ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ
на вступительных экзаменах в вузах

ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ на вступительных экзаменах в вузах

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ
И ДОПОЛНЕННОЕ

МИНСК
«ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»
1983

ББК 22.1я729
З-15
УДК 51 (076.1)

Авторы: *Е. А. Островский, И. М. Ангилейко, П. В. Атрашенок, Р. В. Козлова*

Рецензент — *Е. И. Гурский,* зав. кафедрой высшей математики Минского высшего инженерного зенитного ракетного училища, канд. пед. наук, доц.

З—15 **Задачи** по математике на вступительных экзаменах в вузах/[Е. А. Островский, И. М. Ангилейко, П. В. Атрашенок, Р. В. Козлова].— 2-е изд., перераб. и доп.— Мн.: Выш. школа, 1983.—288 с., ил.
В пер.: 85 к.

Пособие написано в помощь поступающим в вузы. Оно содержит варианты письменных работ на вступительных экзаменах в технических вузах Белоруссии, Белорусском институте народного хозяйства и Белорусской сельскохозяйственной академии с 1978 по 1980 г., а также задачи и примеры, предлагавшиеся на устных экзаменах в этих вузах. Приводятся решения типовых задач, к некоторым даны указания и ко всем — ответы.

Предназначается учителям математики средней школы, учащимся старших классов.

Первое издание вышло в 1980 г.

З $\frac{1702010000-202}{М304(05)-83}$ 24—83

ББК 22.1я729
51

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга представляет собой пособие по математике для абитуриентов, обучавшихся 10 лет по новой программе (вариант А программы для поступающих в высшие учебные заведения). В ней приведены письменные работы по математике, а также задачи, предлагавшиеся на устных экзаменах во втузах Белоруссии с 1978 по 1980 г.

Все задачи, взятые из 1-го издания книги, заново решены, решения части задач даны в новой редакции, устранены замеченные опечатки. Построение книги не изменилось по сравнению с 1-м изданием.

В предлагаемом пособии типичные для каждого вуза задачи приведены с решениями, к наиболее трудным задачам даны указания и методические рекомендации.

В вариантах, предлагавшихся в различных вузах, встречаются задачи одного типа и даже решения однотипных задач. Авторы считают, что для читателей, интересующихся вступительными экзаменами в конкретном учебном заведении, такое построение пособия более удобно.

Условия задач и ответы в книге даны в соответствии с терминологией и символикой, принятыми в действующих школьных учебниках по математике.

В пособии приводятся задачи, наиболее часто встречавшиеся на устных экзаменах. Они в основном распределены по отдельным темам программы. В данной книге содержится 1035 задач для письменного экзамена и 288 — для устного.

Книга адресована ученикам старших классов средней школы, а также учащимся подготовительных курсов и отделений, но не может служить единственным пособием при подготовке к вступительным экзаменам в вуз. Прежде чем приступить к решению предлагаемых задач и примеров, необходимо проработать теоретические вопросы программы вступительных экзаменов по математике в высшие учебные заведения.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту зав. кафедрой высшей математики МВИЗРУ ПВО канд. пед. наук, доц. Е. И. Гурскому за тщательное рецензирование рукописи и ценные замечания, а также всем приславшим отзывы о книге и советы по ее улучшению, которые были учтены при подготовке рукописи к изданию.

Отзывы и пожелания, направленные на дальнейшее улучшение книги, просим присылать по адресу: 220048, Минск, проспект Машерова, 11, издательство «Вышэйшая школа».

Авторы

ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

Белорусский ордена Трудового Красного Знамени политехнический институт

1978 год

Вариант 1

1. Упростите выражение

$$\frac{(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})^2+(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n})^2}{2(m-n)}:\frac{1}{\sqrt{m^3}-\sqrt{n^3}}-3\sqrt{mn},\quad m\neq n,$$

$n>0$, $n>0$.

2. Решите уравнение $2\cos^2\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)+5\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-4=0$.

3. Решите уравнение $\log_5\sqrt{x-9}-\log_5 10+\log_5\sqrt{2x-1}=0$.

4. В какой точке касательная к линии $y=\sqrt[3]{x}$ наклонена к оси абсцисс под углом $30°$?

5. Точки $A(1;\ 0;\ 2)$, $B(2;\ 1;\ 0)$ и $C(1;\ 2;\ 0)$ являются тремя последовательными вершинами параллелограмма. Найдите четвертую его вершину и угол между диагоналями.

