ВЫСШЕЕ
ОБРАЗОВАНИЕ

А. И. Плис
Н. А. Сливина

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

А. И. Плис, Н. А. Сливі

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
высших технических учебных заведений

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1983

ББК 22.11
П39
УДК 51

Рецензенты:

кафедра высшей математики Московского инженерно-физического института (зав. кафедрой проф. А. И. Прилепко) и канд. физ.-мат. наук С. А. Лапшин (факультет ВМиК Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова)

Плис А. И., Сливина Н. А.

П39 Лабораторный практикум по высшей математике: Учеб. пособие для втузов. — М.: Высш. шк., 1983. — 208 с., ил.
50 к.

Пособие представляет собой руководство к выполнению лабораторных работ по курсу высшей математики для втузов. В книге содержится краткое описание языков ФОРТРАН и АНАЛИТИК и 23 лабораторные работы по основным разделам курса. В каждой работе имеются краткое описание метода и алгоритма, тексты стандартных подпрограмм на языке ФОРТРАН и универсальных стандартных информатив на языке АНАЛИТИК, задание, порядок выполнения работы, образец выполнения одного варианта на ЕС ЭВМ и на ЭВМ «Мир-2».

П $\frac{1702000000-422}{001(01)-83}$ 56—83 ББК 22.11
517

Александр Иванович Плис
Наталья Александровна Сливина

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Зав. редакцией по физике и математике Е. С. Гридасова
Редактор Ж. И. Яковлева
Мл. редакторы С. А. Доровских, Н. П. Майкова
Художник С. А. Кравченко
Художественный редактор В. И. Пономаренко
Технический редактор З. В. Нуждина
Корректор Р. К. Косинова

ИБ № 3932

Изд. № ФМ-719. Сдано в набор 10.03.83. Подп. в печать 12.09.83 г. Формат $60\times90^{1}/_{16}$ Бум. тип. № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая Объем 13 усл. печ. л. Усл. кр.-отт. 13,25. 12,82 уч. изд. л Тираж 50 000 экз. Зак. 1471 Цена 50 коп.
Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4 Неглинная ул., д. 29/14

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли 129041, Москва, Б. Переяславская ул., д. 46

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бахвалов Н. С.* Численные методы. Ч. 1—М.: Наука, 1973.
2. *Брич З. С., Копелевич Д. В.* и др. ФОРТРАН ЕС ЭВМ. — М.: Статистика, 1978.
3. *Бухтияров А. М., Маликова Ю. П., Фролов Г. Д.* Практикум по программированию на ФОРТРАНЕ (ОС ЕС ЭВМ). — М.: Наука, 1979.
4. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1980.
5. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. — М.: Наука, 1978.
6. *Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М.* Методы оптимизации. — М.: Наука, 1978.
7. *Салтыков А. И., Макаренко Г. И.* Программирование на языке ФОРТРАН. — М.: Наука, 1976.
8. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977.
9. *Тихонов А. Н., Костомаров Д. П.* Рассказы о прикладной математике. — М.: Наука, 1979.
10. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977.
11. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. — М.: Мир, 1975.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современное развитие науки и техники тесно связано с использованием электронных вычислительных машин (ЭВМ), ставших рабочим инструментом ученого, инженера, конструктора. Это позволяет строить математические модели сложных устройств и процессов и тем самым резко сократить время и стоимость инженерных разработок.

Сложные вычислительные задачи, возникающие при моделировании технических устройств и процессов, можно разбить на ряд элементарных: вычисление интегралов, решение дифференциальных уравнений, определение экстремума функции и т. д. Для таких задач уже разработаны методы решения, созданы стандартные программы их решения на ЭВМ, доступные для изучения студентам младших курсов втузов.

Настоящий практикум составлен в соответствии с программой курса «Высшая математика» для высших технических учебных заведений (объемом 510 часов). Практикум содержит 23 лабораторные работы, охватывающие следующие разделы: решение уравнений и систем, интегрирование, обыкновенные дифференциальные уравнения, методы оптимизации, уравнения в частных производных, элементы математической статистики. Лабораторные работы практикума можно выполнять на ЕС ЭВМ или ЭВМ «Мир-2». Каждая лабораторная работа состоит из основной части и приложения. В основной части содержится: математическая постановка типовой задачи, описания метода ее решения и используемого алгоритма, варианты индивидуальных заданий для группы из 30 человек и подробное описание порядка выполнения работы на ЕС ЭВМ. В приложении приведены все сведения, необходимые для выполнения лабораторной работы на ЭВМ «Мир-2».

