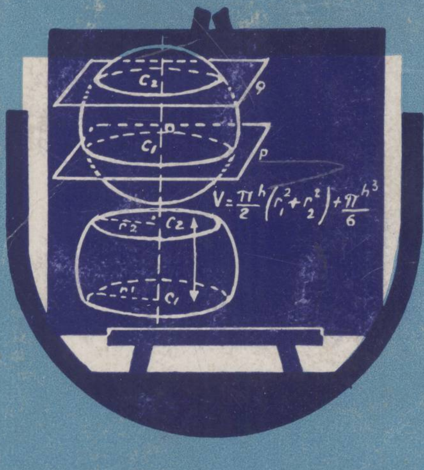
A. BIGUENET ET R. DUVAL

NOTIONS de GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

ET DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE



Eyrolles

ÉDITEUR, PARIS

NOTIONS DE GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE ET DE GÉOMETRIE DESCRIPTIVE

OUVRAGE DÉJA PARU :

Du même auteur

A la même librairie

NOTIONS DE GÉOMÉTRIE PLANE

format 13,5 × 18 - 272 pages - 466 figures

L'ENSEIGNEMENT
TECHNIQUE ET PROFESSIONNEL

NOTIONS DE GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE ET DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

A L'USAGE DES OUVRIERS ET APPRENTIS DES PROFESSIONS INDUSTRIELLES ET DU BATIMENT, DES CANDIDATS AUX DIVERS C. A. P., DES ÉLÈVES DES COURS PROFESSIONNELS, DES SECTIONS INDUSTRIELLES DES COURS COMPLÉMENTAIRES, DES ÉCOLES DE MÉTIERS ET DES CENTRES D'APPRENTISSAGE.

par

A. BIGUENET
Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure de l'Enseignement Technique
Professeur à l'Ecole Nationale Professionnelle de Saint-Ouen

et

R. DUVAL
Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure de l'Enseignement Technique
Professeur au Collège Technique Dorian

8ème Edition
NOUVEAU TIRAGE

EDITIONS EYROLLES
61, Boulevard Saint-Germain — Paris-Ve
1974

CHAPITRE I

DROITES ET PLANS

1. Remarques préliminaires.

Examinons une caisse (fig. 1). Elle a la forme d'un *parallélépipède rectangle.* Celui-ci est limité par six rectangles appelés *faces.* Les côtés de ces rectangles sont les *arêtes* du parallélépipède et leurs sommets sont les *sommets* de ce parallélépipède.

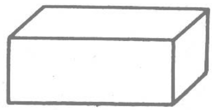


Fig. 1.

Posons cette caisse sur le plancher. Le plan de celui-ci contient l'une des faces du parallélépipède mais les cinq autres sont en dehors de ce plan. Un parallélépipède n'est pas une figure plane.

L'étude des figures qui ne sont pas contenues entièrement dans un plan fait l'objet de la *Géométrie dans l'espace.*

En géométrie plane nous avons démontré la plupart des théorèmes que nous avons énoncés. La démonstration de ceux que nous rencontrerons dans la géométrie dans l'espace est parfois longue et délicate. Nous nous bornerons à énoncer les plus importants et nous les vérifierons dans des cas simples.

2. Le plan.

Rappelons la définition du plan donnée dans la première leçon de géométrie plane.

Définition. — Un plan est une surface telle que toute droite qui passe par deux de ses points y est contenue tout entière.

Comme un plan est illimité dans toutes les directions, nous n'en représenterons jamais qu'une partie, celle que limite, par exemple, un rectangle (fig. 2, plan *P*).

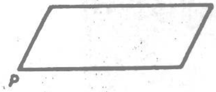


Fig. 2.

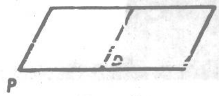


Fig. 3.

Deux planches à dessin bien dressées peuvent coïncider et glisser l'une sur l'autre sans que leurs plans cessent de coïncider.

Deux plans sont des figures égales.

Un plan peut glisser sur un autre plan.

Une droite d'un plan partage ce plan en deux régions appelées *demi-plans* (fig. 3).