Вариант 2

6. Упростите выражение

$$\left(\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}+\frac{1-\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right):\frac{\sqrt[4]{ab}}{1+\sqrt[4]{a^3b^3}}-\frac{1-\sqrt[4]{ab}-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}},$$

$ab>0$, $ab\neq 1$.

7. Решите уравнение $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 5x-\cos 9x=0$.

8. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{2x+1}}{\sin x}$.

9. Исследуйте функцию $y=\frac{x^4}{4}-8x$ с помощью производной и постройте ее график.

10. Через середины каждых трех ребер куба, выходящих из одной вершины, проведены сечения. Найдите объем полученного четырнадцатигранника, если ребро куба равно a.

Вариант 3

11. Упростите выражение

$$\left(\frac{(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{b^3})(\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3})}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}},\ a>0,$$

$b>0,\ a\neq b.$

12. Решите уравнение $\sin(x+30^\circ)+\cos(x+60^\circ)=1+$ $+\cos 2x$.

13. Решите неравенство $|2x-1|+5x\geqslant 2$.

14. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2x^2;\ y=0;\ x=2$.

15. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=\cos 2x-x$ на отрезке $[0;\ \pi]$.

Вариант 4

16. Упростите выражение

$$\left(\left(\frac{\sqrt[4]{bx^3}+\sqrt[4]{a^2bx}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}+\sqrt[4]{bx}\right)^2+bx+3\right):(\sqrt{bx}+3),\quad a>0,$$

$b>0,\ x>0.$

17. Решите уравнение $4\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)+7\cos^2\left(3x-\right.$ $\left.-\frac{\pi}{2}\right)=7\frac{1}{4}$.

18. Решите неравенство $\log_3(35-x^3)>3\log_3(5-x)$.

19. Найдите функцию $F(x)$, зная, что $F'(x)=-\sin x+$ $+\frac{1}{4\sqrt[4]{(x+1)^3}}+\frac{2}{e^{-x}}$ и $F(0)=2$.

20. Найдите длину вектора $\vec{a}+2\vec{b}$, если $\vec{a}=(0;\ -4;\ 3)$ и $\vec{b}=\left(\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2};\ 1\right)$.

Вариант 5

21. Упростите выражение

$$\frac{a-5}{6-3a}+\frac{4(a+1)}{a^2+4a}:\left(\frac{9a}{a^2-16}-\frac{a+4}{a^2-4a}\right),\ a>4.$$

22. Решите уравнение $\sin x+\sin 2x-\sin 3x=0$.

23. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=\cos x+1$ в точке с абсциссой $x_0=0$.

24. Найдите высоту конуса наименьшего объема, описанного около полушара радиуса r так, чтобы центр основания конуса лежал в центре шара.

25. Вычисл[illegible] щадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin 2x$; $y =$ [illegible] $x \in [0;\ 2\pi]$.

Вариант 6

26. Докажи[illegible] дество $\dfrac{1 - \cos 2\alpha - \sin(2\alpha + \pi)}{1 - \cos(2\alpha - \pi) + \sin(2\alpha + 4\pi)} = \operatorname{tg}\alpha$.

27. Решите [illegible] нство $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{1-x}} > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

28. Решите [illegible] у уравнений

$$\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)} = 50; \\ \lg(x - y) + \lg(x + y) = 2 - \lg 5. \end{cases}$$

29. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x$ на отрезке $[0;\ 3]$.

30. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен к векторам $\vec{a} = (2;\ 2;\ -1)$ и $\vec{b} = (3;\ -1;\ 1)$ и образует с осью Oz тупой угол. Найдите координаты вектора $\vec{c}$, зная, что $|\vec{c}| = \sqrt{30}$.

Вариант 7

31. Докажите тождество $\dfrac{\sin 2\alpha - 2\sin\alpha}{\sin 2\alpha + 2\sin\alpha} = -\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$.

32. Исследуйте функцию $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 4$ с помощью производной и постройте ее график.

33. Решите уравнение $3\sin 3x + 4\cos 3x = -5$.

34. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $30°$; $|\vec{a}| = 4$; $|\vec{b}| = 10$. Найдите $|\vec{a} + \vec{b}|$.

35. Объем правильной треугольной пирамиды равен V. Через середину бокового ребра проведена плоскость, параллельная противолежащему ребру и перпендикулярная к плоскости основания. Найдите объем отсеченной пирамиды.

Вариант 8

36. Докажите тождество $\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi + 4\alpha\right) + \sin(3\pi - 8\alpha) - \sin(4\pi - 12\alpha) = 4\cos 2\alpha \cos 4\alpha \sin 6\alpha$.

37. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(x + 5)^2 > \log_{\frac{1}{2}}(3x - 1)^2$.

38. Найдите для функции $f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} + \dfrac{2}{\cos^2 x} + e^x$ первообразную, график которой проходит через точку $A(0;\ 3)$.

39. ...те угол между векторами $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, если $\vec{a}=(0;$ ...) и $\vec{b}=(2;\ 1;\ 2)$.

40. ...те объем пирамиды, если в основании ее лежит прямоу...й треугольник с площадью Q и острым углом α. Бок...ань, проходящая через катет, прилежащий к этому ...ерпендикулярна к плоскости основания, две другие ... наклонены к плоскости основания под углом β.

Вариант 9

41. Докажите тождество $\dfrac{1+\cos(2\alpha+630^\circ)+\sin(2\alpha+810^\circ)}{1-\cos(2\alpha-630^\circ)+\sin(2\alpha+630^\circ)}=\operatorname{ctg}\alpha$.

42. Решите уравнение $\log_2(x-1)^2-\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=9$.

43. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^2e^{-x}$ на отрезке $[-1;\ 4]$.

44. Равнобедренный треугольник с основанием b и углом при основании α вращается около внешней оси, которая находится в плоскости треугольника, параллельна основанию и отстоит от него на расстоянии, равном половине высоты треугольника. Найдите объем фигуры вращения.

45. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=e^x-1$; $x-2=0$; $y=0$.

Вариант 10

46. Упростите выражение $\dfrac{1-\log_a^3 b}{(\log_a b+\log_b a+1)\log_a\dfrac{a}{b}}$.

47. Решите неравенство $f'(x)+\varphi'(x)\leqslant 0$, если $f(x)=2x^3+12x^2$ и $\varphi(x)=9x^2+72x$.

48. Решите уравнение $2(\sin x+\cos x)+\sin 2x+1=0$.

49. Тупоугольный треугольник, острые углы которого α и β и меньшая высота равна h, вращается около стороны, противолежащей углу β. Найдите площадь поверхности фигуры вращения.

50. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=8-\dfrac{1}{2}x^2$; $y=3{,}5$.

1979 год

Вариант 1

51. Докажите тождество $\dfrac{\sin^2\alpha-4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\sin^2\alpha-4+4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}^4\dfrac{\alpha}{2}$.

52. Решите уравнение $\sqrt{2}\cdot 0{,}5^{\frac{5}{4\sqrt{x}+10}} - 16^{\frac{1}{2(\sqrt{x}+1)}} = 0.$

53. Решите неравенство $\log_x \frac{3}{8-2x} \geqslant -2.$

54. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin\frac{x}{2}$; $y = \sqrt{x}$; $x = \pi$. Сделайте чертеж.

55. Объем правильной треугольной призмы равен V. Какова должна быть сторона ее основания, чтобы площадь поверхности призмы была наименьшей?

Вариант 2

56. Упростите выражение

$\left(\frac{1}{a+\sqrt{2}} - \frac{a^2+4}{a^3+2\sqrt{2}}\right) : \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{a}\right)^{-1}$, $a \neq 0$, $a \neq -\sqrt{2}$.

57. Решите уравнение $2\sin^3 x - \cos 2x - \sin x = 0.$

58. Решите неравенство $\sqrt{(x+3)(x-8)} > x+2.$

59. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 5 + 4x - x^2$; $2x - y - 3 = 0.$

60. Даны вершины треугольника $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$ и $C(3;\ -2;\ 1)$. Определите его внутренний угол при вершине B.

Вариант 3

61. Упростите выражение $\left(\frac{x^{\frac{1}{2}} + 3y^{\frac{1}{2}}}{x - 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y} + \frac{x^{\frac{1}{2}} - 3y^{\frac{1}{2}}}{x-y}\right) \times$

$\times \frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{2}$, $x \neq y$, $x > 0$, $y > 0$.

62. Решите уравнение $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x.$

63. Решите неравенство $(x-2)^{x^2-6x+8} > 1.$

64. В треугольник с основанием a и высотой h вписан прямоугольник наибольшей площади, так, что две его вершины лежат на основании. Найдите размеры этого прямоугольника.

65. Определите длину диагоналей параллелограмма $ABCD$, если $\vec{AB} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$; $\vec{BC} = \vec{i} - 3\vec{j}$.

