметодической, так и с точки зрения численных расчетов. По этой причине в настоящем разделе основное внимание уделено методу, который позволяет распространить понятие скалярного магнитного потенциала и на области с токами.

Глава 1

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

§ 1.1. Использование фундаментальных решений уравнений для численного расчета трехмерных электромагнитных полей

Расчет электромагнитного поля в однородной среде связан с интегрированием по объемам элементарных или фундаментальных решений уравнений для потенциалов либо напряженностей поля. Потенциалы удовлетворяют уравнениям $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = -\varepsilon_a/\rho$; $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mu_a\mathbf{J}$, решения которых являются фундаментальными, если поле создается элементарным источником, занимающим бесконечно малый объем пространства. Учитывая, что фундаментальное решение уравнения для скалярного потенциала имеет вид $u = q/(4\pi\varepsilon_a r)$, можно написать

$$u = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\int\limits_V \frac{\rho dV}{r};\quad u = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\int\limits_S \frac{\sigma dS}{r},$$

где $dq = \rho dV$ или $dq = \sigma dS$. Используя фундаментальное решение уравнения относительно векторного магнитного потенциала, можно рассчитать потенциал $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_a}{4\pi}\int\limits_V \frac{\mathbf{J}dV}{r};\quad \mathbf{A} = \frac{\mu_a}{4\pi}\int\limits_S \frac{\mathbf{j}dS}{r}.$$

Напряженности поля целесообразно определять, рассчитывая предварительно производные потенциалов аналитически:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\int\limits_V \frac{\rho\mathbf{r}}{r^3}\,dV;\quad \mathbf{H} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \frac{[\mathbf{J},\,\mathbf{r}]}{r^3}\,dV.$$

Специфика решения задач расчета поля часто не позволяет непосредственно вычислять интегралы с помощью ЭВМ путем обращения к стандартным программам. Это связано, во-первых, с невозможностью аналитического задания функции распределения источников вследствие того, что плотность источников во многих задачах определяется в результате численного решения (при обращении к стандартным программам производится интерполяция плотности источников и время расчета возрастает); во-вторых, фундаментальные решения выражаются несобственными интегралами, расчет которых непосредственно по стандартным программам ведет к увеличению расчетного времени. Поэтому для расчета поля в точках, где плотность источников не равна нулю и подынтегральная функция обращается в бесконечность, с целью сокращения времени вычислений производят выделение особой точки.

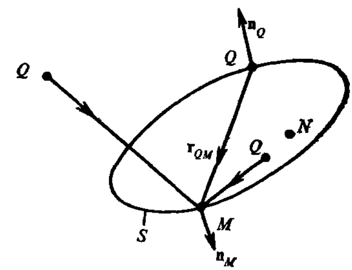


Рис. 1.1

Примем следующие обозначения (рис. 1 1): Q — точка, в которой рассчитывается потенциал или напряженность поля; M, N — точки расположения источников (точки Q и M могут совпадать, если поле вычисляется непосредственно в точке M); $\mathbf{r}_{QM}$ — вектор, направленный от Q и M, длина которого равна расстоянию между Q и M; $\mathbf{n}_Q$; $\mathbf{n}_M$ — единичные векторы, нормальные к поверхности в точках Q и M.

В общем случае плотности источников зависят от координат, так что при $\rho \neq \mathrm{const}$, $J \neq \mathrm{const}$ приходится рассчитывать объемные интегралы. Если плотности источников внутри объемов сохраняют постоянные значения, то можно перейти к поверхностным интегралам:

$$\mathbf{E}(Q) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a} \oint\limits_S \rho(M) \frac{d\mathbf{S}}{r_{QM}}; \quad \mathbf{H}(Q) = \frac{1}{4\pi} \oint\limits_S \frac{[\mathbf{J}(M), d\mathbf{S}]}{r_{QM}}.$$

Преобразование интегралов в поверхностные позволяет не только упростить расчет поля при наличии особенностей подынтегральных функций, но и ускорить его за счет снижения размерности области интегрирования. Переход к поверхностным интегралам неправомерен, если плотности источников не постоянны. Свободный от такого ограничения способ преобразования поля, позволяющий наряду с исключением особенностей при интегрировании перейти от векторных источников к скалярным, что упрощает расчет, рассмотрен в гл. 2.