3. Détermination d'un plan.

1° On peut appliquer une planche à dessin contre un coin de table d'une infinité de manières (fig. 4).

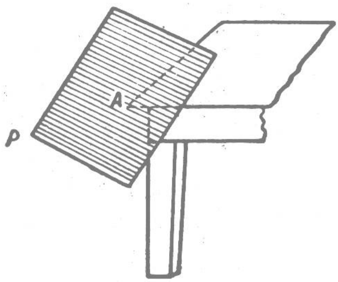


Fig. 4.

Par un point il passe une infinité de plans.

2° Une porte de placard

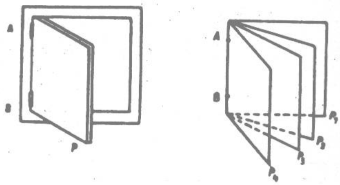


Fig. 5.

maintenue à celui-ci par deux gonds peut occuper une infinité de positions (fig. 5).

a) *Par deux points A et B il passe une infinité de plans.*

Tous ces plans contiennent la droite *AB*.

b) *Par une droite AB il passe donc une infinité de plans.*

3° Pour éviter qu'une porte ne touche le mur, on fixe parfois au sol une butée C (fig. 6). Celle-ci maintient la porte dans une position bien déterminée.

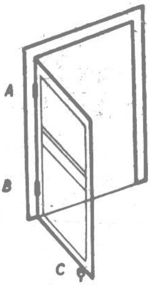


Fig. 6.

a) *Par trois points A, B, C, non en ligne droite, il passe un plan et un seul* (fig. 7).

b) On peut dire aussi que *par une droite AB et un point C extérieur à cette droite, il passe un plan et un seul.*

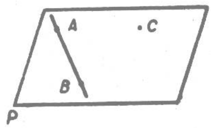


Fig. 7.

c) Si nous traçons la droite AC, elle est située dans le plan ABC.

Par deux droites concourantes AB et AC il passe un plan et un seul.

d) Nous avons vu[1] que, par définition, deux droites parallèles sont situées dans un même plan.

L'encadrement d'une porte est formé de deux jambages parallèles DE et FG réunis par le linteau DF (fig. 8). Il n'existe qu'une position de la porte contre ses jambages.

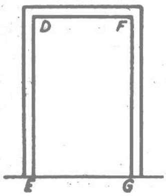


Fig. 8.

Par deux droites parallèles, il passe un plan et un seul.

Nous résumerons ces constatations en disant que ni un point, ni deux points ne déterminent un plan mais qu'un plan est déterminé :

a) soit par trois points non en ligne droite ;
b) soit par une droite et un point extérieur à cette droite ;
c) soit par deux droites concourantes ;
d) soit par deux droites parallèles.

4. Positions relatives de deux droites.

Dans ce qui suit, nous allons examiner les positions qu'occupent les unes par rapport aux autres les arêtes et les faces

1. Voir *Notions de Géométrie plane*, chap. XIII, § 1.

d'un parallélépipède rectangle, ou, plus exactement, les droites qui portent ces arêtes et les plans qui portent ces faces.

L'examen des arêtes montre que deux droites peuvent être (fig. 9) :

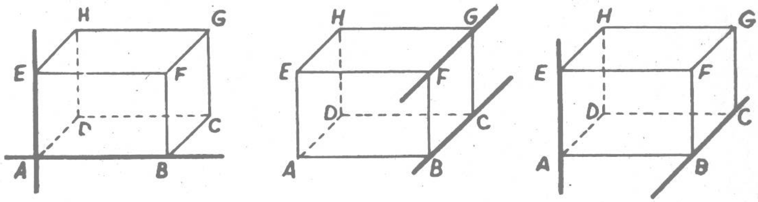


Fig. 9.

