



**охрана
окружающей
природной
среды**

**В.В.Найденко, А.П.Кулакова,
И.А.Шеренков**

**Оптимизация
процессов
очистки
природных
и сточных
вод**

ройиздат

**В.В.Найденко, А.П.Кулакова,
И.А.Шеренков**

**Оптимизация
процессов
очистки
природных
и сточных
вод**

Под общей редакцией проф.,
д-ра техн. наук
В.В.Найденко

Печатается по решению секции литературы по инженерному оборудованию редакционного совета Стройиздата.

Рецензент — чл.-корр. АН СССР, д-р техн. наук, проф. С. В. Яковлев.

Найденко В. В. и др.

- Н 20 Оптимизация процессов очистки природных и сточных вод (В. В. Найденко, А. П. Кулакова, И. А. Шеренков. Под общ. ред. В. В. Найденко. М.: Стройиздат, 1984. . . . с., ил. — (Охрана окружающей природной среды.)

Описаны современные методы математической постановки и решения задач оптимизации процессов очистки природных и сточных вод. Изложены принципы синтеза математических моделей технологических процессов. Приведена методика выбора критериев оптимальности с подробным описанием современных методов поиска экстремума функций цели. Даны примеры практической реализации математических методов решения задач оптимального проектирования сооружений очистки природных и сточных вод.

Для научных и инженерно-технических работников научно-исследовательских и проектных организаций.

Н 3206000000—307
047(01)—84 21—84

ББК 38.761

6С9.3

© Стройиздат, 1984

ПРЕДИСЛОВИЕ

Историческими решениями XXVI съезда КПСС определены темпы дальнейшего развития народного хозяйства, в том числе систем водоснабжения и водоотведения городов и промышленных предприятий, указаны основные направления в решении задач охраны водных ресурсов от истощения и загрязнения.

Строительство и эксплуатация систем водоснабжения и водоотведения требуют огромных материальных затрат. Объем капиталовложений настолько велик, что сокращение его даже на доли процента за счет применения оптимальных конструкций сооружений и сетей дает значительную экономию средств. На многих объектах благодаря использованию оптимальных режимов эксплуатации удастся увеличить общую производительность, что по экономическому эффекту может быть эквивалентно строительству нового сооружения.

Ноябрьским (1982 г.) Пленумом ЦК КПСС намечены пути дальнейшего повышения интенсивности развития народного хозяйства на основе ускорения научно-технического прогресса, широкого и быстрого внедрения в производство достижений науки и техники, рационального использования материальных и трудовых ресурсов.

На июньском (1983 г.) Пленуме ЦК КПСС было указано, что предстоит осуществить автоматизацию производства, обеспечить широчайшее применение компьютеров и роботов, внедрение гибкой технологии, позволяющей быстро и эффективно перестраивать производство на изготовление новой продукции.

Важнейшее направление в решении поставленных задач — создание и внедрение в производство высокоэффективных систем автоматизированного проектирования (САПР) и автоматизированных систем управления технологическими процессами (АСУТП).

Одним из основных звеньев математического обеспечения САПР и АСУТП являются программы статической и динамической оптимизации объектов проектирования и управления.

За последние годы проблема оптимизации конструктивных и технологических параметров сооружений и систем приобрела исключительную актуальность. В ряде отраслей науки и техники задачи оптимального планирования, проектирования и управления решаются довольно успешно, что позволяет достигать высоких технологических и экономических эффектов [3, 14]. Однако в области оптимизации очистных сооружений и, в частности, практического применения современных математических методов

оптимального проектирования систем очистки природных и сточных вод имеется еще большое отставание.

Первые работы в области статической оптимизации очистных сооружений относятся к 1967—1969 гг. и связаны с созданием математических методов оптимизации установок очистки сточных вод в напорных гидrocиклонах [19] и систем биологической очистки городских сточных вод [35]. В последующие годы большое внимание уделялось решению задач оптимизации процессов биологической очистки сточных вод, обезвоживания осадков, умягчения природных вод [4, 10, 12, 17, 20, 21, 22, 28, 32, 34].

