ЭКОНОМИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА

Ю. М. ЕРМОЛЬЕВ
А. И. ЯСТРЕМСКИЙ

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ В ЭКОНОМИЧЕСКОМ ПЛАНИРОВАНИИ

ЭКОНОМИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА

Ю. М. ЕРМОЛЬЕВ, А. И. ЯСТРЕМСКИЙ

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ В ЭКОНОМИЧЕСКОМ ПЛАНИРОВАНИИ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1979

22.18
Е 93
УДК 519.6

Стохастические модели и методы в экономическом планировании. Ермольев Ю. М., Ястремский А. И. Наука. Главная редакция физико-математической литературы, М., 1979.

В книге рассмотрены проблемы применения математических моделей в экономическом планировании в условиях неполной информации. Неполнота информации в экономическом планировании имеет место при случайности спроса и потребления продукции, при влиянии на некоторые отрасли материального производства погодных условий, в задачах перспективного планирования. Последовательный подход к математическому описанию явлений подобного рода необходимо приводит к использованию стохастических моделей, которые являются весьма своеобразным и специфическим объектом математического программирования. В книге развиваются методы количественного и качественного анализа стохастических моделей экономики и применяются к широкому кругу моделей.

Е $\dfrac{20204-175}{053(02)\text{-}79}$ 79-79. 1502000000

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

К настоящему времени хорошо изучены модели оптимального планирования, параметры которых являются детерминированными величинами. К этому классу, в частности, относятся модели линейного, нелинейного, дискретного, динамического программирования. В практическом отношении это означает, что плановые расчеты должны базироваться на строго определенных показателях затрат, выпуска, потребления и т. п. В то же время, особенно в перспективном планировании, весьма сложно, а порой невозможно указать точные значения этих показателей; их фактические значения могут существенно отличаться от тех, которые берутся за основу в практике планирования, могут иметь разброс вокруг анализируемых значений. Это обстоятельство может привести к существенным ошибкам при принятии плановых решений.

Одним из способов учета недетерминированного характера исходной информации является применение моделей и методов стохастического программирования.

Основная цель развития стохастических моделей и методов оптимального планирования (моделей и методов стохастического программирования) состоит в учете всего диапазона возможных значений параметров изучаемых процессов, в учете вероятностного характера информации, которая поступает в плановый орган. Причины вероятностного характера исходной информации для экономико-математических моделей известны: наличие случайных ошибок при прогнозе на перспективу, особенно при быстрых темпах научно-технического прогресса; случайность спроса; влияние погодных условий на некоторые отрасли материального производства и т. д. Изучение, а также практическое использование стохастических моделей позволят не только повысить научную обоснованность, точность и помехоустойчивость плановых расчетов, но также и поставить ряд интересных задач, решение которых (пусть даже грубо) в рамках детерминированных моделей принципиально невозможно.

Следует отметить, что в практике планирования часто требуются дополнительные пояснения того, как появляются вероятности. Хотя исчисление вероятностей не требует изменений, тем не менее классической, частотной интерпретации вероятностей, как правило, недостаточно. Ситуации здесь во многом напоминают те, с которыми приходится сталкиваться в теории статистических решений при определении априорных законов распределения. В перспективном планировании может оказаться необходимым характеризовать вероятностями величины, которые наблюдаются только один раз, например, затраты на уникальное изделие, возможность конфликта в заданном районе земного шара. По всей видимости, для практики технико-экономического планирования может оказаться вполне достаточным тот способ задания вероятностей, который применяется в сетевом планировании. События, происходящие только один раз, например, момент планируемого окончания строительства моста через реку, является случайной величиной, значения которой определяются путем опроса экспертов, каждый из которых дает три оценки продолжительности — оптимистическую, пессимистическую и наиболее вероятную. Получаемый в результате этого «разброс» оценок позволяет сформировать определенный закон распределения. Если событие носит сложный характер, а его продолжительность определяется продолжительностью элементарных событий, по которым могут высказываться группы экспертов различных специальностей, то строятся сети составляющих его элементарных событий, каждому из которых приписывается продолжительность путем опроса соответствующей группы экспертов. И хотя при этом аналитически найти распределение интересующей случайной величины практически невозможно, сетевая модель позволяет наблюдать (с помощью ЭВМ) отдельные реализации этой величины. Продолжительность сложного события часто можно интерпретировать как длину кратчайшего пути в некотором стохастическом графе. Наблюдая длины отдельных дуг (продолжительность элементарных событий), можно определять реализации значений кратчайшего пути. Аналогично имитационные модели сетевого типа могут быть созданы для наблюдения случайных реализаций таких показателей, как затраты на разработку уникального изделия, спрос на продукцию и т. п.