I. *Concourantes (AB et AE).*

II. *Parallèles (FG et BC)*

III. *Non situées dans un même plan (AE et BC).*

Les deux droites sont dans un même plan

5. Positions relatives d'une droite et d'un plan.

L'examen des arêtes et des faces d'un parallélépipède rectangle montre qu'une droite et un plan peuvent occuper trois positions relatives différentes (fig. 10) :

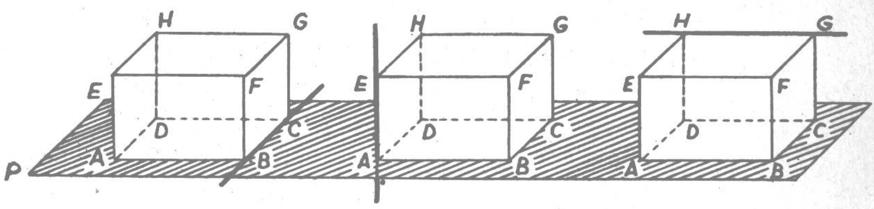


Fig. 10.

I. *La droite est dans le plan (droite BC et plan P).*

II. *Le plan coupe la droite et la droite perce le plan (plan P et droite AE).*

III. *La droite et le plan n'ont aucun point commun ; on dit que la droite et le plan sont parallèles (droite HG et plan P).*

6. Positions relatives de deux plans.

L'examen des faces du parallélépipède montre que deux plans peuvent occuper trois positions relatives différentes (fig. 11) :

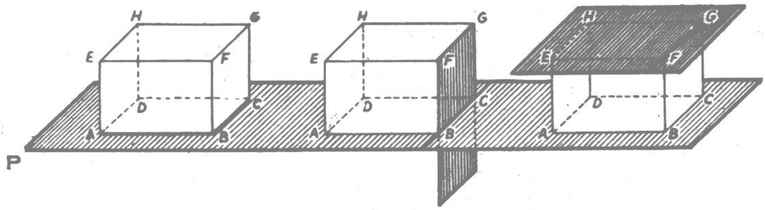


Fig. 11.

I. *Ils sont confondus (plan ABCD et plan P).*

II. *Ils se coupent suivant une droite appelée leur intersection (le plan BCGF et le plan P ont pour intersection BC).*

III. *Ils n'ont aucun point commun ; on dit que les deux plans sont parallèles (plan P et plan EFGH).*

Remarques et conseils.

Représentation des figures non planes.

Il est impossible de dessiner sur une feuille de papier une figure non plane. Nous pourrions effectuer le dessin de cette figure telle que nous la voyons. Ce dessin est appelé perspective *de cette figure. (Une photographie d'un objet est une perspective de cet objet). La perspective d'une figure dépend évidemment de la position de nos yeux.*

Le tracé de la perspective d'une figure étant assez difficile, nous nous bornerons à faire un croquis représentant cette figure à peu près comme nous la voyons.

Nous devrons nous habituer à « voir dans l'espace » les figures représentées en perspective. Nous aurons à éviter quelques erreurs :

Deux droites qui se croisent sur la perspective ne sont pas nécessairement concourantes (fig. 12).

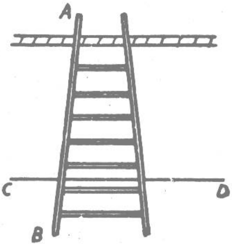


Fig. 12.

Le montant AB de l'échelle ne rencontre pas l'intersection CD du mur et du sol.

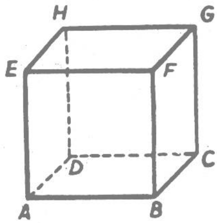


Fig. 13.

La perspective de l'angle droit FBC n'est pas un angle droit.

La perspective d'un angle n'est pas, en général, un angle égal (fig. 13).

Les perspectives de deux segments égaux ne sont pas, en général, des segments égaux. Par exemple, les segments inégaux AB et BC représentent deux segments égaux.

Nous représenterons, quand cela sera utile, les lignes cachées en pointillé.

Exercices.

1. Quelles positions relatives peuvent occuper quatre points, dans l'espace ?
2. Quelles positions relatives peuvent occuper trois droites ?
3. Quelles positions relatives peuvent occuper trois plans distincts ? En combien de régions partagent-ils l'espace ?
4. Quelles positions relatives peuvent occuper quatre plans ? En combien de régions partagent-ils l'espace ?
5. Pourquoi est-il plus facile d'équilibrer un guéridon à trois pieds qu'une table à quatre pieds ?
6. Que peut-on dire de trois droites non situées dans un même plan et se coupant deux à deux ?
7. En combien de points un cercle peut-il percer un plan ?