Несомненно, в ближайшие годы современные методы оптимизации найдут широкое применение в практике проектирования очистных сооружений. В значительной мере этому будут способствовать результаты научно-исследовательских работ, полученные в указанной области проблемной лабораторией ГИСИ, ВНИИ ВОДГЕО, МИСИ им. В. В. Куйбышева, Всесоюзным научно-исследовательским институтом целлюлозно-бумажной промышленности, Институтом водных проблем АН СССР.

Учитывая, что большинство проектных и научно-исследовательских институтов нашей страны располагает математическими отделами и лабораториями, оснащенными современными ЭВМ, широкое внедрение в практику проектирования методов оптимизации систем очистки природных и сточных вод должно являться их важнейшей производственной задачей.

В предлагаемой монографии авторы поставили перед собой цель кратко обобщить существующие методы математической постановки задач статической оптимизации, анализа целевой функции и эффективных способов поиска глобального экстремума. Это первая работа, систематизирующая основные идеи и результаты в области оптимального проектирования процессов очистки природных и сточных вод, поэтому она не может претендовать на полное и всестороннее рассмотрение всех аспектов данной проблемы.

В написании гл. 4 принимали участие д-р техн. наук, проф. И. В. Скирдов (п. 6), инж. И. А. Лосева (п. 8), инж. Л. Н. Ушакова, канд. техн. наук Л. П. Истомина, Л. П. Нетюхайло (п. 9).

Авторы выражают глубокую признательность, чл.-корр. АН СССР С. В. Яковлеву, докторам техн. наук, профессорам Д. И. Батищеву и И. В. Скирдову за критические замечания при подготовке рукописи.

ВВЕДЕНИЕ

Отечественный и зарубежный опыт реализации методологии оптимального проектирования сооружений очистки природных и сточных вод свидетельствует о ее высокой эффективности. Привлечение к решению задач оптимизации методов линейного, нелинейного и динамического программирования с реализацией решения на ЭВМ позволяет с высокой точностью определять глобальный экстремум целевой функции и, следовательно, оптимальные уровни значений технологических и конструктивных параметров сооружений очистки природных и сточных вод.

Математическая постановка и решение задач оптимизации процессов очистки природных и сточных вод в большинстве случаев включают в себя следующие основные этапы:

- 1) подготовку технологических и экономических данных для статистической обработки;
- 2) построение математических моделей процессов с определением коэффициентов корреляции функций и основных технологических и конструктивных параметров;
- 3) формирование функции-критерия оптимальности; математический анализ целевой функции; выбор методов поиска глобального экстремума функции;
- 4) составление программы расчета и реализация решения задачи на ЭВМ.

Успешное решение оптимальных задач в значительной мере зависит от качества подготовки технологических данных, достоверности информации лабораторных и производственных испытаний процессов очистки природных и сточных вод. Не менее важную роль играет экономическая информация, характеризующая основные стоимостные показатели всех элементов установок и сооружений: стоимость оборудования и материалов, стоимость строительно-монтажных работ, эксплуатационные расходы и т. д. Исходная информация может вводиться в табулированной форме или в виде аналитических зависимостей.

Наиболее трудоемкий этап решения оптимальных задач — построение математической модели процесса очистки природных и сточных вод. При отсутствии возможности создания математических моделей в виде аналитических функций, систем обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и др. структуры технологического процесса и взаимодействия конструктивных и технологических параметров могут быть представлены методами кибернетики.

Этап формирования и анализа целевой функции является завершающим этапом постановки задачи оптимизации и выбора метода ее решения. Опыт показывает, что на данном этапе решения задачи оптимизации не всегда представляется возможным дать полную оценку целевой функции, установить, является ли функция одноэкстремальной или многоэкстремальной, где располагается экстремум: внутри области допустимых значений или на ее границе. Неопределенность в оценке функции приводит к трудностям в выборе методов поиска экстремума. В этом случае прибегают к комбинированным методам поиска, позволяющим с помощью ЭВМ достаточно подробно исследовать функцию в заданной области.

