Б. В. Гнеденко, А. Я. Хинчин

# Элементарное введение в теорию вероятностей

Б. В. ГНЕДЕНКО, А. Я. ХИНЧИН

# ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ИЗДАНИЕ ДЕВЯТОЕ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1982

**Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я.**

Г 56 Элементарное введение в теорию вероятностей. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982.— 160 с.

Настоящая книжка выдержала несколько изданий в нашей стране и переведена во многих странах мира.

К читателю книжка в основной своей части предъявляет минимальные требования. Математических знаний, которые дает средняя школа, вполне достаточно для понимания всех ее частей. Изложение ведется на базе рассмотрения примеров практического содержания. Эти примеры излагаются так, чтобы читателю была ясна научная значимость вводимых понятий и выводимых правил.

Девятое издание отличается от восьмого, вышедшего в 1976 г., исправлением замеченных опечаток.

Илл.— 18.

Г $\frac{1702060000 - 051}{053(02)\text{-}82}$ 69-82 ББК 22.171 517.8

Г $\frac{1702060000 - 051}{053(02)\ 82}$ 69-82

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть третья

**СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ**

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ВОСЬМОМУ ИЗДАНИЮ

Тридцать лет прошло с момента первого издания настоящей книги. Написана она была по инициативе покойного Александра Яковлевича Хинчина для тех, кто после окончания школы пошел с оружием в руках защищать Родину. Мы были счастливы, что наша книжка напоминала им о великой миссии спасения культурных ценностей, которую они выполняли. Позднее эта книжка после окончания войны побудила бывших солдат продолжать обучение в ВУЗах.

Победа была завоевана, и страна перешла к восстановлению хозяйства, жестоко разрушенного войной. В книгу были внесены соответственные изменения. Позднее, уже после смерти А. Я. Хинчина, я вносил в нее разного рода изменения и дополнения. Книга не потеряла читателей и мне приятно, что она навела некоторых из них на глубокие мысли об использовании методов теории вероятностей в инженерном деле, организации производства, в экономике. В результате появились предложения, связанные с новыми методами расчета электрических сетей промышленных предприятий, ряда задач организации производства и транспорта.

Приятно, что книга тепло встречена и за пределами Советского Союза: она выдержала по несколько изданий в ГДР, США, Франции, ПНР, ЧССР, СФРЮ, СРР, была издана в Испании, Японии, Аргентине, НРБ, ВНР и ряде других стран.

В настоящем издании имеются лишь небольшие редакционные изменения по сравнению с прошлым изданием. Но жизнь идет вперед и поэтому мне хотелось бы услышать пожелания читателей о дополнениях и изменениях, которые желательно внести в книгу.

*Б. В. Гнеденко*

Москва, сентябрь 1975 г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ К СЕДЬМОМУ ИЗДАНИЮ

Вторично без моего учителя и соавтора я вношу изменение, написав новую главу.

Когда мы задумали написать элементарную книжку по теории вероятностей, перед нашими глазами были молодые люди, окончившие среднюю школу и отброшенные вихрем Великой Отечественной войны от общения с наукой. Позднее выяснилось, что круг читателей этой книжки оказался несравненно более широким и именно по ней знакомились с идеями и методами теории вероятностей инженеры и экономисты, биологи и лингвисты, медики и военные. Меня радует, что интерес к этой книжке не пропал как в нашей стране, так и за ее пределами. Само собой разумеется, что изменение круга читателей должно оказать некоторое влияние и на содержание книги. Поскольку для многочисленных применений теории вероятностей и для развития ее теории особую роль теперь играет теория случайных процессов, я счел необходимым дополнить книжку небольшим введением в эту важную область идей и исследований. Понятно, что, сообразуясь с общим назначением книжки, в этом дополнении обращено основное внимание не на проблемы теории или аналитический аппарат, а на общее ознакомление с реальными вопросами, приводящими к теории случайных процессов.

С большой благодарностью я приму от читателей любые пожелания, относящиеся к содержанию книжки, стилю изложения и характеру рассмотренных примеров.