Один из общих способов расчета интеграла $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, подынтегральная функция которого имеет особенность в точке $x = c$, заключается в представлении интеграла в виде

$$I = \int\limits_a^{c-\delta_1} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\delta_2}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{c-\delta_1}^{c+\delta_2} f(x)\,dx$$

и таком выборе величин δ_1, δ_2, чтобы последний интеграл удалось рассчитать с погрешностью $\beta/2$. Вычисляя каждый из первых двух интегралов с погрешностью $\beta/4$, находим интеграл I с погрешностью β. Изложенный способ выделения особенности используют для расчета потенциала и напряженности поля, выделяя часть пространства, включающую в себя особую точку, и вычисляя интеграл по выделенному объему ΔV или поверхности ΔS аналитически. В некоторых случаях подынтегральную функцию целесообразно разложить в ряд в окрестности особой точки.

Если заряд плотностью ρ распределен в объеме V, а точка Q, в которой рассчитывают потенциал, находится внутри V, то интеграл $u(Q) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\int\limits_V \frac{\rho(M)\,dV}{r_{QM}}$ можно представить в виде

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\sum_i \rho_i \int\limits_{\Delta V_i} \frac{dV_i}{r_{QM}} + \Delta u(Q)$$

где суммирование выполняют по объемам, в пределах которых $\rho_i = \mathrm{const}$. Слагаемое $\Delta u(Q)$ определяет ту часть потенциала в точке Q, которая обусловлена зарядом в объеме ΔV, включающем в себя точку Q. Если объем ΔV представляет собой сферу радиуса R, то $\Delta u(Q) = \frac{1}{2\varepsilon_a}\rho R^2$.

При расчете напряженности поля в особой точке Q можно записать

$$\mathbf{E}(Q) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\int\limits_{V-\Delta V} \frac{\rho(M)\,\mathbf{r}_{QM}}{r_{QM}^3}\,dV + \Delta\mathbf{E}(Q).$$

Значение $\Delta E(Q) = 0$, если объемом ΔV является, в частности, сфера, где $\rho = \mathrm{const}$. Если же внутри ΔV имеем $\rho \neq \mathrm{const}$, то $\Delta E(Q)$ рассчитывают с погрешностью $\beta/2$ для того, чтобы полная погрешность расчета $E(Q)$ не превысила β.

Приведенные формулы справедливы и при расчете магнитного поля, если в них заменить ε_a на μ_a и считать, что ρ — объемная плотность магнитного заряда. Если расчетным источником магнитного поля является электрический ток, то при вычислении напряженности магнитного поля в точке Q в соответствии с принятым способом можно, как и ранее, принять $\Delta H(Q) = 0$ при условии, что плотность тока неизменна в пределах объема ΔV.

При расчете напряженности магнитного поля, созданного намагниченным до значения $M(Q)$ ферромагнетиком, заполняющим объем V, его можно разбить на объемы ΔV, представляющие собой сферы радиуса R. Искомая напряженность поля в центре сферы есть сумма двух слагаемых: $H(Q) = H_1(Q) + \Delta H(Q)$, первое из которых определяется всеми источниками, за исключением расположенного в объеме ΔV, включающем точку Q, а второе характеризует напряженность поля, обусловленную заполняющими объем ΔV источниками. Для расчета $\Delta H(Q)$ предполагаем, что намагниченность среды в объеме ΔV однородна ($M = \mathrm{const}$). Учитывая, что коэффициент размагничивания шара $N = 1/3$, получаем $\Delta H(Q) = M(Q)/(3\mu_a)$. Аналогичный изложенному подход можно применить для расчета электрического поля поляризованной среды при заданном законе распределения поляризованности.

При расчете потенциала и напряженности поля, созданного поверхностным распределением источников, а именно простыми и двойными слоями зарядов, вычисляют интегралы, подынтегральные функ-

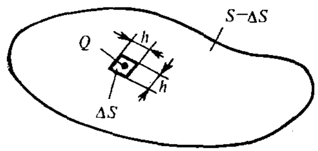


Рис. 1.2

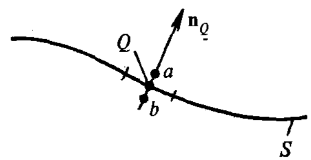


Рис. 1.3

ции которых также могут обращаться в бесконечность. Потенциал простого слоя зарядов плотностью $\sigma(M)$, расположенных на поверхности S, выражается интегралом

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a} \int\limits_S \frac{\sigma(M)\, dS}{r_{QM}}$$

имеющим особую точку при совпадении точек Q и M. Для ее выделения можно записать искомый потенциал в виде (рис. 1.2)

$$u(Q) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a} \int\limits_{S-\Delta S} \frac{\sigma(M)\, dS}{r_{QM}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_a} \int\limits_{\Delta S} \frac{\sigma(M)\, dS}{r_{QM}} = u_1(Q) + \Delta u(Q)$$

где ΔS — площадь выделенного участка поверхности. Если таким участком является диск радиуса R, то потенциал в центре диска $\Delta u(Q) \approx \sigma R/2\varepsilon_a$ ($\sigma = \mathrm{const}$).