Цель практикума — научить пользоваться простейшими методами вычислений, изучаемыми в общем курсе математики. Поэтому при написании программ были использованы минимальные изобразительные средства языков программирования Фортран и Аналитик. Краткие сведения об этих языках приведены в Дополнениях.

При проведении лабораторных работ на ЕС ЭВМ в больших студенческих потоках рекомендуется предварительно организовать специальную библиотеку объектных модулей на устройства прямого доступа, содержащую стандартные подпрограммы практикума. Это позволит резко сократить трудоемкость подготовительных работ и затраты машинного времени. Если используется ЭВМ «Мир-2», то тот же эффект дает создание библиотеки универсальных стандартных информатив на перфолентах.

При написании практикума использован опыт проведения лабораторных занятий кафедрами высшей математики и специальных курсов высшей математики Московского энергетического института.

Авторы приносят глубокую благодарность проф. С. И. Похожаеву и проф. С. А. Ломову, по инициативе и при поддержке которых создавалось пособие. Мы признательны коллективу кафедры высшей математики МИФИ, заведующему кафедрой проф. А. И. Прилепко за внимательное и доброжелательное рецензирование книги и ценные советы, а также рецензенту — канд. физ.-мат. наук С. А. Лапшину за благожелательное отношение и полезные замечания. Авторы признательны И. В. Гвоздовскому и Н. А. Мининой за большую помощь при работе над рукописью.

Все замечания и пожелания, направленные на улучшение практикума, будут приняты нами с благодарностью

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 1

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ $f(x)=0$ МЕТОДОМ ДЕЛЕНИЯ ПОПОЛАМ (МЕТОД БИСЕКЦИЙ)

Пусть задана непрерывная функция $f(x)$ и требуется найти корень уравнения $f(x) = 0$. Предположим, что найден отрезок $[a, b]$ такой, что $f(a)f(b) < 0$. Тогда согласно теореме Больцано — Коши внутри отрезка $[a, b]$ существует точка c, в которой значение функции равно нулю, т. е. $f(c) = 0$, $c \in (a, b)$. Итерационный метод бисекций состоит в построении последовательности вложенных отрезков $\{[a_n, b_n] \mid [a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \subset [a, b]\}$, на концах которых функция принимает значения разных знаков. Каждый последующий отрезок получают делением пополам предыдущего. Процесс построения последовательности отрезков позволяет найти нуль функции $f(x)$ (корень уравнения $f(x) = 0$) с любой заданной точностью.

Опишем один шаг итераций. Пусть на $(n-1)$-м шаге найден отрезок $[a_{n-1}, b_{n-1}] \subset [a, b]$, такой, что $f(a_{n-1})f(b_{n-1}) < 0$. Делим его пополам точкой $\xi = (a_{n-1} + b_{n-1})/2$ и вычисляем $f(\xi)$. Если $f(\xi) = 0$, то $\xi = (a_{n-1} + b_{n-1})/2$ — корень уравнения. Если $f(\xi) \neq 0$, то из двух половин отрезка выберем ту, на концах которой функция имеет противоположные знаки, так как один из корней лежит на этой половине. Таким образом,

$$a_n = a_{n-1},\ b_n = \xi,\ \text{если } f(\xi)f(a_{n-1}) < 0,$$
$$a_n = \xi,\ b_n = b_{n-1},\ \text{если } f(\xi)f(a_{n-1}) > 0.$$

Если требуется найти корень с точностью ε, то деление пополам продолжаем до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше 2ε. Тогда координата середины отрезка и есть значение корня с требуемой точностью ε.

Метод бисекций —простой и надежный метод поиска простого корня* уравнения $f(x) = 0$. Он сходится для любых непрерывных функций $f(x)$, в том числе недифференцируемых. Скорость сходимости невелика. Для достижения точности ε необходимо совершить N итераций, где

$$N \simeq \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}.$$

Это означает, что для получения каждых трех верных десятичных знаков необходимо совершить около 10 итераций.

* Корень $x = c$ называют простым, если $f(c) = 0$ и $f'(c) \neq 0$.

