ВЫСШЕЕ
ОБРАЗОВАНИЕ

В·В· ДОБРОНРАВОВ
Н·Н· НИКИТИН

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

В. В. ДОБРОНРАВОВ
Н. Н. НИКИТИН

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено Министерством высшего и среднего
специального образования СССР в качестве учебника
для студентов машиностроительных специальностей вузов

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1983

ББК 22.21
Д56
УДК 531

Рецензент

Кафедра Курского политехнического института
(зав. кафедрой — проф П. М. Алабужев)

Добронравов В. В., Никитин Н. Н.

Д56 Курс теоретической механики: Учебник для машиностроит. спец. вузов. — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. школа, 1983. — 575 с., ил.

В пер.: 1 р. 30 к.

Настоящий учебник написан на основе опыта преподавания курса теоретической механики в МВТУ им Н Э Баумана

В четвертом издании значительно перестроено изложение разделов «Статика» (введены элементы дедуктивного изложения материала при рассмотрении вопросов приведения и равновесия системы сил), «Кинематика» (в отдельный параграф выделена кинематика сложного движения точки при переносном поступательном движении) и часть «Динамики».

Предназначен для студентов машиностроительных специальностей вузов.

Д $\frac{1703020000-184}{001(01)-83}$ 39—83 ББК 22.21 531

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый учебник является результатом многолетней преподавательской деятельности авторов в Московском высшем техническом училище им. Н. Э. Баумана, выпускающем инженеров-конструкторов и исследователей по широкому кругу специальностей в области машиностроения и приборостроения.

Относительная краткость курса потребовала тщательного отбора теоретического материала и примеров, поясняющих основные разделы курса. В курс включен ряд дополнительных разделов. В динамике достаточно полно изложена общая теория малых колебаний механических систем с одной и двумя степенями свободы. В аналитической динамике даны канонические уравнения Гамильтона и принцип Остроградского—Гамильтона. Расширена глава «Динамика твердого тела с одной закрепленной точкой». Наряду с приближенной теорией гироскопа дополнительно изложена точная теория гироскопического момента при регулярной прецессии. В специальных главах изложены также элементы теории искусственных спутников и основные сведения по движению точки переменной массы.

Четвертое издание курса существенно отличается от предыдущего. В него внесены значительные изменения, обусловленные эволюцией преподавания курса теоретической механики в МВТУ за последние 15 лет, где он принят в качестве основного учебника. В новой редакции даны в «Статике» гл. 1 и 7; в «Кинематике» — 1,2,5; в «Динамике» — 2,3,6,8,10, а также часть гл. 1 и 5. Внесены изменения и в другие главы курса. Часть глав скомпонована по-новому В некоторые из переработанных глав включены новые примеры, характерные для домашних (курсовых) заданий, выполняемых студентами МВТУ.

Дополнительно в курс включено изложение основ механики сплошной среды, чтобы подготовить условия для последующего внесения части из основ в курс теоретической механики (особенно определения поля ускорений в переменных Эйлера по известному полю скоростей в «Кинематике» и теории напряжений в «Динамике»). Основы кинематики сплошной среды даны в разделе «Кинематика» (гл. 7). Введение в динамику сплошной среды приведено в разделе «Динамика» (гл. 13).

Настоящий «Курс теоретической механики» предназначен для студентов высших технических учебных заведений, готовящих инженеров конструкторского и исследовательского профилей различных специальностей. Но он может использоваться также студентами других специальностей.

Материал в учебнике распределен между авторами следующим образом. В.В. Добронравов написал. в «Статике» — гл 8; примеры 1,2 гл. 1; пример 2 гл. 7; в «Кинематике» — гл 6; в «Динамике» — гл. 11; § 10,11 гл. 6. Остальная часть курса написана Н.Н. Никитиным.

Сохранившуюся в третьем издании часть материала А. Л. Дворникова в связи с дальнейшей эволюцией курса теоретической механики пришлось переработать. Она дана в четвертом издании в новой редакции.

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

Все явления природы представляют собой движение различных форм материи. В теоретической механике рассматриваются только вещественные формы материальных объектов, таких, как материальные тела или в более общем случае сплошные среды, в отличие от таких форм материи, как заряд, электромагнитное поле и др. Материальность тел и сплошных сред в теоретической механике характеризуется массой и другими величинами, связанными с ней, понятия которых вводятся в динамике.

Всякое изменение материи называют *движением*. Одним из простейших является *механическое движение* — перемещение материальных объектов в пространстве с течением времени без рассмотрения физических свойств движущихся материальных объектов и их изменения в процессе движения Механическое движение обычно входит составной частью в более сложные виды движения материи.