Вариант 4

66. Вычислите $\lim\limits_{x \to -3} \frac{\sqrt{18+x^2} - 3\sqrt{2x+9}}{x+3}.$

67. Решите уравнение $\lg(\lg x) + \lg(\lg x^3 - 2) = 0$.

68. Решите графически систему неравенств $\begin{cases} x + 2y \geqslant 0; \\ x - y \leqslant 0; \\ x - 4y + 6 \geqslant 0. \end{cases}$

69. Найдите $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, если известно, что $\sin(\pi - x) - \cos(\pi + x) = \frac{1}{5}$.

70. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью ординат, параболой $y = 3x - \frac{1}{2}x^2$ и касательной к этой параболе, проведенной через ее вершину.

Вариант 5

71. Упростите выражение

$$\frac{3}{a-3}(3^{-2})^{-0,5} - \left(\frac{a^{\frac{1}{2}} - 1}{(a-1)^{3/5}}\right)^{-1} \left(\frac{\left(a^{\frac{1}{2}} + 1\right)(a-3)}{\left(\frac{1}{a}\right)^{-2}(a-1)^{2/5}}\right)^{-1}, \quad a > 3.$$

72. Объем конуса равен V. В конус вписана пирамида, в основании которой лежит равнобедренный треугольник с углом между боковыми сторонами, равным α. Найдите объем пирамиды.

73. Решите неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+2,5} \leqslant \frac{0,5^{x(x+3)}}{\sqrt{2}}$.

74. Решите уравнение $F(x) = -\frac{3}{2}$, если $F'(x) = 3\cos x + \sin 2x$ и $F(0) = \frac{1}{2}$.

75. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = 2\left(e^x + \frac{1}{5}e^{-3x}\right)$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$.

1980 год

Вариант 1

76. Дано $\log_2(\sqrt{3} + 1) + \log_2(\sqrt{6} - 2) = A$.

Найдите значение выражения $\log_2(\sqrt{3} - 1) + \log_2(\sqrt{6} + 2)$.

77. Решите уравнение

$2\cos 2x + 2\operatorname{tg}^2 x = 5$.

78. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{5x-4}{2x-3} > 2; \\ |5x - 3| \leqslant 7. \end{cases}$

79. Найдите число, которое в сумме со сво
дает этой сумме наименьшее значение.

80. Правильная треугольная пирамида впис.
радиуса R. Найдите объем пирамиды, если угол между ее высотой и боковым ребром равен α.

Вариант 2

81. Упростите выражение

$$\frac{a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{3}}}+\frac{a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{6}}}\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}-b}-\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}}\right),$$

$a>0,\ b>0,\ a\neq b^2$.

82. Решите уравнение $\sqrt{3}\cos x+\sin x=1$.

83. Решите неравенство $\dfrac{\lg x^4-2\lg(2x+3)}{\lg(2-\sqrt{3})}\geqslant 0$.

84. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=-\cos x+1$ в точке $M\left(\dfrac{\pi}{2};\ 1\right)$.

85. Определите полную поверхность правильной треугольной пирамиды, у которой плоский угол при основании боковой грани равен α, радиус круга, вписанного в эту грань, равен r.

Вариант 3

86. Упростите выражение

$$\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y}+\frac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}y}\right)\frac{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x+y}-\frac{2y}{x-y},\quad x>0,\quad y>0,$$

$x\neq y$.

87. Найдите $\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$, если известно, что $\sin x-\cos x=\dfrac{1}{3}$.

88. Решите неравенство $\log_{0,5}\dfrac{x^2-4x+6}{x}<0$.

89. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-5x+7$; $y=-2x^2+10x-5$. Сделайте чертеж.

90. Функция задана формулой $y=2x+\dfrac{32}{x}$. Найдите экстремумы этой функции и угловой коэффициент касательной к ее графику в точке, абсцисса которой равна 2.

Вариант 4

91. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(2x-4)}{(\sqrt{2x+3}-\sqrt{7x^4+3})(\sqrt{2x}+2)}$.

92. Решите уравнение
$$4\sin x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+4\sin(\pi+x)\cos x+2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\times$$
$$\times\cos(\pi+x)=1.$$

93. Решите неравенство $1<\frac{f'(x)}{g'(x)}<2$, где $f(x)=x^3-$ $-\frac{7}{2}x^2+8x+15$; $g(x)=\frac{x^3}{3}+x+4$.

94. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$; $y=\frac{2}{\pi}x$, $x\geqslant 0$. Сделайте рисунок.