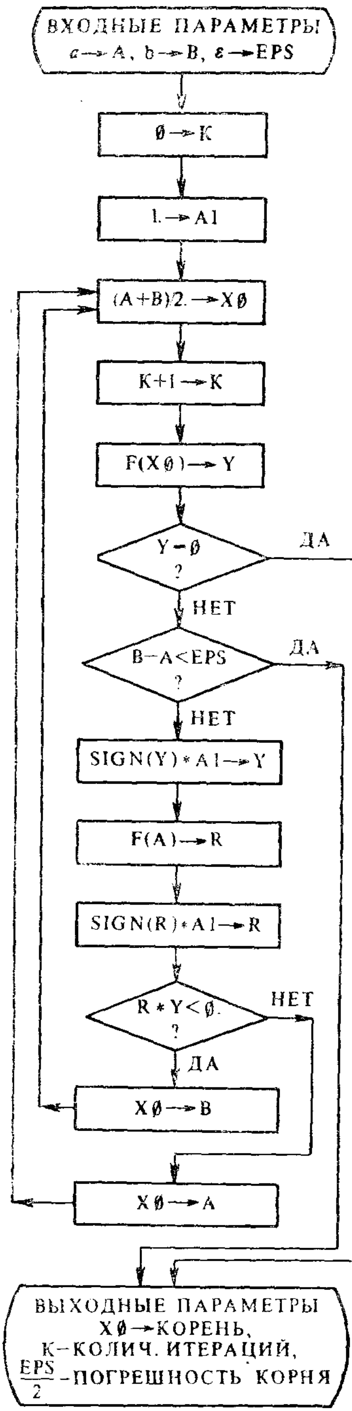
ВХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ
a → A, b → B, ε → EPS
Ø → K
1. → A1
(A+B)/2. → XØ
K+1 → K
F(XØ) → Y
Y = Ø ?
ДА
НЕТ
B−A<EPS ?
ДА
НЕТ
SIGN(Y) * A1 → Y
F(A) → R
SIGN(R) * A1 → R
R * Y < Ø. ?
НЕТ
ДА
XØ → B
XØ → A
ВЫХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ
XØ → КОРЕНЬ,
K − КОЛИЧ. ИТЕРАЦИЙ,
EPS/2 − ПОГРЕШНОСТЬ КОРНЯ

Рис. 1

Если на отрезке $[a, b]$ находятся несколько корней уравнения $f(x) = 0$, то процесс сходится к одному их них. Метод неприменим для отыскания кратных корней четного порядка. В случае кратных корней нечетного порядка он менее точен.

На рис. 1 изображена блок-схема описанного алгоритма. С ее помощью можно без труда написать следующий текст подпрограммы, которую назовем BISECT:

```
      SUBROUTINE BISECT(A,B,EPS,F,X0,K)
      K=0
    1 X0=(A+B)/2.
      Y=F(X)
      IF(Y)=2,5,2
    2 IF((B-A).LE.EPS) GO TO 5
      K=K+1
      R=F(A)
      IF(R*Y) 3,3,4
    3 B=X0
      GO TO 1
    4 A=X0
      GO TO 1
    5 RETURN
      END
```

Это, по-видимому, самое легкое решение поставленной задачи не является самым эффективным. Эффективность программы можно повысить, усовершенствуя алгоритм. Отметим очевидные недостатки приведенной программы.

Во-первых, при вычислении произведения R * Y может произойти «исчезновение порядка», что приведет к программному прерыванию, если программы выполняются на одной из моделей ЕС ЭВМ.

Во-вторых, на каждой итерации приходится лишний раз вычислять функцию $f(x)$. В самом деле, если выполняется оператор B = X0, то заново вычисляется F (A), если же выполняется оператор A = X0, то повторно вычисляется F (B).

В-третьих, оператор X0 = (A + B)/2 выполняется в 4—5 раз медленнее оператора X0 = (A + B) * 0. 5 (в данном случае это замечание носит чисто иллюстративный характер). В больших программах широкое применение таких очевидных усовершенствований может дать ощутимые результаты.

В библиотеке ФОРТРАНА есть встроенная функция SIGN (X, Y). Результат ее действия равен $|x|$ sign y. Используя эту функцию и учитывая сделанные замечания, составим окончательный вариант программы BISECT:

```
      SUBROUTINE BISECT(A,B,EPS,F,X0,K)
      K=0
      S=1.
      R=F(A)
    1 X0=0.5*(A+B)
      Y=F(X0)
      IF((Y.EQ.0).OR.((B-A).LE.(2.*EPS))) GO TO 4
      K=K+1
      S=SIGN(S,Y)*SIGN(S,R)
      IF(S) 2,4,3
    2 B=X0
      GO TO 1
    3 A=X0
      R=Y
      GO TO 1
    4 RETURN
      END
```

Входные параметры: A — левый конец отрезка $[a, b]$; B — правый конец отрезка $[a, b]$; EPS — погрешность определения корня; F — имя внешней подпрограммы — функции (FUNCTION F (X)), вычисляющей значения $f(x)$.