В теоретической механике изучаются механические движения вещественных форм материальных объектов.

Пространство, время, как и материя, являются сложными понятиями. В теоретической механике используются их упрощенные понятия или модели. Пространство считается не зависящим от времени и движущейся в нем материи. Принимают, что оно обладает всеми геометрическими свойствами эвклидовой геометрии. Время считают универсальным, не связанным с пространством и движущейся материей. Его характеризуют каким-либо периодическим процессом, например периодом вращения Земли.

Наиболее общим методом изучения всех явлений природы и общества является диалектический метод, который, признавая опыт источником всех наших знаний, придает большое значение абстрактному мышлению, использующему модели явлений.

В теоретической механике широко используются математические методы, абстрактные понятия, модели явлений и законы логики, являющиеся составной частью диалектического метода.

Каждый раздел теоретической механики имеет в своей основе ряд понятий и аксиом, имеющих опытное происхождение. Вводя новые понятия и используя законы логики, получают следствия или теоремы в форме, удобной для практического применения.

Теоретическая механика все время развивается. По мере углубления наших знаний выявляются границы применимости теоретической механики, относительность ее понятий. Выяснилось, что аксиомы или законы классической механики Ньютона не абсолютны. Для материальных тел, скорости которых близки к скорости света, вместо классической механики следует применять механику специальной теории относительности. Классическая теоретическая механика ограниченно применима для изучения движения элементарных частиц атома, таких, как электрон, протон и др., для изучения движения которых следует применять квантовую механику.

Теоретическая механика широко применяется в технике (авиации, космонавтике, машиностроении, кибернетике и т. д.), особенно важное значение она имеет в настоящее время — время научно-технической революции для решения грандиозных задач, поставленных XXVI съездом КПСС.

На базе теоретической механики возникли и успешно развиваются многие науки, такие, как сопротивление материалов, теория упругости, гидродинамика, газовая динамика и др. В этих науках обычно к законам механики добавляются другие законы, характеризующие дополнительные свойства материальных тел. В сопротивлении материалов и теории упругости учитывается деформация тел и добавляется закон Гука о связи деформаций с силами. В гидродинамике учитывается скорость деформации и используется дополнительный закон о связи скоростей деформации и сил. В газовой динамике, кроме того, учитывается сжимаемость газа.

Теоретическая механика имеет свою историю становления законов и понятий. Она создавалась вместе с развитием техники под непосредственным влиянием развития производительных сил общества и всей человеческой культуры Теоретическая механика берет свое начало в глубокой древности, задолго до нашей эры.

Основы современной теоретической механики были заложены великими учеными Галилеем (1564—1642) и Ньютоном (1643—1727). Дальнейшее развитие теоретической механики связано с именами многих ученых, наиболее выдающиеся из которых Гюйгенс (1629 — 1695), Даламбер (1717—1783), Эйлер (1707—1783), Лагранж (1736—1813) и многие другие

Большой вклад в развитие современной механики внесли русские ученые, такие, как Остроградский (1801—1862), Жуковский (1847—1921), Ковалевская (1850—1891), Ляпунов (1851—1918), Циолковский (1857—1935) и др Своими исследованиями и открытиями они в значительной мере содействовали развитию механики и ее приложений в технике и естествознании. Плодотворно работают советские ученые и сейчас, продолжая славные традиции корифеев отечественной науки.

Теоретическая механика делится на три части — статику, кинематику и динамику. С т а т и к а — раздел теоретической механики, который изучает законы для сил при равновесии материальных (особенно твердых) тел, а также преобразования систем сил, приложенных к твердому телу. К и н е м а т и к а изучает чисто геометрические формы механических движений материальных объектов без учета условий и причин, вызывающих и изменяющих эти движения. В д и н а м и к е изучается движение материальных объектов в зависимости от сил, т. е. от действия на рассматриваемые материальные объекты других материальных объектов.

Раздел I

СТАТИКА

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ. СХОДЯЩИЕСЯ СИЛЫ

В статике твердого тела рассматриваются свойства сил, приложенных к твердому телу. В частности, изучается приведение сложных систем сил к более простому виду и устанавливаются условия равновесия различных систем сил.

Теоретическая механика, как и всякая другая наука, имеет свои понятия и определения, которые используются для формулирования ее аксиом и теорем. Статика базируется на аксиомах, из которых по законам логики, вводя новые понятия, получают все необходимые следствия в удобной для применения форме.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Материальной точкой называют простейшую модель материального тела любой формы, размеры которого достаточно малы и которое можно принять за геометрическую точку, имеющую определенную массу.