*Б. В. Гнеденко*

Москва, 10 декабря 1969 г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее издание было подготовлено мной к печати уже после смерти А. Я. Хинчина — выдающегося ученого и педагога. Современное развитие теории вероятностей, многие ее идеи и результаты тесно связаны с именем Хинчина. Систематическое использование методов теории множеств и теории функций действительного переменного в теории вероятностей, построение основ теории случайных процессов, широкое развитие теории суммирования независимых случайных величин, а также построение нового подхода к задачам статистической физики и стройной системы ее изложения — все это заслуга Александра Яковлевича. Он же разделяет с С. Н. Бернштейном и А. Н. Колмогоровым заслугу создания советской школы теории вероятностей, играющей в современной науке выдающуюся роль. Я счастлив, что мне довелось быть его учеником.

Книжка, написанная нами в период победоносного завершения Великой Отечественной войны, отражала в рассмотренных нами примерах элементарные постановки военных задач. Теперь, спустя 15 лет после победы, в дни, когда вся страна покрыта лесами новостроек, естественно расширить тематику примеров, иллюстрирующих общие теоретические положения. Именно поэтому, не меняя изложения и элементарного характера книги, я позволил себе заменить на новые большое число примеров. За малыми исключениями те же изменения были внесены мной и во французское издание нашей книжки (Paris, 1960).

*Б. В. Гнеденко*

Москва, 6 октября 1960 г.

Часть первая

# ВЕРОЯТНОСТИ

Глава 1

## ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЙ

### § 1. Понятие вероятности

Когда про какого-нибудь стрелка говорят, что он при данных условиях стрельбы дает 92% попаданий, то это означает, что из сотни выстрелов, произведенных им при некоторых определенных условиях (одна и та же цель на том же расстоянии, та же винтовка и т. д.), *в среднем* бывает примерно 92 удачных (и значит, около 8 неудачных). Конечно, не в каждой сотне будет 92 удачных выстрела; иногда их будет 91 или 90, иногда 93 или 94; подчас число их может оказаться даже заметно меньше или заметно больше чем 92; но *в среднем* при многократном повторении стрельбы в тех же условиях этот процент попаданий будет оставаться неизменным, покуда с течением времени не произойдет каких-нибудь существенных изменений (так, наш стрелок может повысить свое мастерство, доведя средний процент попаданий до 95 и выше). И опыт показывает, что у такого стрелка в большинстве случаев число удачных выстрелов на сотню будет близко к 92; такие сотни, в которых, например, это число меньше чем 88 или больше чем 96, хотя и будут встречаться, но сравнительно редко. Цифра 92%, служащая показателем мастерства нашего стрелка, бывает обычно очень *устойчивой*, т. е. процент попаданий в большинстве стрельб (в тех же условиях) будет для данного стрелка почти один и тот же, лишь в редких, исключительных случаях уклоняясь сколько-нибудь значительно от своего среднего значения.

Рассмотрим еще один пример. На некотором предприятии было замечено, что в данных условиях в среднем 1,6% изготовленных предметов оказываются не удовлетворяющими стандарту и идут в брак. Это означает, что в партии, скажем, из 1000 изделий, еще не подвергнутых браковке, будет примерно 16 негодных. Иногда, конечно, число бракованных изделий будет несколько больше, иногда несколько меньше, но в среднем это число будет близко к 16, и в большинстве партий по 1000 изделий оно также будет близко к 16. Понятно, что и здесь мы предполагаем условия производства (организация технологического процесса, оборудование, сырье, квалификация рабочих и пр.) неизменными.

Ясно, что таких примеров можно привести сколько угодно. Во всех этих примерах мы видим, что при *однородных массовых* операциях (многократная стрельба, массовое производство изделий и т. п.) процент того или другого вида важных для нас событий (попадание в цель, нестандартность изделия и пр.) при данных условиях почти всегда бывает примерно одним и тем же, лишь в редких случаях уклоняясь сколько-нибудь значительно от некоторой средней цифры. Можно поэтому сказать, что эта средняя цифра является характерным показателем данной массовой операции (при данных строго установленных условиях). Процент попадания описывает нам мастерство стрелка, процент брака оценивает нам доброкачественность продукции. Само собой понятно поэтому, что знание таких показателей очень важно в самых различных областях: военном деле, технике, экономике, физике, химии и пр.; оно позволяет там не только оценивать уже происшедшие массовые явления, но и предвидеть исход той или иной массовой операции в будущем.

