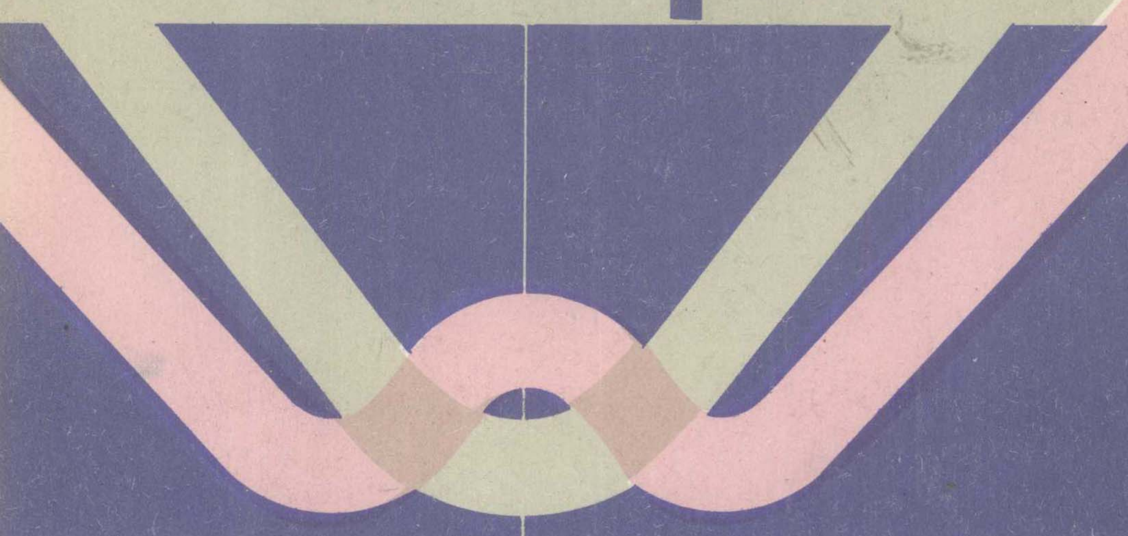
Ю. ВЕСС, ДЖ. БЕГГЕР

Суперсимметрия



и супергравитация

Суперсимметрия и супергравитация

Supersymmetry and Supergravity

by
Julius Wess
and
Jonathan Bagger

Princeton Series in Physics

Princeton University Press
Princeton, New Jersey
1983

Ю. ВЕСС, ДЖ. БЕГГЕР

Суперсимметрия и супергравитация

Перевод с английского
канд. физ.-мат. наук
А. А. Цейтлина

под редакцией
д-ра физ.-мат. наук
В. И. Огиевецкого

Москва «Мир» 1986

ББК 22.31
В38
УДК 530.145

Весс Ю., Бегтер Дж.

В38 Суперсимметрия и супергравитация. Пер. с англ. — М.: Мир, 1986. — 184 с., ил.

Книга, написанная известным ученым из ФРГ Ю. Вессом и молодым американским физиком Дж. Беггером, представляет собой одну из первых в мировой литературе монографий, посвященных суперсимметричной квантовой теории поля, которая в последнее время активно используется при построении единых моделей элементарных частиц. В книге рассмотрены различные вопросы формулировки суперсимметричных теорий, обобщающих обычные калибровочные модели и эйнштейновскую теорию гравитации.

Рассчитана на студентов старших курсов, аспирантов и специалистов, знакомых с релятивистской квантовой теорией поля.

$\text{В}\,\dfrac{1704070000 - 338}{041(01) - 86}\,75 - 86,\ \text{ч. 1}$

ББК 22.31
530.1

Редакция литературы по физике

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В начале семидесятых годов появилась симметрия совершенно нового вида — суперсимметрия, преобразования которой переводят друг в друга бозонные и фермионные поля. С тех пор суперсимметрия привлекает к себе интерес, неуклонно растущий со временем. Этот интерес вызван необычными и удивительными свойствами суперсимметрии и открываемыми ею перспективами. Суперсимметричные модели теории поля обладают чудесными свойствами сокращения ультрафиолетовых расходимостей, обнаруженными впервые в 1974 г. в так называемой модели Весса и Зумино. Сейчас впервые в истории физики найдены модели локальной квантовой теории поля, вообще свободные от ультрафиолетовых расходимостей; они основаны на расширенной суперсимметричной калибровочной инвариантности. Суперсимметрия и супергравитация — теория тяготения, согласованная с суперсимметрией, — открывают новые пути в построении объединенных теорий всех взаимодействий, включая гравитационное. Уже сейчас они оказались полезными в решении проблемы иерархии в теориях великого объединения. Появляется много, пока сугубо предварительных, попыток построения феноменологических суперсимметричных моделей, проводится настойчивый поиск суперсимметричных партнеров известных частиц.