Механической системой называется любая совокупность материальных точек.

Абсолютно твердым телом (или *неизменяемой механической системой*) называют механическую систему, расстояния между точками которой не изменяются при любых взаимодействиях. Все тела в природе в той или иной мере деформируемы, но в некоторых задачах деформациями тел можно пренебречь, считая тела твердыми. При рассмотрении движения Земли вокруг Солнца ее можно считать абсолютно твердым телом и даже материальной точкой, хотя в действительности она не твердая, так как на ней есть океаны, воздушная оболочка и т. д.

Силой в механике называют меру механического действия одного материального объекта на другой, например на твердое тело со стороны других тел.

Меры действия бывают разные. Силой называют ту меру, которая, действуя на пружину динамометра в пределах ее упругости, деформирует эту пружину (сжимает или растягивает) п р о п о р ц и о н а л ь н о действующей силе. Таким образом, силы различной природы определяются через линейную силу упругости. Сила характеризуется точкой приложения, числовым значением и направлением действия, т. е. является *векторной величиной.* Механическое действие материальных тел друг на друга осуществляется при их соприкосновении (давление стула на пол в местах соприкосновения его ножек с полом) или как действие на расстоянии при посредстве силовых полей (притяжение Луны Землей и т. п.).

Силу как величину векторную обозначают какой-либо буквой со знаком вектора, например $\overline{F}$ или $\overline{P}$. Для выражения числового значения силы или ее модуля используется знак модуля от вектора, т. е. $|\overline{F}|$, $|\overline{P}|$, или те же буквы, но без знака вектора, т. е. F, P.

Системой сил называют совокупность сил, действующих на рассматриваемое тело или в более общем случае — на точки механической системы. Можно рассматривать систему сил, приложенных к одной материальной точке.

Системой сил, эквивалентной нулю (или *равновесной системой сил*), называют такую систему сил, действие которой на твердое тело или материальную точку, находящиеся в покое или двужущиеся по инерции, не приводит к изменению состояния покоя или движения по инерции этого тела или материальной точки.

Две системы сил называются эквивалентными, если их действие по отдельности на одно и то же твердое тело или материальную точку одинаково при прочих равных условиях, т. е, если одна система сил приводит твердое тело или материальную точку в какое-то движение, например, из состояния покоя, то другая система сил, эквивалентная первой, сообщит такое же движение. Движения, вызванные действием эквивалентных систем сил, имеют одинаковые характеристики для каждого момента времени. Условие эквивалентности двух систем сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n)$ и $(\overline{F}'_1, \overline{F}'_2, \ldots, \overline{F}'_k)$ выражают в форме

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n) \backsim (\overline{F}'_1, \overline{F}'_2, \ldots, \overline{F}'_k),$$

где n и k — число сил в системах.

Равнодействующей силой рассматриваемой системы сил называют силу, действие которой на твердое тело или материальную точку эквивалентно действию этой системы сил. Равнодействующая сила обозначается $\overline{R}^*$, и условие ее эквивалентности рассматриваемой системе сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n)$ выражается в виде

$$(\overline{R}^*) \backsim (\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n).$$

Равновесная система сил имеет равнодействующую, равную нулю.

Уравновешивающей силой заданной системы сил считается такая сила, добавление которой к заданной дает новую систему, эквивалентную нулю. Если $\overline{R}^{*\prime}$ является уравновешивающей силой системы сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n)$, то, согласно определению, она удовлетворяет условию

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n, \overline{R}^{*\prime}) \backsim 0.$$

В дальнейшем убедимся, что не всякая система сил имеет равнодействующую и уравновешивающую силы. Есть системы сил, которые не находятся в равновесии и не эквивалентны одной силе.

§ 2. АКСИОМЫ СТАТИКИ

Справедливость аксиом механики проверяется на опыте как непосредственно, так и по тем следствиям, которые из них получают.

I. **Аксиома о равновесии системы двух сил.** *Для равновесия системы двух сил, приложенных к точкам твердого тела, необходимо и достаточно, чтобы эти силы были равны по величине и действовали вдоль одной прямой, проходящей через точки их приложения, в противоположных направлениях* (рис. 1). Этой аксиомой устанавливается простейшая система сил, эквивалентная нулю. Если силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ находятся в равновесии, то, естественно, они образуют систему сил, эквивалентную

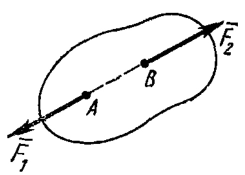

Рис 1

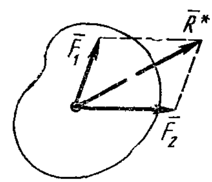

Рис 2

нулю. Действие такой системы сил на покоящееся твердое тело не изменяет состояния покоя этого тела. Аксиома справедлива и для сил, приложенных к одной точке тела или одной материальной точке.