Если стрелок в данных условиях стрельбы попадает в цель в среднем 92 раза из 100 выстрелов, то мы говорим, что для этого стрелка и в этих условиях *вероятность попадания* составляет 92% (или 92/100, или 0,92). Если в данных условиях на каждую 1000 готовых изделий некоторого предприятия приходится в среднем 16 бракованных, то мы говорим, что *вероятность изготовления брака* составляет для данного производства 0,016, или 1,6%.

Что же мы вообще называем вероятностью событий в данной массовой операции? На это теперь нетрудно ответить. Массовая операция всегда состоит из повторения большого числа подобных между собою единичных операций (стрельба — из отдельных выстрелов, массовое производство — из изготовления отдельных предметов и т. п.). Нас интересует определенный результат единичной операции (попадание при единичном выстреле, нестандартность отдельного изделия и т. д.) и прежде всего — число таких результатов в той или другой массовой операции (сколько выстрелов попадает в цель, сколько изделий будет забраковано и т. д.). Процент (или вообще долю) таких «удачных»*) результатов в данной массовой операции мы и называем *вероятностью* этого важного для нас результата. При этом всегда надо иметь в виду, что вопрос о вероятности того или другого события (результата) имеет смысл только в точно определенных условиях, в которых протекает наша массовая операция. Всякое существенное изменение этих условий влечет за собой, как правило, изменение интересующей нас вероятности.

Если массовая операция такова, что событие $A$ (например, попадание в цель) наблюдается в среднем $a$ раз среди $b$ единичных операций (выстрелов), то вероятность события $A$ в данных условиях составляет $\frac{a}{b}\left(\text{или } \frac{100a}{b}\ \%\right)$. Можно сказать поэтому, что *вероятностью* «удачного» исхода единичной операции мы называем *отношение* в среднем наблюдающегося *числа таких «удачных» исходов к числу всех единичных операций,* составляющих данную массовую операцию. Само собой разумеется, что если вероятность какого-либо события равна $\frac{a}{b}$, то в каждой серии из $b$ единичных операций это событие может наступить и более чем $a$ раз, и менее чем $a$ раз; только *в среднем* оно наступает примерно $a$ раз; и в большинстве таких серий из $b$ операций число наступлений события $A$ будет близко к $a$, *в особенности, если $b$ — большое число.*

Пример 1. В некотором городе в течение первого квартала родились:

в январе — 145 мальчиков и 135 девочек,
в феврале — 142 мальчика и 136 девочек,
в марте — 152 мальчика и 140 девочек.

*) Во втором примере скорее следовало бы сказать «неудачных». Однако в теории вероятностей принято называть «удачными» те результаты, которые приводят к осуществлению события, интересующего нас в задаче.

Как велика вероятность рождения мальчика? Доля рождения мальчиков:

$$\text{в январе:}\quad \frac{145}{280} \approx 0{,}518 = 51{,}8\%,$$

$$\text{в феврале:}\quad \frac{142}{278} \approx 0{,}511 = 51{,}1\%,$$

$$\text{в марте:}\quad \frac{152}{292} \approx 0{,}521 = 52{,}1\%.$$

Мы видим, что среднее арифметическое долей за отдельные месяцы близко к числу $0{,}516 = 51{,}6\%$; искомая вероятность в данных условиях составляет примерно 0,516, или 51,6%. Эта цифра хорошо известна в демографии — науке, изучающей динамику населения; оказывается, что доля рождения мальчика в обычных условиях в различные периоды времени не будет значительно отклоняться от этой цифры.

Пример 2. В начале прошлого века было открыто замечательное явление, получившее название (по имени открывшего его английского ботаника Броуна) *броуновского движения*. Это явление заключается в том, что мельчайшие частицы вещества, взвешенные в жидкости *), находятся в хаотическом движении, совершающемся без всяких видимых причин.