Выходные параметры: X0 — приближенное значение корня; K — количество итераций.

Перед обращением к подпрограмме необходимо:

1) составить подпрограмму-функцию F (X), вычисляющую значение $f(x)$. Имя функции F должно быть переменной вещественного типа;

2) описать имя F в головной программе оператором EXTERNAL;

3) присвоить значения входным параметрам A, B, EPS;

4) проверить, согласуются ли фактические параметры подпрограммы BISECT по типу и порядку с ее формальными параметрами.

Задание. Используя программу BISECT, найти корень уравнения $f(x) = 0$ с точностью ε.

Порядок выполнения лабораторной работы на ЕС ЭВМ

1. Графически или аналитически отделить корень уравнения $f(x) = 0$ (т. е. найти отрезок $[a, b]$, на котором функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Больцано — Коши).

2. Составить подпрограмму-функцию вычисления $f(x)$.

3. Составить головную программу, содержащую обращение к подпрограмме BISECT и печать результатов.

4. Провести вычисления по программе.

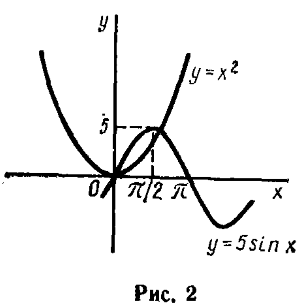

Рис. 2

Пример. Найти отличный от нуля корень уравнения $x^2 - 5\sin x = 0$ с четырьмя верными знаками после запятой.

▲ Искомый корень легко отделяется графически. Он лежит на отрезке $[1.57; 3.14]$ (рис. 2). Для того чтобы найти корень с тремя верными знаками после запятой, полагаем $\varepsilon = 0.0005$. В этом случае головная программа и подпрограмма-функция просты и не требуют комментариев:

```
  EXTERNAL F
  CALL BISECT(1.57,3.14,.5E-03,F,X,K)
  PRINT 1,X,K
  STOP
1 FORMAT(2X,'КОРЕНЬ=',E13.5,' КОЛИЧЕСТВО ИТЕРАЦИЙ=',I3)
  END
```

```
  FUNCTION F(X)
  F=X**2-5.*SIN(X)
  RETURN
  END
```

Вычисления по программе привели к следующим результатам:

```
КОРЕНЬ=  0.20859E 01 КОЛИЧЕСТВО ИТЕРАЦИЙ= 15
```

Приложение. Для выполнения лабораторной работы на ЭВМ «Мир-2» составляется универсальная стандартная информатива (УСИ) BISECT:

```
"ПУСТЬ"BISECT.K=0;X=A;R=F(X);1.X=(A+B)×0.5;
У=F(X);"ЕСЛИ"У=0"ТО""НА"2"ИНАЧЕ"("ЕСЛИ"
(B-A)<EPS×2"ТО""НА"2"ИНАЧЕ"(K=K+1;"ЕСЛИ"
R×У<0"ТО"(B=X;"НА"1)"ИНАЧЕ"(A=X;R=У;"НА"1)));
2."ВЫВОД"X,K"КОНЕЦ"◊
```

Перед обращением к УСИ BISECT необходимо описать функцию F (X), вычисляющую $f(x)$, а также присвоить формальным параметрам A, B, EPS фактические значения. Здесь A — левый конец, а B — правый конец отрезка $[a, b]$, EPS — погрешность корня.

Порядок выполнения лабораторной работы на ЭВМ «Мир-2»

1. Графически или аналитически отделить корень уравнения $f(x) = 0$.
2. Составить рабочую информативу, в которой содержится описание операторной функции F (X) и параметрам A, B, EPS присваиваются конкретные значения.
3. Составить директиву, содержащую обращение к УСИ BISECT.
4. Провести вычисления по программе.

Пример. Найти корень уравнения $x^2 - 5\sin x = 0$ с тремя верными знаками после запятой.