Задачи статической оптимизации следует отличать от задач динамической оптимизации, решение которых осуществляется в основном на этапе синтеза систем автоматического регулирования и управления.

Первой систематизирующей работой в области динамической оптимизации процессов очистки промышленных сточных вод является монография И. В. Гордина, Н. Б. Манусовой и Д. Н. Смирнова [9]. В работе рассмотрены практические задачи динамической оптимизации с подробным методологическим анализом всех этапов их решения. Несомненно, что при создании систем очистки природных и сточных вод задачи статической и динамической оптимизации необходимо решать одновременно. В этом случае система подвергается наиболее полной и глубокой оценке.

В результате решения задач оптимального проектирования, поставленных на основе экономического критерия оптимальности, определяются оптимальные значения конструктивных и технологических параметров аппаратов и сооружений при минимальном значении приведенных затрат. Например, в процессе оптимального проектирования сооружений очистки производственных сточных вод литейных производств, включающих приемные резервуары, напорные гидроциклоны, напорные скорые фильтры, шламовые бункера, реагентное хозяйство, насосные агрегаты, определяются оптимальные значения следующих параметров: диаметры гидроциклонов первой и второй ступеней, расходы шлама, давление питания гидроциклонов, вместимость приемных и шламовых резервуаров, подача и напор насосов, скорость фильтрования скорых фильтров, расход промывной воды, расход реагентов. После определения оптимальных параметров установки решают задачи динамической оптимизации, а именно: определяют оптимальные значения размеров шламового патрубка гидроциклонов в зависимости от концентрации суспензии в питании с последующим вводом информации в запоминающее устройство системы оптимального регулирования гидроциклонов; определяют оптимальные значения доз реагента в зависимости от концентрации суспензии, прошедшей обработку в напорных гидроциклонах, с целью формирования управляющих воздействий системы автоматического дозирования реагента.

Учитывая исключительно широкий круг задач оптимального проектирования в области очистки природных и сточных вод, изложение основных вопросов монографии осуществляется с учетом особенностей постановки и практического решения наиболее характерных из них.

Для решения на ЭВМ задач оптимизации процессов очистки природных и сточных вод необходимо иметь их математические модели. Полная математическая модель процесса включает основные параметры процесса, соотношения, связывающие основные параметры между собой, ограничения на процесс и критерий оптимальности.

Состояние технологического процесса будем характеризовать следующими основными параметрами:

1) входными $x_1, x_2, \dots, x_m$, значение которых может быть измерено, но возможности воздействия на них отсутствуют. Например, концентрации солей в грунтовой воде, поступающей на сооружения водоподготовки;

2) управляющими $u_1, u_2, \dots, u_r$, на которые можно оказывать определенное воздействие в соответствии с теми или иными технологическими требованиями, что позволяет управлять процессом. Например, доза реагента может существенно влиять на ход процесса коагуляции загрязнений;

3) характеристиками состояния $y_1, y_2, \dots, y_n$, которые определяются режимом процесса и говорят о его состоянии, возникающем в результате суммарного воздействия входных и управляющих параметров. Например, в процессах очистки сточных вод характеристиками состояния являются концентрации загрязнений очищенных стоков;

4) возмущающими, значения которых изменяются случайным образом. Например, при реализации проточных схем нейтрализации промывных стоков гальванических цехов инерционность дозирующих устройств может оказывать существенное влияние на качество очистки.