Численные методы оптимизации вероятностных систем, которые обсуждаются в данной монографии, не требуют знания законов распределения случайных параметров; для их применения достаточно иметь имитационные модели, позволяющие наблюдать значения случайных параметров.

Плодотворное использование в практических расчетах и теоретических исследованиях любого нового класса моделей (в том числе и стохастических), если они более адекватно отображают экономическую действительность по сравнению с уже существующими классами моделей, возможно лишь при наличии взаимосвязанных факторов — эффективных методов решения и широкой разветвленной системы методов качественного анализа данного класса моделей.

При практическом использовании моделей, безусловно, главным является наличие хорошо алгоритмизируемых вычислительных методов, позволяющих за приемлемое время найти оптимальное решение задачи. Кроме того, сам вычислительный процесс зачастую имеет довольно прозрачную экономическую интерпретацию и может служить моделью реальных процессов, происходящих в экономике, поэтому его теоретический анализ позволяет изучать закономерности формирования оптимального состояния в изучаемой экономической системе.

Необходимо отметить, что большинство практически интересных моделей стохастического программирования обладает рядом особенностей, которые не позволяют применять к ним традиционные численные методы нелинейного программирования. К этим особенностям прежде всего следует отнести недифференцируемость функций цели и ограничений, а также практическую невозможность точного вычисления значений этих функций, их производных или аналогов производных. В последние годы интенсивно развивались прямые численные методы стохастического программирования, с помощью которых стало возможным решение подобных задач. Общие схемы некоторых из этих методов обсуждаются во второй главе. В третьей главе они применяются к стохастическим задачам складирования и размещения производства.

При теоретическом исследовании экономических систем с помощью математических моделей центр тяжести ложится на методы качественного анализа. Разнообразные признаки оптимальности, изучение вопросов устойчивости позволяют сделать ценные выводы по ряду актуальных проблем экономической теории, не прибегая к численным расчетам. Помимо этого, знание качественных свойств экономико-математической модели является существенным подспорьем при ее практической реализации. С помощью качественного исследования модели удается глубже проанализировать структуру оптимального плана, установить нормативы эффективности ресурсов, пересмотреть требования к точности той или иной группы параметров и в последующих расчетах учесть эти требования, полностью или частично элиминировать действие неучтенных факторов и т. д. Эти вопросы обсуждаются подробно в главе IV.

В главах IV—VI дается экономическая интерпретация соотношений двойственности для стохастического программирования, обсуждаются качественно новые по сравнению с детерминированными моделями эффекты, следующие из этих соотношений, доказываются некоторые маргинальные теоремы для многоэтапных задач стохастического программирования, применяются условия оптимальности и соотношения двойственности для анализа стохастических задач динамической и межотраслевых моделей. Глава VII посвящена обоснованию стохастического диалогового метода оптимизации в случае, когда отношение предпочтения субъекта планирования задается с помощью бинарного отношения.

Следует отметить, что данная монография тесно примыкает к монографии Ю. М. Ермольева [2], в которой можно найти обоснование рассматриваемых здесь на достаточно элементарном уровне численных методов. В данной монографии авторы ставили перед собой цель более подробно очертить ситуации, в которых каждый из методов применим. Отметим также, что поскольку предметом монографии являются вопросы, носящие прикладной характер, то наряду со строгим обоснованием принципиальных моментов в ней можно обнаружить рассуждения на эвристическом уровне, редко в деталях обсуждаются вопросы существования (предполагается, что все достаточные условия для этого выполняются).

Монография может быть полезна как для научных работников и специалистов, занимающихся исследованием операций и его приложениями, так и для аспирантов, студентов старших курсов, специализирующихся по экономической кибернетике и прикладной математике.