▲ Из рис. 2 видно, что корень лежит на отрезке [1.57, 3.14]. Полагаем $\varepsilon = 0.0005$. Рабочая информатива

```
"ПУСТЬ"A=1.57;B=3.14;EPS=.5⏨-3;
F(X)=X↑2-5×SIN(X)"КОНЕЦ"◊
```

Управляющая директива

```
"ВЫП""НА"BISECT"КОНЕЦ"◊
```

Вычисления по программе привели к следующему результату:

```
X=.208629⏨1K=11◊
```

Таким образом, искомый корень равен 2.086. △

Варианты заданий

№ варианта	Задание	a	b	c	·	A	B
1	Найти наименьший положительный корень уравнения $f(x)=0$, где $f(x)=\operatorname{tg} ax-bx$	0.6319	0.9217	—	—	—	—
2		9.4637	13.8249	—	—	—	—
3		0.9464	1.3825	—	—	—	—
4		8.5174	12.4424	—	—	—	—
5		1.8927	2.7650	—	—	—	—
6		4.4161	6.4516	—	—	—	—
7	Найти больший корень уравнения $f(x)=0$, где $f(x)=\ln(ax)-bx+c$	0.3049	0.3436	0.5	—	—	—
8		9.1464	10.3081	1.0	—	—	—
9		0.6098	0.6872	1.5	—	—	—
10		8.5366	9.6209	2.0	—	—	—
11		0.9146	1.0308	2.5	—	—	—
12		7.9268	8.9337	3.0	—	—	—
13	Найти наименьший положительный корень уравнения $f(x)=0$, где $f(x)=a\sin bx-cx$	0.33	2.3	0.5	—	—	—
14		10	7.375	7.75	—	—	—
15		1	2.2	1	—	—	—
16		6.3	5.189	5	—	—	—
17		1.67	2.5	1.5	—	—	—
18		8	6.18	6.25	—	—	—
19	Решить уравнение $f(x)=0$, где $f(x)=a\,e^{-bx}-x$	0.312	0.7586	—	—	—	—
20		0.893	0.52	—	—	—	—
21		0.0385	0.963	—	—	—	—
22		0.944	0.51	—	—	—	—
23		0.25	0.8	—	—	—	—
24		0.67	0.6	—	—	—	—
25		0.5	0.667	—	—	—	—
26		0.6857	0.56	—	—	—	—
27		0.982	0.503	—	—	—	—
28	Найти корень уравнения $f(x)=0$ на отрезке $[A, B]$, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$	0.8896	−2.813	−3.6929	11.2	1	3
29		0.107	−0.4613	−2.3738	5.44	0	4
30		1.2755	−3.601	−1.37	6.76	1	3

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2

МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ $f(x)=0$

Метод простых итераций (метод последовательных приближений) решения уравнения $f(x) = 0$ состоит в замене исходного уравнения эквивалентным ему уравнением $x = \varphi(x)$ и построении последовательности $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, сходящейся при $n \to \infty$ к точному решению. Сформулируем достаточные условия сходимости метода простых итераций.

Теорема. *Пусть функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на $[a, b]$, причем все ее значения $\varphi(x) \in [a, b]$. Тогда, если существует число q, такое, что $|\varphi'(x)| \leqslant q < 1$ на отрезке $[a, b]$, то последовательность $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ сходится к единственному на $[a, b]$ решению уравнения $x = \varphi(x)$ при любом начальном значении $x_0 \in [a, b]$*, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\varphi(x_n) = \xi, \quad f(\xi)=0, \quad \xi \in [a, b],$$

При этом, если на отрезке $[a, b]$ производная $\varphi'(x)$ положительна, то

$$|\xi - x_n| < \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|,$$

если $\varphi'(x)$ отрицательна, то

$$|\xi - x_n| < |x_n - x_{n-1}|.$$

Опишем один шаг итераций. Исходя из найденного на предыдущем шаге значения x_{n-1}, вычисляем $y = \varphi(x_{n-1})$. Если $|y - x_{n-1}| > \varepsilon$, полагают $x_n = y$ и выполняют очередную итерацию. Если же $|y - x_{n-1}| < \varepsilon$, то вычисления заканчивают и за приближенное значение корня принимают величину $x_n = y$. Погрешность полученного результата зависит от знака производной $\varphi'(x)$. При $\varphi'(x) > 0$ корень найден с погрешностью $q\varepsilon/(1-q)$, если $\varphi'(x) < 0$, то погрешность не превышает ε.