Соотношения, связывающие основные параметры процесса между собой, могут быть заданы в виде явных функций, отражающих зависимость характеристик состояния от входных и управляющих параметров, в виде неявных функций, в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений или системы дифференциальных уравнений в частных производных. Наиболее удобной формой модели технологического процесса является модель, в которой каждая характеристика состояния выражалась бы в виде функции входных и управляющих параметров:

$$y_i = f_i(\bar{x}, \bar{u}), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.1)$$

где $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ — векторы соответственно входных и управляющих параметров.

Критерий оптимальности в общем случае есть функция основных параметров процесса:

$$Q = Q(\bar{y}, \bar{x}, \bar{u}),$$

где $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ — вектор характеристик состояния процесса.

При моделировании технологических процессов необходимо принимать во внимание объективно существующие ограничения на диапазон изменения управляющих параметров и характеристик состояния процесса. Эти ограничения вызваны техническим заданием, условием физической реализуемости, надежности и т. д. Например, при применении песковых горизонтальных насосов для подачи песковой пульпы в гидроциклоны реальные пределы давления питания гидроциклонов определяются с учетом диапазона рабочих напоров насосов (при максимальном КПД) и составляют 0,12—0,41 МПа. В этом случае ограничения на давление питания записываются в виде неравенства: $0,12 \text{ МПа} \leq P_{\text{пит}} \leq 0,41 \text{ МПа}$.

Ограничения в общем случае можно представить в виде уравнений или неравенств, связывающих основные параметры процесса:

$$R_j(\bar{y}, \bar{x}, \bar{u}) = 0, \quad j = \overline{1, \kappa};$$

$$R_j(\bar{y}, \bar{x}, \bar{u}) \leq 0, \quad j = \kappa + 1, l.$$

Если модель такова, что все характеристики состояния процесса выражены в виде явных функций входных и управляющих параметров (1.1), то критерий качества и ограничения тоже можно выразить в виде функций этих параметров:

$$Q = Q(\bar{y}, \bar{x}, \bar{u}) = Q(\bar{f}(\bar{x}, \bar{u}), \bar{x}, \bar{u}) = \tilde{Q}(\bar{x}, \bar{u}); \quad (1.2)$$

$$R_j(\bar{y}, \bar{x}, \bar{u}) = \tilde{R}_j(\bar{x}, \bar{u}) = 0, \quad j = \overline{1, \kappa}; \quad (1.3)$$

$$R_j(\bar{y}, \bar{x}, \bar{u}) = \tilde{R}_j(\bar{x}, \bar{u}) \leq 0, \quad j = \kappa + 1, l. \quad (1.4)$$

В этом случае задача оптимизации сводится к нахождению таких значений управляющих параметров $\bar{u}$ при заданных значениях входных параметров $\bar{x}$, при которых достигается экстремум функции (1.2) при ограничениях (1.3), (1.4).

Существует много способов получения математических моделей технологических процессов. Выбор того или иного способа зависит от целей моделирования, от характера задачи, которую ставит перед собой исследователь при разработке модели.

Однако во всех случаях необходимо располагать полной информацией о технологическом процессе, обоснованно выбирать параметры, характеризующие технологический процесс, учитывать их взаимодействие.

Математические модели можно объединить в две группы: стохастические (вероятностные) и детерминированные.

1. Стохастические модели

Реальные процессы протекают в условиях действия большого количества случайных факторов. Характеристики состояний процесса оказываются случайными функциями. Случайный характер характеристик состояния может быть обусловлен случайным характером входных параметров или управляющих параметров, а также случайным характером протекания самого процесса. В общем случае все перечисленные факторы являются случайными. Математические модели, в которых учитывается влияние случайных факторов, называются вероятностными, или стохастическими.

Процессы со случайными факторами могут быть описаны распределениями вероятностей, заданными на множестве реализаций. Реализациями являются неслучайные, вполне детерминированные процессы, в виде которых проявляется случайный процесс в каждом конкретном опыте. Характеристика состояния, полученная при воспроизведении единственной реализации процесса, в силу действия случайных факторов будет случайной величиной и не сможет объективно характеризовать его состояние. Поэтому характеристики состояния обычно определяются как средние значения по данным большого количества реализаций процесса. Если количество реализаций, используемых для оценки характеристик состояния, достаточно велико, то в силу закона больших чисел получаемые оценки приобретают статистическую устойчивость и с достаточной точностью могут быть приняты в качестве приближенных значений характеристик состояния процесса.