95. Равнобедренная трапеция, у которой угол при основании равен 60°, описана около окружности. В каком отношении прямая, соединяющая точки касания окружности с боковыми сторонами, делит площадь трапеции?

Вариант 5

96. Упростите выражение
$$\left(\frac{49}{c+27}-\frac{c^{\frac{1}{3}}+3}{c^{\frac{2}{3}}-3c^{\frac{1}{3}}+9}\right)\frac{c^{\frac{4}{3}}+27c^{\frac{1}{3}}}{16-c^{\frac{2}{3}}}+\frac{40-c^{\frac{2}{3}}}{4+c^{\frac{1}{3}}},\ c>0,\ c\neq 64.$$

97. Решите уравнение $2\sin^2 x-2\cos x=3$.

98. Решите неравенство $5^{2\sqrt{x}}+5<5^{\sqrt{x}+1}+5^{\sqrt{x}}$.

99. Исследуйте функцию $y=x^4-8x^2+16$ с помощью производной и постройте график.

100. Вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $a=(1;\ -2;\ 2)$ и образует с осью Oy тупой угол. Зная, что $|\vec{b}|=9$, найдите координаты вектора $\vec{b}$.

Белорусский технологический институт им. С. М. Кирова

1978 год

Вариант 1

101. Стороны треугольника $a=b=10$ см, $c=12$ см касаются сферы радиуса 5 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника.

102. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 21, а сумма их квадратов равна 189. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

103. Проверьте справедливость равенства $\frac{1}{\sin 10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}=4$.

104. При каких значениях a неравенство $\frac{ax}{x^2+4}<1{,}5$ выполняется для всех $x\in R$?

105. Найдите функцию $F(x)$, зная, что $F'(x) = 2x^2 - 3x$ и $F(2) = 2$.

Вариант 2

106. В плоскости xOy найдите вектор $\vec{a}$, перпендикулярный к вектору $\vec{b} = (5; -3; 4)$ и имеющий с ним одинаковую длину.

107. Решите систему уравнений $\begin{cases} 9^{2\operatorname{tg}x+\cos y} = 3; \\ 9^{\cos y} - 81^{\operatorname{tg}x} = 2. \end{cases}$

108. Упростите выражение

$$\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right) \cdot 49^{\log_7 2}.$$

109. Покажите, что функция $y = -0{,}2x^5 + 0{,}5x^4 - x^3 + x^2 - x$ убывает на всей области определения.

110. Вычислите интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^3}$.

Вариант 3

111. Боковые ребра четырехугольной пирамиды равны между собой; плоские углы при вершине равны α, β, α, β. Высота пирамиды h. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

112. Упростите выражение $\frac{x^{-1} - x}{\left(\sqrt[3]{x} + x^{-\frac{1}{3}} + 1\right)\left(\sqrt[3]{x} + x^{-\frac{1}{3}} - 1\right)} + \sqrt[3]{x})^{-3}$, $x > 0$.

113. Проверьте справедливость равенства

$$\frac{\sin\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \cos\left(\alpha - \frac{5}{2}\pi\right)} = 1.$$

114. Исследуйте функцию $y = (x-1)^3 - 3(x-1)$ и постройте ее график.

115. Найдите все первообразные функции $y = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 1}$.

Вариант 4

116. Отрезки AB, AC, DB и DC разделены соответственно точками M, N, P и Q в одном и том же отношении. Покажите, что $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$.

117. Зная, что α, β, γ — внутренние углы треугольника, докажите равенство

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}.$$

118. Решите уравнение $\sqrt{\log_x\sqrt{5x}}=-\log_x 5$.

119. Найдите точки максимума и минимума функции $y=2^{x^3-3x^2}$.

120. Вычислите $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

Вариант 5

121. Основания усеченной пирамиды — равнобедренные прямоугольные треугольники, гипотенузы которых m и n $(m>n)$. Две боковые грани перпендикулярны к основанию, а третья составляет с ним угол α. Найдите объем усеченной пирамиды.

122. Вычислите $\sin^3\alpha-\cos^3\alpha$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=n$.

123. Решите неравенство $\log_x\dfrac{3x-1}{x^2+x}>0$.

124. Исследуйте функцию $y=18x^2+8x^3-3x^4$ и постройте ее график.

125. Найдите все первообразные функции $y=\sqrt{2x}+\dfrac{1}{(3x+2)^2}$.