Ю. М. Ермольев,
А. И. Ястремский

ГЛАВА I

ПОСТАНОВКИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

§ 1. Учет случайного разброса параметров моделей линейного программирования

1. В настоящее время в практике планирования на основе математических методов наибольшее распространение получили детерминированные модели линейного программирования. В общем виде они сводятся к максимизации линейной функции цели

$$\sum_{j=1}^{n} a_{0j}x_j \tag{1.1}$$

при ограничениях

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i \geqslant 0 \qquad (i = \overline{1, m}), \\ x_j \geqslant 0 \qquad (j = \overline{1, n}), \end{gathered} \tag{1.2}$$

или, в векторно-матричной форме,

$$\begin{gathered} (a, x) \to \max, \\ Ax + b \geqslant 0, \quad x \geqslant 0. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Выше приняты следующие обозначения: $a_{ij}\,(i = \overline{0, m};\ j = \overline{1, n})$ — удельный выпуск (если $a_{ij} \geqslant 0$) или удельные затраты (если $a_{ij} < 0$) i-го ингредиента j-м технологическим способом; b_i — количество ингредиента i, которым располагает экономическая система (если $b_i \geqslant 0$) или количество i-го ингредиента, которое система должна выдать вовне (если $b_i < 0$); x_j — интенсивность j-го технологического способа; $b = (b_1, \ldots, b_m)$; $a = (a_{01}, \ldots, a_{0n})$; $A = \{a_{ij}\}_{i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}}$. Под ингредиентом понимается вид вещества или энергии, находящийся в экономическом обороте.

Важнейшим предположением, которое неявно содержится в модели линейного программирования, является предположение о детерминированном характере параметров a_{ij} $(i = \overline{0, m};\ j = \overline{1, n})$ и b_i $(i = \overline{1, m})$. Это равносильно тому, что плановый орган располагает абсолютно точной информацией о неуправляемых параметрах модели. Предположение о детерминированности неуправляемых параметров является довольно оправданным допущением при планировании на небольшие интервалы времени, в течение которых основные характеристики системы существенно не изменяются и их можно достаточно точно оценить. При долгосрочном и перспективном планировании неизбежны случайные ошибки. Ошибки прогнозирования позволяют получить только области возможных значений параметров моделей: новые технологические способы, спрос, запасы полезных ископаемых, урожайность, удельные затраты и выпуск. Игнорирование случайного характера неуправляемых параметров может повлечь за собой грубые ошибки при принятии плановых решений. Л. В. Канторович [2] отмечает, что нормативы затрат в способах, в особенности при прогнозах на будущие годы, данные о ресурсах, в частности, о природных, расчетная потребность и спрос на будущие годы представляют собой в действительности стохастические величины, известные нам лишь с той или иной вероятностью. Поэтому задача построения оптимального плана также должна рассматриваться как задача стохастического программирования. Помимо осложнения процесса решения это обстоятельство сказывается качественным образом на оценке эффективности решений и на ценообразовании.

В моделях стохастического программирования параметры a_{ij}, b_i рассматриваются как случайные величины. В общем случае они могут быть зависимыми случайными величинами, поэтому удобно говорить, что a_{ij}, b_i являются функциями случайных параметров θ или, более общо, функциями элементарного события θ вероятностного пространства $(\Theta, \mathcal{T}, \mathsf{P})$; при этом θ не обязательно является числом. Здесь Θ — множество элементарных событий; $\mathcal{T}$ — множество событий (система подмножеств Θ), на которых определена вероятность P. Считается, что класс событий $\mathcal{T}$ образует σ-алгебру событий, т. е. содержит достоверное событие (множество Θ), невозможное событие (множество $\varnothing$), замкнут относительно счетных операций объединения, пересечения и отрицания. Часто θ называют состоянием природы. Указание зависимости a_{ij}, b_i от θ позволяет учесть в моделях оптимального планирования неточность прогнозов, случайный характер параметров.