Стохастическая модель процесса отстаивания взвешенных веществ в горизонтальных отстойниках. Рассматриваемая стохастическая модель предложена Г. Д. Павловым для описания процесса осветления структурных суспензий. Процесс осаждения взвеси в отстойнике характеризуется взаимодействием трех основных параметров: гидравлической крупностью частиц твердой фазы исходной суспензии u_0 , средней скоростью движения жидкости в отстойнике v_c и взвешивающей, или турбулентной составляющей скорости ω .

Известно, что вертикальная составляющая ω является случайной величиной с нормальной плотностью распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_\omega \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\omega^2}}, \quad (1.5)$$

где σ_ω — дисперсия вертикальной составляющей ω .

Считается, что отстойником могут быть задержаны все частицы, траектория движения которых в процессе осаждения пересекает условную плоскость дна отстойника*. Величина горизонтальной скорости потока v_c принимается постоянной и определяется как средняя по живому сечению отстойника:

$$v_c = \frac{Q}{BH},$$

где Q — расчетный расход суспензии; B, H — расчетная ширина и глубина отстойника.

Учет случайного характера вертикальной составляющей позволяет рассчитать длину L и ширину B отстойника при заданной величине H из условия задержания требуемого количества

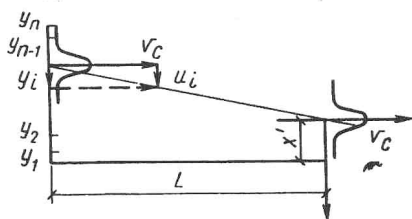


Рис. 1. Схема осаждения взвешенных веществ в горизонтальном отстойнике (стохастическая модель)

взвешенных веществ Φ , состоящих из частиц с различной гидравлической крупностью. Процентное количество взвеси, имеющей гидравлическую крупность u_i , осевшей с высоты y_i (рис. 1) на отрезке пути L из потока, движущегося со скоростью v_c , определится из выражения

$$\Phi_{ij} = \frac{100}{\sigma_{\omega} V \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x'_{ij}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_{\omega}^2}} dx = \frac{100}{V \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x'_{ij}}{\sqrt{2}\sigma_{\omega}}} e^{-t^2} dt, \quad (1.6)$$

$$\text{где } x'_{ij} = \frac{L u_i}{v_c} - y_{ij},$$

причем $\sigma_{\omega} = \frac{\sqrt{L} (\sqrt{H} - 0,2)}{2,74 \sqrt{2}}$. Разделим отстойник по высоте

на зоны, центры тяжести которых отстоят от дна на расстояниях $y_1, y_2, \dots, y_n$ каждая. Полагаем, что в начальный момент распределение каждой фракции по высоте отстойника равномерное. Тогда процентное количество Φ_i осевшей взвеси данной фракции со всей глубины отстойника

$$\Phi_l = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Phi_{ij}. \quad (1.7)$$

* Верхняя граница нейтрального слоя.

Очевидно, что процентное количество Φ взвеси, состоящей из частиц различной крупности, задержанной в отстойнике, определится из выражения

$$\Phi = \sum_{i=1}^k \frac{P_i \Phi_i}{100}, \quad (1.8)$$

где P_i — процентное содержание различных фракций взвеси, которое определяется в соответствии с кривой осаждения; k — число фракций.

Таким образом, с помощью стохастической модели определяется эффективность очистки воды от взвешенных веществ в отстойнике с одновременным определением фракционного состава частиц твердой фазы осветленной воды.