Вариант 6

126. $DABC$ — тетраэдр, в котором $|AB|=|AC|=a$ и $\widehat{DAB}=\widehat{DAC}=\varphi$. Докажите, что $(AD)\perp(BC)$.

127. Решите неравенство $\dfrac{4}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}<2$.

128. Преобразуйте в произведение $\dfrac{1-\cos(8\alpha-3\pi)}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha}$.

129. Исследуйте функцию $y=\dfrac{6(x-1)}{x^2+3}$ и постройте ее график.

130. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=3x-x^2$ и $y=x$.

Вариант 7

131. Равнобедренная трапеция, меньшее основание и боковые стороны которой равны a, острый угол α, вращается вокруг оси, которая лежит в плоскости трапеции, проходит через вершину острого угла перпендикулярно к основанию. Найдите площадь поверхности фигуры вращения.

132. Упростите выражение $\left(1+\cos\frac{\alpha-3\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi-\alpha}{4}$.

133. Докажите, что многочлен $m^6-m^5+m^4+m^2-m+$ $+1$ принимает положительные значения при любых m.

134. Упростите выражение $\left(\left(\log_b^4 a+\log_a^4 b+2\right)^{\frac{1}{2}}-2\right)^{\frac{1}{2}}$, если $b>a>1$.

135. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{5}{x}$ и $y=6-x$.

Вариант 8

136. Катет и гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника лежат в различных гранях прямого двугранного угла. Вершина прямого угла треугольника удалена от ребра на расстояние m, а вершина острого угла — на n. Найдите площадь треугольника.

137. При каком p уравнение $\lg(x^2+2px)-\lg(8x-6p-$ $-3)=0$ имеет один корень? Найдите его.

138. Вычислите $\frac{2\sin 2\alpha-3\cos 2\alpha}{4\sin 2\alpha+5\cos 2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=3$.

139. Найдите интервалы возрастания и убывания и точки максимума и минимума функции $y=\frac{2x-1}{(2-4x)^2}$.

140. Найдите $F(x)$, если $F'(x)=3x-\frac{2}{\cos^2 8x}$ и $F(0)=$ $=1$.

Вариант 9

141. В конус с радиусом основания R и углом α между образующей и плоскостью основания вписана прямая треугольная призма так, что одно из ее оснований лежит на основании конуса, а вершины другого основания принадлежат его боковой поверхности. Найдите объем призмы, если все ее ребра имеют одинаковые длины.

142. Упростите выражение

$$\left(\frac{x-9}{x+3\sqrt{x}+9}:\frac{x^{0,5}+3}{x^{1,5}-27}\right)^{0,5}-x^{0,5}.$$

143. Преобразуйте в произведение $\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg}x+3$.

144. При каких a система $\begin{cases} x + ay = 2; \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений?

245. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{3}{x}$; $y = 3$; $x = 2$.

Вариант 10

146. Точки M и N — середины сторон AD и DC параллелограмма $ABCD$; $P = (AC) \cap (BM)$, $Q = (AC) \cap (BN)$. Докажите, что $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

147. Решите уравнение $\sqrt{\log_3 x^9} - 4\log_9\sqrt{3x} = 1$.

148. Упростите выражение $\cos^4 2\alpha - 6\cos^2 2\alpha \sin^2 2\alpha + \sin^4 2\alpha$.

149. На окружности радиуса R дана точка A. Проведите хорду BC параллельно касательной в точке A так, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей.

150. Найдите первообразные для функции $y = \frac{5}{\sqrt{2x+7}} + \cos 3x$.

1979 год

Вариант 1

151. Докажите тождество $\frac{1 - 2\sin^2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha}$.

152. Решите уравнение $\lg(6 \cdot 5^x + 25 \cdot 20^x) = x + \lg 25$.

153. Исследуйте на возрастание (убывание) функцию $f(x) = x^4 e^x$, а также найдите ее экстремумы.

154. Прямая задана точками $A(4; -3; 5)$ и $B(-3; 10; -1)$. Найдите значения x и z, при которых точка $M(x; 2; z)$ принадлежит (AB).

155. В конус вписан шар радиуса r. Определите площадь полной поверхности конуса, если угол между образующей и основанием конуса равен α.

Вариант 2

156. Упростите выражение

$$\frac{2a}{a^2 - 4x^2} + \frac{1}{2x^2 + 6x - ax - 3a}\left(x + \frac{3x - 6}{x - 2}\right), \ x \neq 2; \ x \neq -3; \ x \neq \pm \frac{a}{2}.$$