2. Наряду с зависимостью от Θ величины a_{ij} часто зависят от масштабов производства, т. е. являются функциями

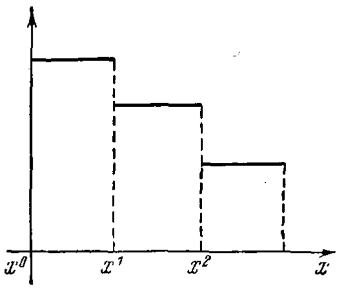

Рис. 1.

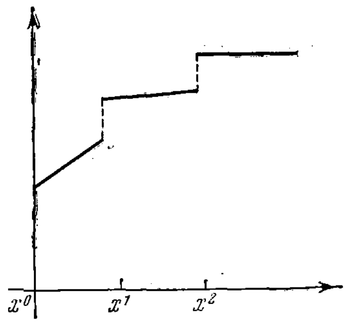

Рис. 2.

интенсивностей $x=(x_1, \ldots x_n)$, причем довольно часто можно считать, что a_{ij} зависит только от x_j, т. е. $a_{ij}=a_{ij}(x_j, \theta)$. На рис. 1 приведен типичный график изменения удельных затрат a_{ij} от x_j. Он характеризует снижение затрат на единицу выпускаемой продукции. Точки разрыва соответствуют максимальным объемам производства, на которые способна данная производственная система без ее перестройки при постоянной технической оснащенности. Если выпуск превышает значения x^0, x^1, x^2, ..., то производство требует модернизации. Общие затраты довольно точно аппроксимируются кусочно линейными, разрывными функциями вида, изображенного на рис. 2. Разрывы в точках x^0, x^1, x^2, ... связаны с дополнительными затратами на условно-постоянные расходы. Если они невелики по сравнению с общими затратами, ими можно пренебречь и тогда общие затраты являются непрерывной кусочно линейной функцией от масштаба производства.

Таким образом, линейные модели, в которых a_{ij}, b_i считаются постоянными и независимыми от x_j, имеют смысл, если интенсивности остаются в интервалах $(x^0, x^1]$, $(x^1, x^2]$, и т. д. Тот случай, когда a_{ij} зависят от x, но не зависят от θ, приводит к моделям нелинейного программирования. Основная цель стохастического программирования — учет влияния θ на неконтролируемые параметры.

3. Пусть $a_{ij} = a_{ij}(\theta)$, $b_i = b_i(\theta)$ $(i = \overline{0, m};\ j = \overline{1, n})$. В каком смысле следует тогда понимать запись, которая получается формально, если в модели (1.1) — (1.3) указать зависимость a_{ij} и b_i от θ:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{0j}(\theta)\, x_j \to \max, \tag{1.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)\, x_j + b_j(\theta) \geqslant 0 \qquad (i = \overline{1, m}), \tag{1.5}$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad (j = \overline{1, n}), \tag{1.6}$$

где $a_{ij}(\theta)$, $b_i(\theta)$ — случайные величины? Любой фиксированный вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$ при одних значениях θ может удовлетворять ограничениям (1.4) — (1.6), а при других θ — нет. В таком случае нетривиальным оказывается даже вопрос о том, какой вектор считать допустимым. Детерминированные модели не учитывают «разброс» значений $a_{ij}(\theta)$, $b_i(\theta)$; в этих моделях случайные величины заменяются детерминированными. Чаще всего вместо $a_{ij}(\theta)$, $b_i(\theta)$ рассматриваются их средние значения $\bar{a}_{ij}(\theta)$, $\bar{b}_i(\theta)$, планирование осуществляется в расчете на средние затраты, выпуск, ресурсы и т. п., т. е. рассматривается задача

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{0j}(\theta)\, x_j \to \max, \tag{1.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij}(\theta)\, x_j + \bar{b}_i(\theta) \geqslant 0 \qquad (i = \overline{1, m}), \tag{1.8}$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad (j = \overline{1, n}). \tag{1.9}$$

Можно отметить два существенных недостатка такого подхода. Во-первых, возможны грубейшие ошибки при выборе планового решения, связанные с тем, что план, выбранный в соответствии с (1.7)—(1.9), в действительности не является допустимым ни при одном θ. Чаще всего подобная ситуация имеет место в том случае, когда $a_{ij}(\theta)$, $b_i(\theta)$ имеют дискретное распределение.