Настоящая книга в значительной степени удовлетворяет возникшую в последнее время нужду в монографиях учебного характера по различным аспектам суперсимметрии. Она основана на лекциях, прочитанных в Принстонском университете одним из пионеров и ведущих специалистов по суперсимметрии и супергравитации профессором Юлиусом Вессом и обработанных его учеником, молодым американским физиком Джонатаном Беггером. Можно надеяться, что книга поможет читателю в приобретении начальных сведений по формализму как самой суперсимметрии, так и связанных с ней теорий — суперсимметричной теории Янга — Миллса и супергравитации. Авторы излагают простейшую, нерасширенную суперсимметрию и почти не затрагивают расширенные суперсимметричные теории. Не касаются они и попыток построения реалистических моделей. Вместе с тем читателю, заинтересованному в феноменологических приложениях, книга поможет освоить основы формализма теории, разобраться в трудных вопросах спонтанного нарушения суперсимметрий, в суперсимметричных калибровочных теориях и т.д.

Монография написана в характерном для Весса несколько лапидарном стиле, словесные разъяснения и мотивировки используются крайне экономно, тогда как вычислительные приемы излагаются, как правило, довольно детально и в понятной для желающего разобраться читателя форме. В конце почти каждой главы приводится сводка основных формул, упражнения и точно две ссылки на литературу. При таком ограничении неизбежен элемент случайности в цитировании. Вместе с тем к настоящему времени накопилась обширная литература по теории суперсимметрий и ее приложениям. Чтобы помочь читателю ориентироваться в ней, мы приводим основные обзоры (кроме упомянутых в предисловии автора) и сборники статей в этой области. Упражнения составляют большое достоинство данной книги. Они мастерски подобраны, и их решение будет способствовать творческому освоению материала книги.

Авторы последовательно развивают формализм суперполей в вещественном суперпространстве с соответствующей дифференциальной геометрией и возникающими в этом случае связями. Комплексное (киральное) суперпространство, решающая роль которого в калибровочных теориях и в супергравитации была выяснена в исследованиях, проведенных в Дубне, обсуждается в гл. 19 и 20. Естественно, что его приходится упоминать и в других местах. В нескольких случаях по этому поводу сделаны подстрочные примечания.

Отметим также, что, как это принято в русской литературе и во многих зарубежных статьях, в переводе простейшие суперполя, не несущие лоренцевых индексов, именуются киральным и вещественным скалярными суперполями.

Монографию Ю. Весса и Дж. Беггера можно рекомендовать как содержательное и полезное вводное руководство по теории суперсимметрии. Она поможет читателю приобрести сведения по дифференциальным формам в суперпространстве, тождествам Бьянки, лагранжеву формализму суперполей, по калибровочным суперсимметричным теориям и другим вопросам теории суперсимметрии.

В. И. Огиевецкий

ЛИТЕРАТУРА

Огиевецкий В. И., Мезинческу Л. Симметрии между бозонами и фермионами и суперполя. — УФН, 1975, т. 117, с. 637.

Salam A., Strathdee J. Supersymmetry and superfields. — Fortschr. Phys., 1978, v. 26, p. 57.

Nilles H. P. Supersymmetry, supergravity and particle physics. — Phys. Reports, 1984, v. 110, p. 1.

Haber H. E., Kane G. L. The search for supersymmetry. — Phys. Reports, 1985, v. 117, p. 75.

Fradkin E. S. , Tseytlin A. A. Conformal supergravity. — Phys. Reports, 1985, v. 119. p. 233.

Генденштейн Л. Э., Криве И. В. Суперсимметрия в квантовой механике. — УФН, 1985, т. 146, с. 553.

Высоцкий М. И. Суперсимметричные модели элементарных частиц — физика для ускорителей нового поколения? — УФН, 1985, т. 146, с. 591.

Геометрические идеи в физике: Сб. статей. Пер. с англ./Под ред. Ю. И. Манина. — М.: Мир, 1983.

Введение в супергравитацию: Сб. статей. Под ред. С. Феррары и Дж. Тейлора. — М.: Мир, 1985.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Большой интерес, с которым были встречены эти лекции по суперсимметрии и супергравитации в Принстонском университете, побудил меня сделать их содержание доступным более широкой аудитории. Они не являются систематическим обзором данного предмета, а представляют собой введение в тот подход, которому следовали Бруно Зумино и я в наших усилиях по развитию формализма и выяснению структуры суперсимметрии и супергравитации.

Книга состоит из двух частей. В первой развивается формализм, позволяющий строить суперсимметричные калибровочные теории. Во второй части этот формализм обобщается на случай локальных преобразований суперсимметрии.

В конце каждой главы приводятся две статьи, которые я рекомендую читателю. Я понимаю, что подобный выбор несправедлив по отношению ко многим авторам, которые также внесли свой вклад. В этой связи я хочу обратить внимание на более полные списки литературы, которые могут быть найдены в обзорах: *Fayet P., Ferrara S.,* Supersymmetry, Phys. Reports, 1977, 32C, No. 5 и *van Nieuwenhuizen P.,* Supergravity, Phys. Reports, 1981, 68C, No. 4.