Метод допускает простую геометрическую интерпретацию. Построим графики функций $y = x$ и $y = \varphi(x)$. Корнем ξ уравнения $x = \varphi(x)$

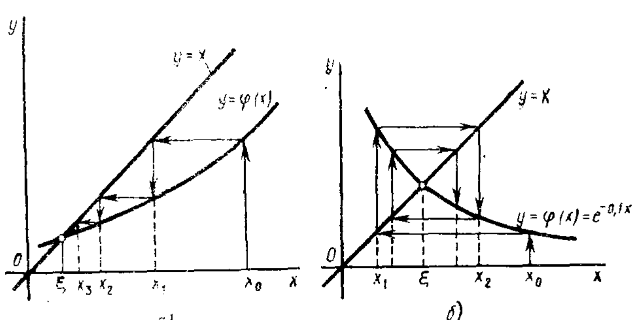

Рис. 3

является абсцисса точки пересечения кривой $y = \varphi(x)$ с прямой $y = x$ (рис. 3). Взяв в качестве начальной произвольную точку $x_0 \in [a, b]$, строим ломаную линию (рис. 3, *а*, *б*). Абсциссы вершин этой ломаной представляют собой последовательные приближения корня ξ. Из рисунков видно, что если $\varphi'(x) < 0$ на отрезке $[a, b]$, то последовательные приближения $x_n = \varphi(x_{n-1})$ колеблются около корня ξ, если же производная $\varphi'(x)$ положительна, то последовательные приближения сходятся к корню монотонно.

При использовании метода простых итераций основным моментом является выбор функции $\varphi(x)$ в уравнении $x = \varphi(x)$, эквивалентном исходному. Для метода итераций следует подбирать функцию $\varphi(x)$ так, чтобы $|\varphi'(x)| \leqslant q < 1$. При этом следует помнить, что скорость сходимости последовательности $\{x_n\}$ к корню ξ тем выше, чем меньше число q.

Пример. Найти корни уравнения $e^x - 10x = 0$ с точностью $\varepsilon = 0.0001$.

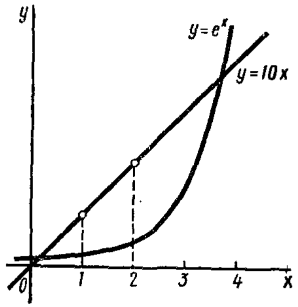

Рис. 4

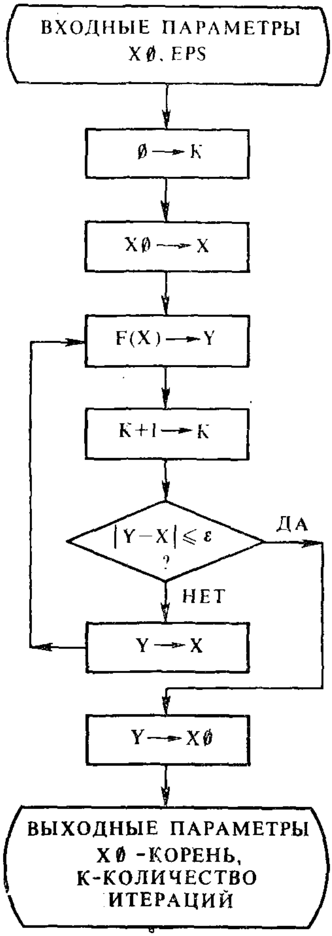

Рис. 5

Корни уравнения ξ_1, ξ_2 легко отделяются графически. Они являются абсциссами точек пересечения графика $y = e^x$ с прямой $y = 10x$. Из приведенного (рис. 4) графика видно, что первый корень лежит на отрезке $[0, 1]$, а второй — на отрезке $[2, 6]$. Для определения первого корня заменим исходное уравнение эквивалентным $x = 0.1\, e^x$; здесь $\varphi(x) = 0.1\, e^x$, $\varphi'(x) = 0.1 e^x$. На отрезке $[0,1]$ $0 < \varphi'(x) \leqslant 1$, т. е. $q = 0.1$. В качестве начального приближения выбираем $x_0 = 1$. Вычисления прекращаем, когда $|x_n - \varphi(x_n)| < \varepsilon$. Последовательные приближения в этом случае таковы:

```
0.271828E 00
0.131236E 00
0.114024E 00
0.112078E 00
0.111860E 00
0.111835E 00
```

Так как

$$|\xi - x_6| \leqslant \frac{0.1}{1-0.1} |x_6 - x_5| \leqslant \frac{0.00004}{9} \leqslant 0.000005,$$

то принимаем $\xi = 0.11183$. В этом результате все знаки верные.