Долго не могли выяснить причину этого, казалось бы, самопроизвольного движения, пока кинетическая теория газов не дала простого и исчерпывающего объяснения: движение частиц, взвешенных в жидкости, есть результат ударов молекул жидкости об эти частицы. Кинетическая теория газов дает возможность подсчитать вероятности того, что в данном объеме жидкости не будет ни одной частицы взвешенного вещества, что таких частиц будет одна, две, три и т. д. С целью проверки результатов теории был произведен ряд опытов.

Мы приведем результаты 518 наблюдений шведского физика Сведберга над мельчайшими частицами золота, взвешенными в воде. Было найдено, что в подвергшейся наблюдению части пространства 112 раз не наблюдалось ни одной частицы, 1 частица наблюдалась 168 раз, 2 частицы — 130 раз, 3 частицы — 69 раз,

---

*) Т. е. находящиеся в состоянии безразличного равновесия.

4 частицы — 32 раза, 5 частиц — 5 раз, 6 частиц — 1 раз, 7 частиц — 1 раз.

Таким образом,

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| доля | 0 частиц равна | | | $\frac{112}{518} = 0{,}216;$ |
| » | 1 наблюдавшейся частицы равна | | | $\frac{168}{518} = 0{,}324;$ |
| » | 2 наблюдавшихся частиц | | » | $\frac{130}{518} = 0{,}251;$ |
| » | 3 » | » | » | $\frac{69}{518} = 0{,}133;$ |
| » | 4 » | » | » | $\frac{32}{518} = 0{,}062;$ |
| » | 5 » | » | » | $\frac{5}{518} = 0{,}010;$ |
| » | 6 » | » | » | $\frac{1}{518} = 0{,}002;$ |
| » | 7 » | » | » | $\frac{1}{518} = 0{,}002.$ |

Результаты наблюдений, как оказалось, очень хорошо совпали с теоретически предсказанными вероятностями.

П р и м е р 3. В ряде практически важных задач существенно знание того, как часто могут встречаться в тексте те или иные буквы русского алфавита. Так, например, при формировании типографских касс нерационально запасать все буквы в одинаковом количестве, так как одни буквы в тексте встречаются значительно чаще, чем другие. Поэтому стремятся, чтобы чаще встречающиеся буквы были представлены в бóльшем числе. Исследования, произведенные над литературными текстами, привели к оценке частоты букв русского алфавита, включая пробелы между словами, которая сведена в следующую табличку*) (составлена в порядке уменьшения относительной частоты появления):

---

*) Эта табличка заимствована из превосходной популярной книжки: А. М. Я г л о м, И. М. Я г л о м. Вероятность и информация.— М.: Наука, 1973.

| Буква | Пробел | о | е, ё | а | и | т | н |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Относительная частота | 0,175 | 0,090 | 0,072 | 0,062 | 0,062 | 0,053 | 0,053 |
| Буква | с | р | в | л | к | м | д |
| Относительная частота | 0,045 | 0,040 | 0,038 | 0,035 | 0,028 | 0,026 | 0,025 |
| Буква | п | у | я | ы | з | ь, ъ | б |
| Относительная частота | 0,023 | 0,021 | 0,018 | 0,016 | 0,016 | 0,014 | 0,014 |
| Буква | г | ч | й | х | ж | ю | ш |
| Относительная частота | 0,013 | 0,012 | 0,010 | 0,009 | 0,007 | 0,006 | 0,006 |
| Буква | ц | щ | э | ф | | | |
| Относительная частота | 0,004 | 0,003 | 0,002 | 0,002 | | | |

Таким образом, исследования показывают, что в среднем из 1000 наудачу выбранных в тексте промежутков и букв на двух местах будет стоять буква «ф», на двадцати восьми — буква «к», на девяносто — буква «о» и на ста семидесяти пяти окажутся промежутки между словами. Эти данные являются достаточно ценными указаниями для формирования наборных касс.

В последние годы подобные исследования, уже не ограничивающиеся только статистикой букв в русских текстах, начинают широко использоваться для выяснения особенностей русского языка, а также литературного стиля различных авторов. Данные относительно телеграфных сообщений могут быть использованы для создания наиболее экономичных телеграфных кодов, которые позволяли бы передавать сообщения посредством меньшего числа знаков и тем самым быстрее. Выяснилось, что применяемые сейчас телеграфные коды не являются достаточно экономными.