Рассмотрим простой пример. Пусть требуется максимизировать $-x_1 - x_2$ при ограничениях $\theta x_1 + x_2 \geqslant 1$; $x_1 \geqslant 0$; $x_2 \geqslant 0$, где $\theta = +1$ с вероятностью 2/3 и $\theta = -1$ с вероятностью 1/3. Тогда $\bar{\theta} = 1/3$. Планы x, удовлетворяющие ограничениям данной задачи хотя бы при одном $\theta = \{\theta_1, \theta_2\}$, принадлежат пересечению неотрицательного ортанта с одним из заштрихованных полупространств (см. рис. 3). Между тем оптимальный план задачи (с усредненными параметрами) максимизации $-x_1 - x_2$ при ограничениях

$$\frac{1}{3} x_1 + x_2 \geqslant 1,$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0$$

есть точка (1/3, 0), не принадлежащая данной области.

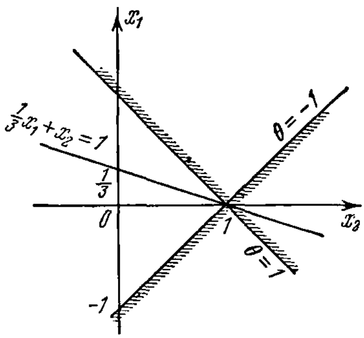

Рис. 3.

Во-вторых, подмена случайных величин детерминированными может привести к искажению сущности моделируемого процесса, поскольку с помощью детерминированных моделей нельзя описать такие важные аспекты планирования в условиях неопределенности, как возможность корректировки плана, дополнительные затраты при перепроизводстве и дефиците продукции, ценность информации.

4. Очевидно, что соотношениям (1.5), (1.6) можно придать иной, отличный от (1.8), (1.9), вероятностный смысл.

Например, в качестве допустимых планов задачи (1.4)—(1.6) можно рассматривать векторы x, удовлетворяющие (1.5), (1.6) при всех θ, т. е.

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta)\, x_j + b_i(\theta) \geqslant 0, \quad \theta \in \Theta \quad (i = \overline{1, m}), \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1, n}),\end{gathered} \tag{1.10}$$

или почти при всех θ (по вероятности P), т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta) x_j + b_i(\theta) \geqslant 0 \pmod{\mathsf{P}} \qquad (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad (j = \overline{1, n}).$$

Это — так называемые жесткие постановки задач стохастического программирования. В этом случае решение выбирается чрезвычайно «осторожно», чтобы искомый план удовлетворял балансовым ограничениям по всем ингредиентам при всех, самых маловероятных значениях θ. Зачастую система (1.10) не имеет других решений, кроме тривиальных. Например, пусть имеется неравенство

$$\theta x \leqslant 1, \quad x \geqslant 0,$$

где $\theta = 1$ с вероятностью 0,4, $\theta = 2$ с вероятностью 0,5 и $\theta = -1$ с вероятностью 0,1. Система

$$x \leqslant 1, \quad 2x \leqslant 1, \quad -x \leqslant 1, \quad x \geqslant 0$$

имеет единственное решение $x = 0$. Поскольку в данном примере $\theta \in \{1, 2\}$ с бóльшей вероятностью, то в некоторых случаях естественно допустимый план выбирать в расчете на данное множество θ. В соответствии с этим, допустимым планом задачи (1.4)—(1.6) иногда предлагают считать вектор, удовлетворяющий (1.5), (1.6) при тех θ, мера которых не ниже заданной величины, следовательно, допустимыми считаются те векторы x, которые удовлетворяют ограничениям

$$\mathsf{P}\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\theta) x_j + b_i(\theta) \geqslant 0\right\} \geqslant p_i \qquad (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad (j = \overline{1, n}), \tag{1.11}$$

где p_i — заданные числа. В постановках с ограничениями типа (1.11) большие трудности возникают в связи с выбором значений p_i. Кроме того, как правило, множество допустимых планов оказывается невыпуклым. Так, на рис. 3 точки, принадлежащие хотя бы одному из заштрихованных пространств, образуют невыпуклое множество, которое опи-