Нормальную к поверхности составляющую напряженности поля можно рассчитать по формуле

$$E_n(Q) = \pm \frac{\sigma(Q)}{2\varepsilon_a} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_a} \int\limits_S \frac{\sigma(M) \cos(\mathbf{r}_{QM}\mathbf{n}_Q)}{r_{QM}^2} dS.$$

Знак перед первым слагаемым определяется тем, с какой стороны поверхности относительно принятого направления нормали рассчитывают $E_n(Q)$ (рис. 1.3). Если E_n вычисляют в точке a, лежащей в непосредственной близости от точки Q, то в формуле ставят знак плюс, если в точке b, то — минус. При численных расчетах второе слагаемое представляют обычно в виде суммы $\sum\limits_i \sigma_i \int\limits_{\Delta S_i} \frac{\cos(\mathbf{r}_{QM}\mathbf{n}_Q)}{r_{QM}^2} dS$, полагая $\sigma = \mathrm{const}$ на каждой из площадок ΔS_i.

Выбор способа вычисления потенциала, распределенного на поверхности двойного слоя зарядов, зависит от того, принадлежит ли точка Q, в которой его рассчитывают, поверхности или нет. Если точка Q не лежит на поверхности, то интеграл

$$u(Q) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\int\limits_S p(M)\frac{\cos(\mathbf{r}_{QM}\,\mathbf{n}_M)}{r_{QM}^2}\,dS$$

вычисляют приближенно путем замены его суммой интегралов по площадкам ΔS. При $Q \in S$ и совпадении точек Q и M

$$u(Q) = \pm\frac{p(Q)}{2\varepsilon_a} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\int\limits_S p(M)\frac{\cos(\mathbf{r}_{QM}\,\mathbf{n}_M)}{r_{QM}^2}\,dS.$$

Как и ранее, знак перед первым слагаемым определяется тем, с какой стороны двойного слоя рассчитывают потенциал (рис. 1.4), для точки a принимают знак плюс.

Нормальная к поверхности двойного слоя магнитных зарядов составляющая напряженности магнитного поля:

$$H_n(Q) = \frac{1}{4\pi\mu_a}\int\limits_S\left[3\frac{(\mathbf{r}_{QM},\ \mathbf{n}_Q)}{r_{QM}^5}(\mathbf{p}(M),\ \mathbf{r}_{QM}) - \frac{(\mathbf{p}(M),\ \mathbf{n}_Q)}{r_{QM}^3}\right]dS.$$

Для расчета H_n применяют рассмотренный способ выделения особой точки, заключающийся в представлении интеграла в виде двух слагаемых: $H_n(Q) = H_{n1}(Q) + \Delta H_n(Q)$, первое из которых не включает в область интегрирования содержащую точку Q площадку ΔS. Особенность вычисления второго слагаемого $\Delta H_n(Q)$ заключается в данном случае в том, что при $p(M) = \text{const}$ в пределах площадки ΔS интегрирование по поверхности ΔS можно заменить интегрированием по контуру этой поверхности, так как поле распределенного на ΔS двойного слоя зарядов эквивалентно полю охватывающего площадку контура с током. Если площадка представляет собой диск радиуса R, то в его центре $\Delta H_n(Q) = p(Q)(2\mu_a R)^{-1}$. При разбиении поверхности S на прямоугольники со сторонами a и b в центре тяжести прямоугольника

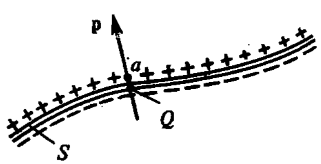


Рис. 1.4

$$\Delta H_n(Q) = \frac{2p(Q)}{\pi\mu_a}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}.$$

Подобный подход, заключающийся в выделении особой точки и аналитическом нахождении интеграла по выделенному элементу поверхности или объема, можно применить при расчете потенциала и напряженности поля для решения широкого круга задач.