Следует учитывать, что действие случайных величин приводит к смещению средних значений характеристик состояния процесса.

Действительно, если характеристика состояния y является заданной функцией случайного параметра s , $y = f(s)$, то среднее значение характеристики состояния $\bar{y}$ не является заданной функцией среднего значения случайного параметра:

$$\bar{y} \neq f(\bar{s}). \quad (1.9)$$

Поэтому стохастические математические модели, которые учитывают влияние случайных факторов, являются более точными по сравнению с детерминированными моделями в случае, если влияние случайных факторов велико.

Следует отметить, что до настоящего времени стохастические модели процессов очистки природных и сточных вод применяются редко. Основная причина отказа от вероятностных моделей — отсутствие информации о распределении случайных значений технологических параметров. Современные тенденции научно-технического прогресса в данной области науки определяют необходимость создания точных и гибких математических моделей технологических процессов, позволяющих осуществлять их оптимизацию с учетом распределения значений входных и управляющих параметров.

По нашему мнению, в ближайшем будущем стохастические модели найдут широкое применение при математическом описании процессов очистки природных и сточных вод. Известны интересные и перспективные работы в области создания стохастических моделей процессов разделения суспензий и эмульсий в гидроциклонах, центрифугах, сепараторах и отстойниках, модели процессов самоочищения водоемов, модели флотационной очистки сточных вод от взвешенных веществ и нефтепродуктов и т. д.

2. Детерминированные модели

Детерминированными называются модели, описывающие процессы, в которых влияние случайных факторов исключено, а также модели, описывающие процессы, подверженные действию случайных факторов, но это действие в модели не учитывается, т. е. в этом случае постулируется принцип работы со средними значениями случайных величин, а не с их распределениями.

Детерминированная модель процесса отстаивания взвешенных веществ в горизонтальных отстойниках. В случае расчета отстойников без учета плотности распределения вертикальной составляющей ω скорости движения воды в отстойнике трудно оценить процентное количество взвеси, задержанной отстойником.

Расчет горизонтального отстойника без учета плотности распределения ω заключается в определении длины L и ширины B отстойника при заданной его глубине H из условия задержания отстойником взвеси гидравлической крупности $u \leq u_0$

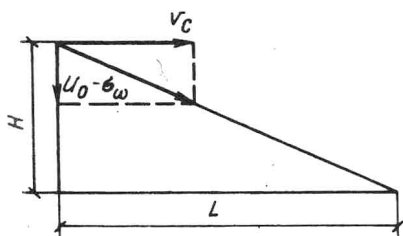


Рис. 2. Схема осаждения взвешенных веществ в горизонтальном отстойнике (детерминированная модель)

при наиболее неблагоприятных условиях. В таких условиях находятся частицы в верхнем слое потока, так как они проделывают максимальный по длине путь движения. В качестве наиболее неблагоприятного значения вертикальной составляющей скорости потока ω принимаем $\omega = \sigma_\omega$ и считаем, что она направлена вертикально вверх. Тогда длина L и ширина B отстойника опреде-

лится следующим образом (рис. 2):

$$L = \frac{H v_c}{u_0 - \sigma_\omega}; \quad B = \frac{q}{v_c H},$$

где q — расчетный расход воды; σ_ω — дисперсия вертикальной составляющей скорости ω ; v_c — среднее значение горизонтальной составляющей скорости потока.

Сопоставление расчетных и натурных данных по определению эффективности осветления суспензий в отстойниках показало, что стохастическая модель обеспечивает получение более точных результатов. Общим недостатком приведенных выше моделей является то, что они не описывают реальную гидродинамическую обстановку в рабочей камере отстойника.

3. Методика синтеза математических моделей

Построение математической модели начинается с формализованного описания моделируемого технологического процесса, которое представляет собой описание физико-химических, термодинамических и гидродинамических явлений, происходящих в аппаратах и сооружениях. Перечень учитываемых элементарных подпроцессов определяет совокупность основных параметров, которые включаются в математическую модель. При этом следует установить, какие из них являются случайными величинами. Формализованное описание включает в себя постановку задачи исследования. Если математическая модель строится для решения задачи оптимизации, то выбор критерия оптимальности в значительной степени определяет вид математической модели.