II. **Аксиома о добавлении (отбрасывании) системы сил, эквивалентной нулю.** *Если на твердое тело действует система сил, то к ней можно добавить (отбросить) систему сил, эквивалентную нулю. Полученная после добавления (отбрасывания) новая система сил является эквивалентной первоначальной системе сил.* Под действием заданной системы сил и новой, полученной после добавления (отбрасывания) равновесной системы сил, тело будет двигаться (или находиться в покое) совершенно одинаково при прочих равных условиях В частности, к любой системе сил можно добавить (отбросить) простейшую равновесную систему сил, состоящую из двух равных по величине сил, действующих вдоль одной прямой в противоположных направлениях и приложенных в одной или разных точках твердого тела в соответствии с первой аксиомой.

III. **Аксиома параллелограмма сил.** *Две силы, действующие в одной точке твердого тела или на одну материальную точку, можно заменить одной равнодействующей силой, равной по величине и направлению диагонали параллелограмма, построенного на заданных силах* (рис. 2). Очевидно, справедливо и обратное. Одну силу, приняв за равнодействующую, можно разложить по правилу параллелограмма на две составляющие силы.

Эту аксиому долгое время в истории развития механики пытались доказать и, следовательно, считали теоремой. Тщательный анализ таких доказательств, часто очень остроумных, показал, что для этого обязательно используются положения, принимаемые за аксиомы.

Замену двух сил одной равнодействующей силой по правилу параллелограмма называют **векторным сложением** этих сил. Векторное сложение сил $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ математически выражают так:

$$\overline{R^*} = \overline{F_1} + \overline{F_2}.$$

Если силы $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ направлены по одной прямой в одну или противоположные стороны, то векторное сложение переходит в алгебраическое сложение.

Модуль равнодействующей силы R^* как величину векторной суммы сил вычисляют по формуле диагонали параллелограмма

$$R^* = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos(\widehat{\overline{F_1}, \overline{F_2}})}.$$

Применяя теорему синусов к одному из треугольников параллелограмма, определяют синусы углов, которые образует равнодействующая $\overline{R^*}$ с составляющими ее силами $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$:

$$\sin(\widehat{\overline{R^*}, \overline{F_1}}) = \frac{F_2 \sin(\widehat{\overline{F_1}\, \overline{F_2}})}{R^*}; \quad \sin(\widehat{\overline{R^*}, \overline{F_2}}) = \frac{F_1 \sin(\widehat{\overline{F_1}, \overline{F_2}})}{R^*}.$$

Более предпочтительным способом определения числовой величины и направления равнодействующей силы по отношению к каким-либо прямоугольным осям координат является метод проекций, который особенно удобен в случае векторного сложения более чем двух сил. Этот метод рассматривается дальше, при изучении систем сходящихся сил.

IV. **Аксиома о равенстве сил действия и противодействия** — один из основных законов классической механики, сформулированных Ньютоном, —утверждает: *всякой силе действия есть равная, но противоположная сила противодействия.* По отношению к двум материальным точкам эта аксиома утверждает, что *силы взаимодействия двух материальных точек равны по модулю, противоположны по направлению и действуют вдоль одной прямой, проходящей через взаимодействующие точки.* Материальные точки при этом могут взаимодействовать как через посредство силовых полей, т. е. на расстоянии, так и путем соприкосновения друг с другом, если их считать твердыми телами очень малых размеров.

В статике эту аксиому применяют для твердых тел. Силы взаимодействия двух твердых тел (при взаимодействии путем соприкосновения или на расстоянии при посредстве силовых полей) равны по модулю и противоположны по направлению. Силы действия и противодействия всегда приложены к разным телам или к различным взаимодействующим точкам одного и того же тела.

Таким образом, в природе силы встречаются всегда по две: силы действия и противодействия.