CHAPITRE II

PARALLÉLISME DE DROITES ET DE PLANS

1. Droites parallèles.

a) **Définition.** — Rappelons que deux droites parallèles sont deux droites situées dans un même plan et qui n'ont aucun point commun.

b) Dans le plan déterminé par un point A et une droite D, menons par A la parallèle à D (fig. 1). Nous savons qu'on n'en peut mener qu'une. Une droite passant par A qui n'est pas dans ce plan n'est évidemment pas parallèle à D.

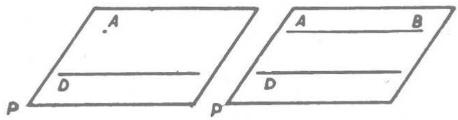


Fig. 1.

Théorème. — **Par un point pris hors d'une droite on peut mener une parallèle à cette droite et on n'en peut mener qu'une.**

c) Le plan P coupe les deux droites parallèles AE et BF (fig. 2).

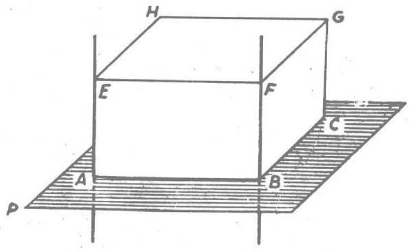
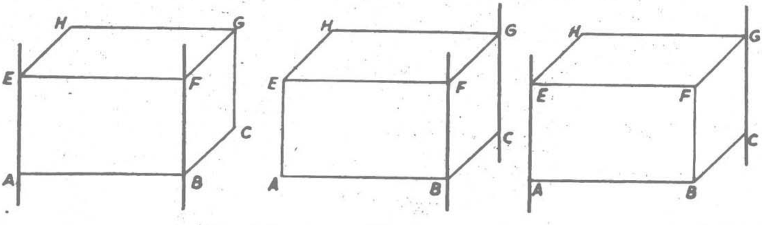


Fig. 2.

Théorème. — **Si deux droites sont parallèles, tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.**

d) Droites parallèles à une troisième (fig. 3).



AE est parallèle à BF, CG est parallèle à BF → *AE est parallèle à CG*

Hypothèse. *Conclusion.*

Fig. 3.

THÉORÈME. — **Si deux droites sont parallèles à une troisième, elles sont parallèles entre elles.**

e) Plions une feuille de papier rectangulaire *ABCD* autour d'une droite *OI* parallèle aux bords *AB* et *CD* (fig. 4) ; *OI* est l'intersection des deux plans *ABIO* et *DCIO* passant par les droites parallèles *AB* et *CD*.

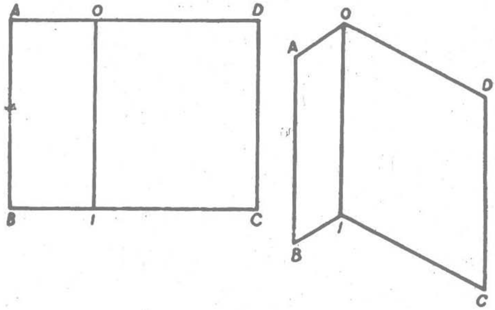


Fig. 4.

THÉORÈME. — **Si deux plans passant par deux droites parallèles se coupent, leur intersection est parallèle à ces droites.**

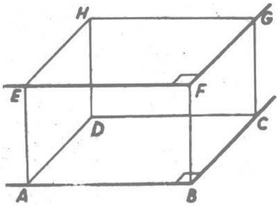


Fig. 5.

2. Angles à côtés parallèles.

a) Les angles *ABC* et *EFG* ont leurs côtés parallèles deux à deux et de même sens ; ils sont égaux (fig. 5). Il en est de même des angles *DAH* et

CBG (fig. 6). Cette propriété est vraie quelle que soit la position relative des deux angles. Si par exemple, nous menons par le point O' deux droites $O'x'$ et $O'y'$ respectivement parallèles aux deux côtés d'un angle $\widehat{xOy}$ et de même sens qu'eux, l'angle formé $\widehat{x'O'y'}$ est égal à $\widehat{xOy}$ (fig. 7).