## § 2. Невозможные и достоверные события

Вероятность события, очевидно, всегда есть положительное число или нуль. Она не может быть больше единицы, потому что у дроби, которой она определяется, числитель не может быть больше знаменателя (число «удачных» операций не может быть больше числа всех предпринятых операций). Условимся обозначать через $\mathsf{P}(A)$ вероятность события $A$. Каково бы ни было это событие,

$$0 \leqslant \mathsf{P}(A) \leqslant 1.$$

Чем больше $\mathsf{P}(A)$, тем чаще наступает событие $A$. Например, чем больше у стрелка вероятность попадания в цель, тем чаще у него удачные выстрелы, тем выше его мастерство. Если вероятность события очень мала, то оно наступает редко; если $\mathsf{P}(A) = 0$, то событие $A$ либо никогда не наступает, либо наступает крайне редко, так что практически можно считать его *невозможным*. Напротив, если $\mathsf{P}(A)$ близко к единице, то у дроби, которой выражается эта вероятность, числитель близок к знаменателю, т. е. подавляющее большинство операций «удачно»; такое событие наступает в большинстве случаев. Если $\mathsf{P}(A) = 1$, то событие $A$ наступает всегда или почти всегда, так что практически можно считать его *достоверным*, т. е. наверняка рассчитывать на его наступление. Если $\mathsf{P}(A) = 1/2$, то событие $A$ наступает примерно в половине всех случаев; это значит, что «удачных» операций наблюдается примерно столько же, сколько «неудачных». Если $\mathsf{P}(A) > 1/2$, то событие $A$ наступает чаще, чем не наступает, при $\mathsf{P}(A) < 1/2$ мы имеем обратное явление.

Как мала должна быть вероятность события, чтобы мы практически могли считать его невозможным? На этот вопрос нельзя дать общего ответа, потому что все зависит от того, насколько важно событие, о котором идет речь. Так 0,01 — число небольшое. Если мы имеем партию снарядов, и 0,01 есть вероятность того, что снаряд при падении не разорвется, то это означает, что примерно 1% выстрелов останется без результата. С этим можно примириться. Но если 0,01 есть вероятность того, что при прыжке парашют не раскроется, то с этим мириться, конечно, никак нельзя. Эти примеры показывают, что в каждой отдельной задаче нужно заранее на основании практических соображений установить, как мала должна быть вероятность события, чтобы мы без ущерба для дела могли не считаться с его возможностью.

## § 3. Задача

Задача. Один стрелок дает 80% попаданий в цель, а другой (при тех же условиях стрельбы) 70%. Найти вероятность поражения цели, если оба стрелка стреляют в нее одновременно. Цель считается пораженной при попадании в нее хотя бы одной из двух пуль.

Первый способ решения. Допустим, что производится 100 двойных выстрелов. Примерно в 80 из них цель будет поражена первым стрелком. Остается около 20 выстрелов, в которых этот стрелок даст промах. Так как второй стрелок поражает цель в среднем 70 раз из 100 выстрелов и, значит, 7 раз из 10 выстрелов, то мы можем ожидать, что в тех 20 выстрелах, в которых первый стрелок даст промах, второму удастся поразить цель примерно 14 раз. Таким образом, при всей сотне выстрелов цель окажется пораженной примерно $80 + 14 = 94$ раза. Вероятность поражения цели при одновременной стрельбе наших двух стрелков равна поэтому 94%, или 0,94.

Второй способ решения. Допустим опять, что производится 100 двойных выстрелов. Мы уже видели, что при этом первый стрелок даст примерно 20 промахов. Так как второй стрелок на сотню выстрелов дает примерно 30 промахов и, значит, на десяток примерно 3 промаха, то можно ожидать, что среди тех 20 выстрелов, в которых промахнется первый стрелок, будет примерно 6 таких, в которых промахнется также и второй. При каждом из этих 6 выстрелов цель останется непораженной, а при каждом из остальных 94 выстрелов по крайней мере один из стрелков выстрелит удачно, и цель будет поражена. Мы снова приходим к выводу, что при двойной стрельбе цель окажется пораженной примерно в 94 случаях из 100,