V. **Аксиома связей.** *Связью* для твердого тела или материальной точки называют материальные объекты (тела и точки), которые ограничивают свободу перемещения рассматриваемого твердого тела или материальной точки. Аксиома связей утверждает, что *всякую связь можно отбросить и заменить силой, реакцией связей* (*в простейшем случае*) *или системой сил* (*в общем случае*). Эта аксиома фактически уже содержится в определении силы, но в истории развития механики это не было осознано сразу. Длительное время после формулировки Ньютоном основных законов классической механики их применение к несвободным твердым телам и механическим системам встречалось с трудностями, пока не была дополнительно сформулирована аксиома

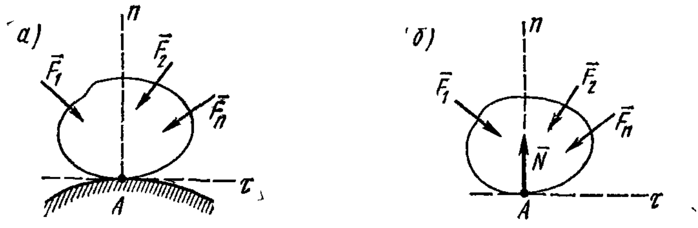

Рис. 3

связей. Учитывая большое значение аксиомы связей для дальнейшего изложения теоретической механики, оставим эту аксиому как самостоятельную.

Почти все теоремы и окончательные результаты теоретической механики формулируются для материальной точки или твердого тела,освобожденных от связей, т. е. когда связи заменены силами реакций связей. Поэтому очень важно уметь правильно заменять отброшенные связи силами реакций связей. Это одна из главных задач при изучении статики, которой следует уделить наибольшее внимание.

Силы реакций связей для рассматриваемого тела или точки зависят прежде всего от приложенных сил и от вида связей. При движении силы реакций связей зависят еще и от характеристик движения. Так, при движении тела в воздухе сила реакции воздуха на движущееся тело зависит от скорости движения тела относительно воздуха.

Приведем примеры связей и их замены силами реакций связей. Если связью для твердого тела (рис. 3, *а*) является абсолютно гладкая поверхность другого тела, то сила реакции такой поверхности, если соприкосновение происходит в одной точке, направлена по нормали к общей касательной соприкасающихся поверхностей тел независимо от сил, приложенных к рассматриваемому телу (рис. 3, *б*). Сила реакции связи $\bar{N}$ направлена в сторону, противоположную направлению, в котором связь препятствует перемещению рассматриваемого тела. Числовое значение силы реакции при равновесии определяется приложенными к телу силами, которые в отличие от сил реакций связей часто называют *активными* силами.

Если соприкосновение происходит не в одной точке, а по некоторой площади поверхности, то реакция такой связи сводится к системе распределенных по поверхности сил, которые в некоторых случаях удается заменить одной равнодействующей силой реакции связи. В общем случае система распределенных сил может не иметь равнодействующей.

В тех случаях, когда сила реакции связей не только по модулю, но и по направлению зависит от приложенных сил, ее обычно раскладывают по правилу параллелограмма на составляющие параллельно осям координат. Через составляющие легко определяется как модуль силы реакции, так и ее направление.

Неизвестную по модулю и направлению силу реакции создают ц и л и н д р и ч е с к и й (плоский) и ш а р о в о й шарниры. Пусть имеем балку AB, находящуюся в равновесии под действием силы $\bar{F}$ и закрепленную на одном конце с помощью цилиндрического шарнира A,

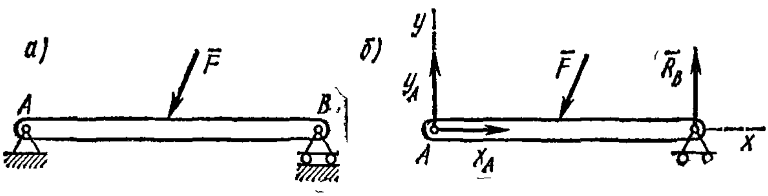

Рис. 4

а на другом — катковой опоры B (рис. 4,*а*). Цилиндрическим шарниром называют устройство, позволяющее балке поворачиваться в плоскости вокруг оси, перпендикулярной этой плоскости. Устройство катковой опоры ясно из рисунка. На рис. 4, *б* показана та же балка после освобождения от связей. Сила реакции катковой опоры направлена по нормали к общей касательной, если поверхности соприкосновения

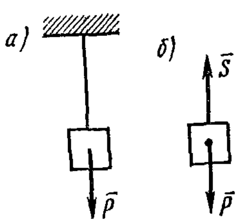

Рис. 5

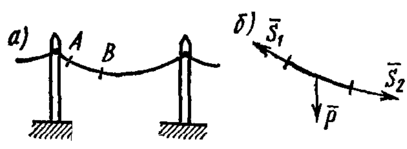

Рис. 6

гладкие. Неизвестная по модулю и направлению реакция цилиндрического шарнира разложена на две составляющие $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$, предположительно направленные в положительном направлении осей координат.

В случае шарового шарнира силу реакции раскладывают на три составляющие, параллельные осям координат.