Для определения второго корня представляем исходное уравнение в виде $x = \ln 10x$. Здесь $\varphi(x) = \ln 10x$, $\varphi'(x) = 1/x$ и при $x \geqslant 2$ производная $\varphi'(x)$ оценивается сверху: $|\varphi'(x)| = |1/x| \leqslant 0{,}5$, т. е. $q = 0.5$. Если в качестве начального приближения взять $x_0 = 2$, то получаем следующие последовательные приближения:

```
0.299573E 01
0.339977E 01
0.352629E 01
0.356283E 01
0.357314E 01
0.357603E 01
0.357684E 01
0.357706E 01
0.357713E 01
```

Принимаем $\xi = 3.5771$ с погрешностью 0.0001, так как

$$|\xi - x_9| \leqslant \frac{q}{1-q} |x_9 - x_8| \leqslant |x_9 - x_8| \leqslant 0.0001.$$

На рис. 5 изображена блок-схема алгоритма. Также просто з писыва ется и сама подпрограмма, которая здесь названа SITER (X0, EPS K, F):

```
      SUBROUTINE SITER(X0,EPS,K,F)
      K=0
      X=X0
    1 Y=F(X)
      K=K+1
      IF(ABS(Y-X).LE.EPS) GO TO 2
      X=Y
      GO TO 1
    2 X0=Y
      RETURN
      END
```

Подпрограмма SITER позволяет вычислять корни уравнения $x = \varphi(x)$ для любой функции, удовлетворяющей достаточным условиям сходимости метода простых итераций.

Входные параметры: X0′ — начальное приближение корня; EPS — параметр, используемый для окончания итерационного процесса. Если необходимо вычислить корень с точностью ε, то EPS полагают равным ε при $\varphi'(x) < 0$ и $\mathrm{EPS} = \frac{1-q}{q}\varepsilon$, если $0 < \varphi'(x) \leqslant q$; F — имя внешней подпрограммы функции, вычисляющей значения $\varphi(x)$.

Выходные параметры: X0 — приближенное значение корня; K — количество произведенных итераций.

Перед обращением к программе SITER необходимо:

1) составить подпрограмму-функцию F (X), вычисляющую значения $\varphi(x)$. Имя функции F должно быть переменной действительного типа;

2) описать имя F в головной программе оператором EXTERNAL.

3) присвоить в головной программе значения переменным X0 и EPS;

4) проверить, согласуются ли фактические параметры подпрограммы SITER по типу и порядку с ее формальными параметрами.

Замечание. Поскольку формальный параметр X0 получает внутри подпрограммы новое значение, соответствующий ему фактический параметр может быть только переменной, но не константой.

Задание. Используя подпрограмму SITER, найти корень уравнения $f(x) = 0$ с заданной точностью ε.

Порядок выполнения лабораторной работы на ЕС ЭВМ

1. Графически или аналитически отделить корень уравнения $f(x) = 0$.

2. Преобразовать уравнение $f(x) = 0$ к виду $x = \varphi(x)$ так, чтобы в некоторой окрестности $[a, b]$ корня ξ производная $\varphi'(x)$ удовлетворяла условию $|\varphi'(x)| \leqslant q < 1$. При этом следует помнить, что чем меньше q, тем быстрее последовательные приближения сходятся к корню.

3. Выбрать начальное приближение, лежащее на отрезке $[a, b]$.

4. Составить подпрограмму функцию для вычисления значений $\varphi(x)$.

5. Составить головную программу, содержащую обращение к SITER и печать результатов вычислений.

6. Провести вычисления по программе.

Пример. Найти корень уравнения $x - e^{-0.1x} = 0$ с точностью $\varepsilon = 0.0001$.

▲ Отделяем корень графически. Из рис. 4 видно, что $\xi > 0$. Преобразуем уравнение к виду $x = e^{-0,1x}$. Здесь $\varphi(x) = e^{-0,1x}$, $\varphi'(x) = -0.1e^{-0.1x}$, $\varphi'(x) < 0$ для всех $x \geqslant 0$ и $|\varphi'(x)| = |0.1e^{-0.1x}| \leqslant 0.1 < 1$. Значит, $q = 0.1$. В качестве нулевого приближения естественно выбрать $x_0 = 0$. Так как $\varphi'(x) < 0$, то для корня справедлива оценка $|\xi - x_n| \leqslant |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$. Следовательно, в качестве параметра EPS подпрограммы SITER следует взять величину ε. Итак, программа, решающая данную задачу, имеет вид

```
  ПРОСТЫЕ ИТЕРАЦИИ
  EXTERNAL FI
  X0=0.
  CALL SITER(X0,0.1E-03,K,FI)
  PRINT 1,X0,K
  STOP
1 FORMAT(2X,'КОРЕНЬ=',E13.5,' КОЛИЧ.ИТЕР.',I4)
  END

  FUNCTION FI(X)
  FI=EXP(-0.1*X)
  RETURN
  END
```