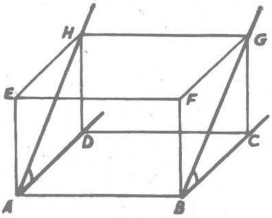


Fig. 6.

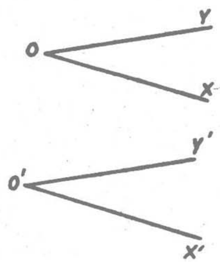


Fig. 7.

THÉORÈME. — **Deux angles qui ont leurs cotés parallèles et de même sens sont égaux.**

b) **Angle de deux droites non situées dans un même plan.**

D et *D'* sont deux droites non situées dans un même plan. Par un point quelconque *O*, menons deux droites, l'une *d* parallèle à *D*, l'autre *d'* parallèle à *D'* (fig. 8). Les droites *d* et *d'* forment quatre angles deux à deux égaux ($\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ et $\widehat{O}_3 = \widehat{O}_4$). *L'angle aigu* $\widehat{O}$ *est, par définition, l'angle des deux droites D et D'.* D'après le théorème précédent, sa valeur reste la même si on le construit à partir d'un autre point *O'*,

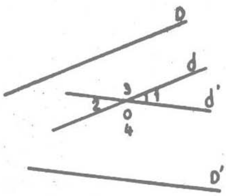


Fig. 8.

Pour obtenir l'angle des droites *GC* et *HB*, menons par *H* la parallèle *HD* à *GC* (fig. 9) : $\widehat{DHB}$ est l'angle des droites *GC* et *HB*.

c) *Droites orthogonales.* — L'angle des deux droites *AE* et *DC*,

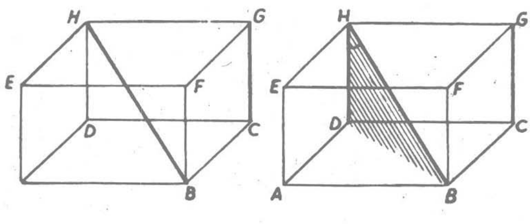


Fig. 9.

non situées dans un même plan, est égal à l'angle formé par *AE* et la parallèle *AB* menée par *A* à *DC* : cet angle est droit. *On dit que les droites AE et DC sont orthogonales.* (fig. 10).

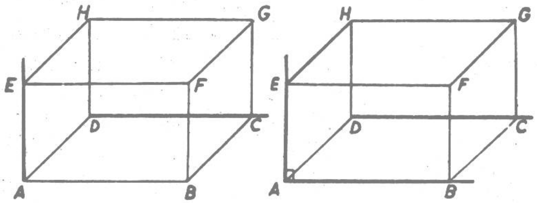


Fig. 10.

3. Droite et plan parallèles.

*Nous avons vu qu'***une droite est parallèle à un plan lorsqu'elle n'a aucun point commun avec ce plan.**

Appuyons une planche à dessin *Q* par son bord *AB* sur une autre planche *P* (fig. 11). Les droites *AB* et *CD* sont parallèles. La droite *CD* ne pourrait rencontrer le plan *P* qu'en rencontrant la droite *AB*, ce qui est impossible puisqu'elles sont parallèles.

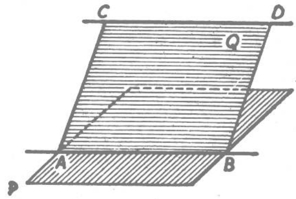


Fig. 11.

THÉORÈME. — **Si une droite est parallèle à une droite d'un plan, elle est parallèle à ce plan.**

4. Plans parallèles.

a) **Définition.** — *Nous avons vu que* **deux plans parallèles sont deux plans qui n'ont aucun point commun.**

b) Les droites *EF* et *EH* de la face *EFGH* du parallélépipède (fig. 12) sont respectivement parallèles aux droites *AB* et *AD* de la face *ABCD*. Les plans *ABCD* et *EFGH* sont parallèles.