Г и б к и е с в я з и (канаты, тросы, нити) дают силы реакции связей (силы натяжения), направленные по касательной к гибкой связи. На рис. 5, *а*, *б* сила натяжения нити $\bar{S}$ заменяет действие нити на груз. На рис. 6, *а*, *б* показаны силы натяжения провода в сечениях A и B, действующих на часть провода AB.

На рис. 7, *а*, *б* показаны силы реакции цилиндрического шарнира A и стержня BC на балку AB. Стержень BC, имеющий на концах шарниры B и C, создает силу реакции на балку AB только в направлении самого стержня BC, если на этот стержень не действуют другие силы между его шарнирами B и C. Действительно, если рассмотреть находящийся в равновесии стержень BC, то на него действуют только две силы в точках B и C. Согласно первой аксиоме, эти силы должны быть направлены по одной прямой, проходящей через точки B и C. Следовательно, сила реакции стержня $\overline{Y}_B$ на балку AB направлена по BC, так как действие балки на стержень дает силу, направленную по стержню.

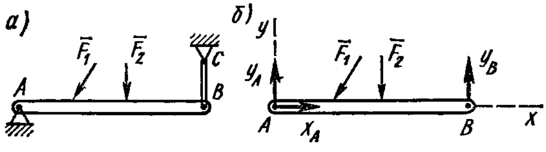

Рис 7

Силы реакций других наиболее часто встречающихся связей рассматриваются в примерах.

VI. Аксиома затвердевания. *Если деформируемое тело находится в равновесии, то равновесие его без изменения системы приложенных сил не нарушится от наложения на точки тела дополнительных связей, включая превращение деформируемого тела в абсолютно твердое.* С помощью этой аксиомы устанавливается, в частности, связь между условиями равновесия сил, приложенных к твердому и деформируемому телам. Из аксиомы следует, что условия равновесия сил, приложенных к твердому телу, необходимы и для равновесия деформируемого тела. Но условия равновесия сил, приложенных к твердому телу, не являются достаточными для равновесия деформируемого тела.

Сформулированные аксиомы и являются той основой, на которой строится вся статика сил, приложенных к твердому телу.

Аксиомы статики характеризуют свойства сил, приложенных к абсолютно твердому телу или одной точке. Но они не учитывают материальных свойств тела или точки, характеризуемых их массой, а для тела — еще распределением массы в теле, влияние которых существенно при их движении.

Совместный учет действия сил и материальных свойств тел или точки содержится в аксиомах динамики. Такие аксиомы статики, как аксиома о параллелограмме сил, о равенстве сил действия и противодействия, аксиома связей, справедливы и в динамике. Так как в статике рассматриваются свойства и неравновесных систем сил, под действием которых твердое тело или точка не могут находиться в покое относительно инерциальной системы отсчета, то для оправдания этого в статике можно считать, что эти системы сил являются частями более укрупненных равновесных систем сил, под действием которых тело или материальная точка находится в покое или совершает движение по инерции.

§ 3. ПРОСТЕЙШИЕ ТЕОРЕМЫ СТАТИКИ

Теорема о переносе силы вдоль линии действия. *Действие силы на твердое тело не изменится от переноса силы вдоль своей линии действия.*

Пусть в точке A твердого тела приложена сила $\overline{F}$ (рис. 8). К этой силе на ее линии действия в точке B в соответствии с аксиомой II добавим систему сил $(\overline{F}', \overline{F}'')$, эквивалентную нулю, для которой $\overline{F}'' = -\overline{F}'$. Выберем силу $\overline{F}'$, равную силе $\overline{F}$. Полученная система трех сил $(\overline{F}, \overline{F}', \overline{F}'')$ эквивалентна, согласно аксиоме о добавлении равновесной системы сил, силе $\overline{F}$, т. е.

$$(\overline{F}) \backsim (\overline{F}, \overline{F}', \overline{F}'').$$

Система сил $(\overline{F}, \overline{F}'')$, согласно аксиоме I, эквивалентна нулю, и согласно аксиоме II ее можно отбросить. Получится одна сила $\overline{F}'$, приложенная в точке B, т. е. $(\overline{F}, \overline{F}', \overline{F}'') \backsim (\overline{F}')$.
Окончательно получаем

$$(\overline{F}) \backsim (\overline{F}').$$

Сила $\overline{F}$ приложена в точке A. Она эквивалентна такой же по модулю и направлению силе $\overline{F}'$, приложенной в точке B, где точка B — любая точка линии действия силы $\overline{F}$. Теорема доказана. Таким образом, точка приложения силы в абсолютно твердом теле несущественна. Силу для твердого тела можно считать приложенной в любой точке линии действия. Векторные величины, которые можно прикладывать в любой точке линии действия, называют *скользящими*. Сила, приложенная к твердому телу, есть вектор скользящий. В деформируемом теле силу нельзя переносить вдоль линии действия. Сила в этом случае не является скользящим вектором.