Выбрав критерий оптимальности и наметив основные параметры процесса, можно приступить к построению соотношений между ними. При построении соотношений, связывающих параметры процесса между собой, в первую очередь используют известные физические и химические законы, а также проверенные практикой существующие математические зависимости.

Например, для расчета эффективности разделения суспензий в напорных гидроциклонах проблемной лабораторией ГИСИ синтезирована система дифференциальных уравнений, интегрирование которой позволяет вычислять координаты траектории движения частицы твердой фазы в рабочей камере напорных гидроциклонов с учетом реальной гидродинамической обстановки [18].

Система дифференциальных уравнений в цилиндрической системе координат (r, φ, z) имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \pi R^3_r (2 \rho_r + \rho_c) \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d \varphi}{dt} \right) = \\ & = \frac{2}{3} \pi R^3_r (2 \rho_r + \rho_c) \frac{v_\varphi}{r} - \frac{4}{3} \pi R^3_r \rho_c \frac{v_\varphi}{r} + \\ & + \frac{4}{3} \pi \rho_c R_r \lambda \left(\frac{dz}{dt} v_\varphi - r \frac{d \varphi}{dt} v_z \right) - \kappa \mu^{2-n} \rho_c^{n-1} d^n \times \\ & \times \left[\sqrt{\left(\frac{dr}{dt} - v_r \right)^2 + \left(r \frac{d \varphi}{dt} - v_\varphi \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - v_z \right)^2} \right]^{n-1} \times \\ & \times \left(\frac{dr}{dt} - v_r \right); \\ & \frac{2}{3} \pi R^3_r (2 \rho_r + \rho_c) \left(r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{dr}{dt} \frac{d \varphi}{dt} \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{3} \pi \rho_c R_r \lambda \left(\frac{dr}{dt} v_z - \frac{dz}{dt} v_r \right) - \kappa \mu^{2-n} \rho_c^{n-1} d^n \times$$

$$\times \left[\sqrt{\left(\frac{dr}{dt} - v_r \right)^2 + \left(r \frac{d\varphi}{dt} - v_\varphi \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - v_z \right)^2} \right]^{n-1} \times$$

$$\times \left(r \frac{d\varphi}{dt} - v_\varphi \right); \quad (1.10)$$

$$\frac{2}{3} \pi R_r^3 (2\rho_r + \rho_c) \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{4}{3} \pi \rho_c R_r^3 \lambda \times$$

$$\times \left(r \frac{d\varphi}{dt} v_r - \frac{dr}{dt} v_\varphi \right) - \kappa \mu^{2-n} \rho_c^{n-1} d^n \times$$

$$\times \left[\sqrt{\left(\frac{dr}{dt} - v_r \right)^2 + \left(r \frac{d\varphi}{dt} - v_\varphi \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - v_z \right)^2} \right]^{n-1} \times$$

$$\times \left(\frac{dz}{dt} - v_z \right),$$

где v_φ , v_z , v_r — окружная, аксиальная и радиальная составляющие скорости потока жидкости в рабочей камере гидроциклона; d , R_r — диаметр и радиус частицы твердой фазы; ρ_r , ρ_c — плотность частицы и суспензии; λ — удвоенное отношение вектора угловой скорости к вектору скорости потока в данной точке; μ — вязкость суспензии; κ — коэффициент сопротивления; t — время сепарации; n — показатель степени.

Составными элементами данной системы уравнений являются уравнения, математически выражающие значения центробежной и архимедовой сил, силы сопротивления среды, подъемной силы Жуковского.

Интегрирование системы дифференциальных уравнений (1.10) осуществляется на ЭВМ методом Рунге—Кутты.