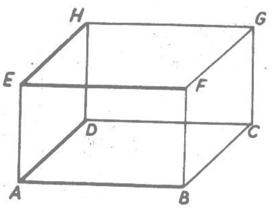


Fig. 12.

Cette constatation est générale ; si deux angles ont leurs côtés parallèles, ils sont situés dans des plans parallèles.

Si par un point *a*, extérieur à un plan *P*, on mène deux parallèles *ab* et *ac* à deux droites concourantes du plan *P*, le plan déterminé par *ab* et *ac* est parallèle au plan *P* (fig. 13). Par le point *a*, on ne peut pas mener d'autre plan parallèle à *P*.

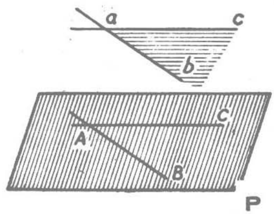


Fig. 13.

THÉORÈME. — **Par un point pris hors d'un plan on peut mener un plan parallèle à ce plan, et un seul.**

c) Le plan *R* coupe les plans parallèles *P* et *Q* suivant les droites parallèles *BC* et *FG* (fig. 14). De même le plan *S* coupe les plans *P* et *Q* suivant les droites parallèles *AB* et *HG*. (fig. 15).

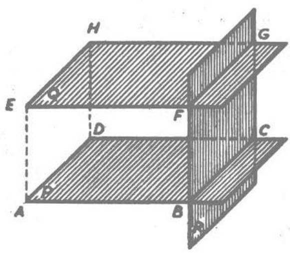


Fig. 14.

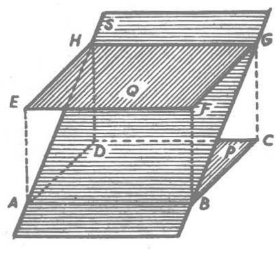


Fig. 15.

THÉORÈME. — **Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les intersections sont deux droites parallèles.**

d) Remarquons que $FB = GC$ (fig. 14) et que $AH = BG$ (fig. 15).

THÉORÈME. — **Les segments de droites parallèles compris entre deux plans parallèles sont égaux.**

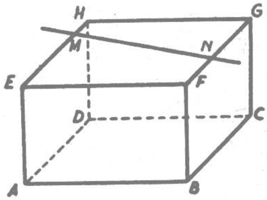


Fig. 16.

e) Une droite MN du plan $EFGH$ ne peut pas rencontrer le plan $ABCD$ (fig. 16).

THÉORÈME. — **Si deux plans sont parallèles, tout droite de l'un est parallèle à l'autre.**

Remarques et conseils.

Réalisation d'un plan.

1. *Si une droite s'appuie sur deux droites d'un plan, elle est située dans ce plan.*

Exemple. — *On remplit d'argile un moule parallélépipédique et, à l'aide d'une règle appuyée sur deux bords opposés du moule, on racle la partie supérieure de celui-ci ; on obtient ainsi une face plane.*

2. *Si une droite se déplace parallèlement à elle-même en s'appuyant constamment sur une droite fixe, elle engendre un plan.*

Exemple. — *La pointe de l'outil d'un étau-limeur ou d'une raboteuse effectue une série de saignées rectilignes et parallèles dans la pièce. Ces saignées s'appuient sur le bord rectiligne de la pièce ; la surface obtenue est plane.*

Exercices.

1. La figure 17 représente un morceau de bois dont les faces P_1 et P_3 sont parallèles ainsi que les faces P_2 et P_4. Montrer que la section de ce solide par un plan qui rencontre les quatre arêtes est un parallélogramme.

Application. — On veut scier cette barre de bois suivant le plan déterminé par les droites AB et BC tracées sur les faces P_1 et P_2. Tracer les côtés de la section sur les faces P_3 et P_4.

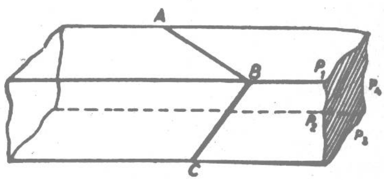


Fig. 17.