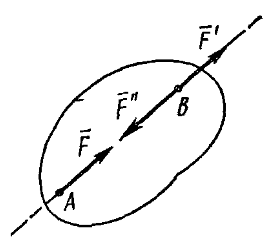

Рис. 8

Теорема о трех силах. *Если твердое тело под действием трех сил, две из которых пересекаются в одной точке, находится в равновесии, то линии действия таких трех сил пересекаются в одной точке.*

Обратная теорема неверна, т. е. если линии действия трех сил пересекаются в одной точке, то такая система сил не обязательно является равновесной.

Пусть имеем систему трех сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3)$, две из которых, например $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, пересекаются в одной точке A (рис. 9). Докажем, что если тело находится в равновесии под действием этих трех сил, то линия действия силы $\overline{F}_3$ пройдет через точку A, т. е. линии действия трех сил пересекаются в одной точке.

Силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, линии действия которых пересекаются в точке A, перенесем в эту точку и заменим их равнодействующей $\overline{R}_{12}$ по аксиоме параллелограмма сил. Система трех сил ($\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$) свелась к эквивалентной системе двух сил ($\overline{R}_{12}$, $\overline{F}_3$), находящихся в равновесии, так как твердое тело, на которое они действуют, по условиям теоремы находится в равновесии. Согласно аксиоме I, такие две силы должны быть

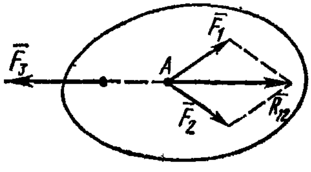

Рис. 9

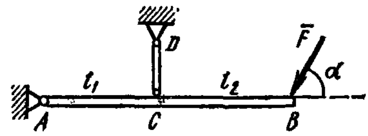

Рис. 10

направлены по одной прямой, проходящей через точки их приложения. Следовательно, линия действия силы $\overline{F}_3$ должна пройти через точку приложения силы $\overline{R}_{12}$, т. е. точку пересечения сил $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$. Таким образом, три силы пересекутся в одной точке.

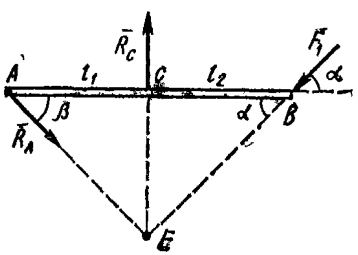

Рис 11

Теорема о трех силах позволяет в некоторых случаях определить линию действия неизвестной силы, приложенной к твердому телу.

Пример. *Дана балка AB, закрепленная, как указано на рис. 10. На балку действует активная сила $\overline{F}$, направление которой задано углом α. Определить линию действия силы реакции цилиндрического шарнира $\overline{R}_A$*

Р е ш е н и е. Освободим балку от связей, заменив их силами реакций связей (рис. 11). Сила реакции стержня DC на балку AB направлена по стержню DC. Ее линия действия пересекается с линией действия заданной силы $\overline{F}$ в точке E. Согласно теореме о трех силах при равновесии балки, через точку E должна пройти и линия действия силы реакции $\overline{R}_A$. Ее направление определится углом β, который зависит от угла α и положения точки C:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{CE}{AC} = \frac{l_2}{l_1}\operatorname{tg}\alpha.$$

Если $AC = BC$, то $\beta = \alpha$.

§ 4. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Рассмотрим одну из важных систем сил — систему с х о д я щ и х с я с и л. Для этой системы сил следует рассмотреть приведение ее к простейшему виду и установить условия равновесия.

Системой сходящихся сил (или пучком сил) называют такую систему сил, линии действия которых пересекаются в одной точке — центре пучка. Сходящиеся системы сил могут быть пространственными и плоскими, т. е. расположенными в одной плоскости.

Приведение к равнодействующей силе

Рассмотрим общий случай пространственной системы сходящихся сил. Так как сила, действующая на твердое тело, есть вектор скользящий, то можно считать, что силы системы ($\overline{F}_1$, $\overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$) приложены в одной точке — центре пучка (рис. 12).