Если отсутствуют формальные зависимости между характеристиками состояния и параметрами процесса, для численной оценки этой зависимости пользуются статистическими методами обработки экспериментальных данных.

Пусть в результате серии измерений значений функции y при различных значениях параметров $(z_1, z_2, \dots, z_m) = \bar{z}$ получены следующие результаты:

y	z_1	$z_2 \dots z_m$	$\left. \begin{array}{l} ; \\ ; \\ ; \\ \dots \\ ; \end{array} \right\} \quad (1.11)$
y_1	z_{11}	$z_{12} \dots z_{1m}$	
y_2	z_{21}	$z_{22} \dots z_{2m}$	
$\dots$	$\dots$	$\dots \dots \dots$	
y_n	z_{n1}	$z_{n2} \dots z_{nm}$	

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1m} \\ 1 & z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nm} \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

называется матрицей плана или планом.

Предположим, что значения параметров z_{ij} , $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$ измерены точно, а значения функции y_i , $i = \overline{1, n}$ определены с некоторой ошибкой. Эта ошибка может объясняться несовершенством измерительных приборов, а также тем, что на реальный процесс, кроме основных факторов, которые включены в модель, действует большое число неучитываемых факторов. Предположим, что значения характеристики y_i , $i = \overline{1, n}$ — независимые случайные величины, распределенные по нормальному закону с дисперсией σ^2 и средним значением y . Параметры σ^2 и y неизвестны.

Так как аналитическое выражение характеристики состояния неизвестно, ограничимся представлением ее полиномом (отрезком ряда Тейлора):

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^m b_{1i} z_i + \sum_{i < j} b_{ij} z_i z_j + \sum_{i=1}^m b_{ii} z_i^2 + \dots, \quad (1.13)$$

где b_1 , b_{ii} , b_{ij} — коэффициенты регрессии, которые определим на основании экспериментальных данных.

Сделаем замену переменных $z_{n+i}^2 = z_{n+i}$; $z_i z_j = z_{2m+1}$; $\dots$; $z_{n-1} z_m = z_{m'}$ и обозначим $m = m'$. Получим линейное уравнение

$$y = b_0 + b_1 z_1 + \dots + b_m z_m. \quad (1.14)$$

Так как коэффициенты регрессии определяются по результатам опытов, которые являются случайными величинами, то и сами коэффициенты будут случайными величинами, поэтому можно определить лишь их выборочные оценки $\hat{b}_i$, $i = \overline{0, m}$.

При этом

$$y = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 z_1 + \dots + \hat{b}_m z_m, \quad (1.15)$$

где $\hat{y}$ — выборочная оценка среднего значения характеристики y .

Если величины y_i , $i = \overline{1, n}$ распределены по нормальному закону с плотностью вероятности

$$\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sigma^2}}, \quad (1.16)$$

где $\hat{y}_i$ — оценка среднего значения y_i .

то вероятность получить именно эту выборку $y_1, y_2, \dots, y_n$ равна:

$$\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} (y_i - \hat{y}_i)^2} \quad (1.17)$$

Функция

$$\prod_{i=1}^n e^{-\frac{1}{\sigma^2} (\hat{y}_i - y_i)^2} = e^{-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2}$$

называется функцией правдоподобия. Оценками максимального правдоподобия оказываются такие $\hat{y}_i$, которые минимизируют величину $R = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$. Значения $\hat{b}_i$, $i = \overline{0, m}$ получаются в результате решения системы $m+1$ уравнений:

$$\frac{\partial R}{\partial b_i} = 0, \quad i = 0, \overline{m}. \quad (1.18)$$

Эту процедуру называют методом наименьших квадратов, а уравнение (1.15) — уравнением регрессии.

Система уравнений (1.18) для определения коэффициентов уравнения регрессии имеет вид

[illegible]

или в матричном виде

$$Z^T Z \bar{B} = Z^T y.$$