Вычисления привели к следующему результату:

```
КОРЕНЬ= 0.91277E 00 КОЛИЧ.ИТЕР.    5
```

Таким образом, корень уравнения можно принять равным $0.9128 \pm 0{,}0001$. $\triangle$

Приложение. Для выполнения лабораторной работы на ЭВМ «Мир-2» составляем универсальную стандартную информативу (УСИ) SITER:

```
"ПУСТЬ"SITER.К=0;Х=Х0;1.У=F(Х);К=К+1;
"ЕСЛИ"ABS(У-Х)<EPS"ТО""НА"2"ИНАЧЕ"
(Х=У;"НА"1);2.Х0=У;"ВЫВОД"34,Х0,К
"КОНЕЦ"◊
```

Перед обращением к УСИ SITER необходимо описать операторную функцию F (X), вычисляющую значения $\varphi(x)$, и присвоить формальным параметрам X0 и EPS фактические значения. Напомним, что X0 — начальное приближение корня, а параметру EPS присваивается значение ε, если $\varphi'(x) < 0$, и значение $\frac{1-q}{q}\varepsilon$, если $0 < \varphi' \leqslant q$.

Порядок выполнения лабораторной работы на ЭВМ «Мир-2»

1. Графически или аналитически отделить корень уравнения $f(x) = 0$.
2. Преобразовать уравнение $f(x) = 0$ к виду $x = \varphi(x)$ так, чтобы в некоторой окрестности $[a, b]$ корня ξ производная $\varphi'(x)$ удовлетворяла условию $|\varphi'(x)| \leqslant q < 1$. Функцию $\varphi(x)$ следует подобрать так, чтобы величина q была по возможности меньше.
3. Выбрать начальное приближение, лежащее на отрезке $[a, b]$.

4. Составить рабочую информативу, в которой содержится описание операторной функции F (X) и параметрам X0 и EPS присваиваются конкретные значения.

5. Составить директиву, содержащую обращение к УСИ SITER.

6. Провести вычисления по программе.

Пример. Найти корень уравнения $x - e^{-0.1x} = 0$ с четырьмя верными знаками после запятой.

▲ Имеем: $\varphi(x) = e^{-0.1x}$, $\varphi'(x) = -0.1e^{-0.1x}$, $\varphi'(x) < 0$, $|\varphi'(x)| = 0.1 \times \times e^{-0.1x} \leqslant 0.1 < 1$, $x \geqslant 0$. Значит, $q = 0.1$. В качестве нулевого приближения естественно выбрать $x_0 = 0$. Поскольку $\varphi'(x) < 0$, для корня справедлива оценка $|\xi - x_n| \leqslant |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$, следовательно, полагаем EPS $= \varepsilon$.

Рабочая информатива

```
"ПУСТЬ"EPS=.0001;X0=0;F(X)=1/EXP(.1×X)"КОН"◊
```

Директива

```
"ВЫПОЛНИТЬ""НА"SITER"КОНЕЦ"◊
```

После выполнения программы получено

```
X0=.912770₁₀0K=5◊
```

Приближенное значение корня равно 0.9128 ± 0.0001. ∆

Варианты заданий

Найти корень уравнения $f(x) = 0$ при заданных значениях коэффициентов

№ варианта	$f(x)$	a	b	c	d
1		1.5773	2.3041	—	—
2		2.2082	3.2258	—	—
3	$f(x) = \operatorname{tg} ax - bx$	3.7855	5.5300	—	—
4		9.1483	13.3641	—	—
5		5.9937	8.7558	—	—
6		7.8864	11.5207	—	—
7		7.622	8.59	0.5	—
8		6.0976	6.872	1.0	—
9	$f(x) = \ln(ax) - bx + c$	4.5732	5.154	1.5	—
10		3.9634	4.4868	2.0	—
11		3.0488	3.436	2.5	—
12		1.5244	1,718	3.0	—
13		9.33	6.977	7.25	—
14		7.667	5.983	6	—
15	$f(x) = a \sin bx - cx$	6.67	5.387	5.25	—
16		5.67	4.794	4.5	—
17		4.33	4.008	3.5	—
1		2.67	3.044	2.25	—