Применяя к первым двум силам пучка $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ аксиому параллелограмма, заменим их одной равнодействующей силой $\overline{R}_{12}$, причем

$$\overline{R}_{12} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2.$$

Затем по правилу параллелограмма складываем силы $\overline{R}_{12}$ и $\overline{F}_3$ и получаем их равнодействующую:

$$\overline{R}_{123} = \overline{R}_{12} + \overline{F}_3 = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3$$

и т. д. Продолжая процесс векторного сложения сил для всех n сил, получим

$$\overline{R}^* = \overline{R}_{12,\ldots,n-1} + \overline{F}_n = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots + \overline{F}_{n-1} + \overline{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i.$$

Таким образом, система n сходящихся сил эквивалентна одной силе $\overline{R}^*$, которая и является равнодействующей этой системы сил (рис. 13).

Процесс последовательного применения к силам правила параллелограмма, или их в е к т о р н о г о с л о ж е н и я, приводит к построению силового многоугольника из заданных сил. В силовом многоугольнике конец одной из сил служит началом другой (рис. 14). Равнодействующая сила $\overline{R}^*$ в силовом многоугольнике соединяет начало первой силы с концом последней, т. е. изображается з а м ы к а ю щ е й силового многоугольника, который в общем случае является незамкнутым. Силы в силовом многоугольнике можно изображать в любой последовательности. От этого изменится форма силового многоугольника, а замыкающая не изменится; следовательно, не изменится и равнодействующая сила.

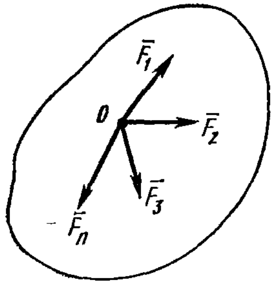

Рис. 12

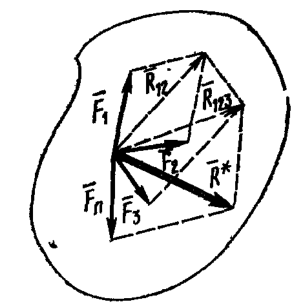

Рис. 13

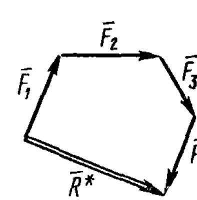

Рис. 14

Для пространственной системы сходящихся сил силовой многоугольник является пространственной фигурой, для плоской — плоской.

Для плоской системы сходящихся сил равнодействующую силу можно определить графически путем построения замыкающей силового многоугольника в выбранном для сил масштабе. Для пространственной системы сходящихся сил пришлось бы силовой многоугольник строить в пространстве из стержней.

Итак, *система сходящихся сил в общем случае приводится к одной силе — равнодействующей этой системы сил, которая изображается замыкающей силового многоугольника, построенного на силах системы.* Линия действия равнодействующей силы проходит через центр пучка параллельно замыкающей силового многоугольника.

Для аналитического определения равнодействующей силы следует выбрать систему прямоугольных осей координат и воспользоваться известной из геометрии теоремой о том, что проекция замыкающей любого многоугольника на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций составляющих его сторон на ту же ось.

Так как равнодействующая сила $\overline{R}^*$ является замыкающей силового многоугольника, или векторной суммой сил, то

$$\overline{R}^* = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i. \tag{1}$$

Проецируя векторы векторного равенства на прямоугольные оси координат, согласно теореме о проекции замыкающей получим

$$R_x^* = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}; \; R_y^* = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}; \; R_z^* = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}. \tag{2}$$

По проекциям определяем модуль равнодействующей силы и косинусы углов ее с осями координат по формулам

$$R^* = \sqrt{(R_x^*)^2 + (R_y^*)^2 + (R_z^*)^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iy}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iz}\right)^2}; \tag{3}$$

$$\cos(\widehat{\overline{R}^*, x}) = R_x^*/R^*; \; \cos(\widehat{\overline{R}^*, y}) = R_y^*/R^*, \; \cos(\widehat{\overline{R}^*, z}) = R_z^*/R^*. \tag{4}$$

В формуле (3) перед квадратным корнем всегда берут знак плюс, так как определяется модуль равнодействующей силы.

В случае плоской системы сходящихся сил одну из координатных осей, обычно Oz, выбирают перпендикулярной силам, тогда каждая из сил пучка даст проекцию на эту ось, равную нулю, а следовательно, будет равна нулю и проекция равнодействующей силы на эту ось, т. е.

$$R_z^* = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} \equiv 0.$$

Условия равновесия системы сходящихся сил

Для равновесия системы сходящихся сил замыкающая силового многоугольника, изображающая равнодействующую силу, должна обратиться в точку, т. е. конец последней силы в многоугольнике должен