Наиболее важные формулы в тексте нумеруются жирным шрифтом. Сводка этих формул дается в конце каждой главы. В конце каждой главы имеются также упражнения. Многие из них содержат информацию, существенную для более глубокого понимания предмета.

Эта книга подготовлена в сотрудничестве с Джонатаном Беггером; без его участия она никогда не была бы написана. Мы оба хотим поблагодарить Винни Уоринг за помощь в подготовке рукописи. Равняясь на высокие стандарты ее работы, мы всемерно старались избежать ошибок в множителях и знаках. Исправлять такие ошибки нам помогали многочисленные коллеги. В частности, мы выражаем благодарность Мартину Мюллеру за помощь в подготовке второй половины книги.

Я хочу выразить благодарность Федеративной Республике Германии за субсидию, которая сделала возможным мое пребывание в Институте высших исследований в качестве приглашенного профессора фонда Альберта Эйнштейна. Дж. Беггер признателен Национальному научному фонду США за стипендию аспиранта в Принстонском университете.

В заключение я хочу поблагодарить Стивена Адлера и сотрудников Института высших исследований, а также Дэвида Гросса и Физический факультет Принстонского университета за ободряющий и критический интерес, проявленный ими к этим лекциям.

Юлиус Весс

Университет Карлсруэ

Май 1982 г.

ГЛАВА 1

УНИКАЛЬНОСТЬ СУПЕРСИММЕТРИИ

Суперсимметрия вызывает значительный интерес среди физиков и математиков. Помимо того что она вызывает восхищение сама по себе, имеется также все возрастающая уверенность, что она может играть фундаментальную роль в физике элементарных частиц. Эта вера основана на важном результате Хаага, Лопушанского и Сониуса. Они доказали, что алгебра суперсимметрии является единственной градуированной[1] алгеброй Ли симметрий S-матрицы, которая возможна в рамках релятивистской квантовой теории поля. В данной главе мы рассмотрим эту теорему и ее доказательство. (Читатели, интересующиеся суперсимметричными теориями, могут предпочесть начать чтение прямо с гл. 2 или 3.)

Прежде чем приступить к изложению, мы приведем вид алгебры суперсимметрии

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha{}^A, \bar{Q}_{\dot\beta B}\}_+ &= 2\sigma_{\alpha\dot\beta}{}^m P_m \delta^A{}_B \\ \{Q_\alpha{}^A, Q_\beta{}^B\}_+ &= \{\bar{Q}_{\dot\alpha A}, \bar{Q}_{\dot\beta B}\}_+ = 0 \\ [P_m, Q_\alpha{}^A]_- &= [P_m, \bar{Q}_{\dot\alpha A}]_- = 0 \\ [P_m, P_n]_- &= 0. \end{aligned} \tag{I}$$

Греческие индексы (α, β, . . . , $\dot\alpha$, $\dot\beta$, . . .) пробегают значения один и два и отвечают двухкомпонентным вейлевским спинорам (см. приложения). Латинские индексы (m, n, . . .) пробегают значения от одного до четырех и отвечают лоренцевым четыре-векторам. Прописные латинские буквы (A, B, . . .) относятся к внутреннему пространству. Они принимают значения от 1 до некоторого числа $N \geqslant 1$. Алгебра с $N = 1$ называется алгеброй суперсимметрии, а алгебры с $N > 1$ называются алгебрами расширенной суперсимметрии. Все обозначения и стандартные формулы, используемые в этой книге, приведены в приложении А.

Теперь мы готовы к рассмотрению теоремы. Среди всех градуированных алгебр Ли в релятивистской квантовой теории поля лишь алгебры суперсимметрии (а также их расширения, связанные с включением центральных зарядов, которые мы обсудим в конце этой главы) могут порождать

---

[1] То есть содержащей наряду с коммутаторами и антикоммутаторы (см. ниже). — *Прим. перев.*

симметрии S-матрицы, удовлетворяющей принципам релятивистской квантовой теории поля. Доказательство этого утверждения основано на теореме Коулмена—Мандулы, являющейся наиболее точной и сильной в ряду всех теорем, касающихся допустимых симметрий S-матрицы.

Теорема Коулмена—Мандулы основывается на следующих предположениях:

1) S-матрица отвечает локальной релятивистской квантовой теории поля в пространстве четырех измерений;

2) имеется лишь конечное число различных частиц, соответствующих одночастичным состояниям с данной массой;

3) между вакуумом и одночастичными состояниями имеется энергетическая щель.

Утверждение теоремы состоит в том, что наиболее общая алгебра Ли симметрий S-матрицы содержит оператор энергии-импульса P_m, генератор лоренцевых вращений M_{mn} и конечное число операторов B_l, являющихся лоренцевыми скалярами.

Суперсимметрии обходят ограничение, налагаемое теоремой Коулмена—Мандулы, благодаря ослаблению одного из основных предположений. А именно, они обобщают понятие алгебры Ли до алгебраических систем, включающих в свои определяющие соотношения как коммутаторы, так и антикоммутаторы. Эти новые алгебры называются супералгебрами или градуированными алгебрами Ли. Схематически они имеют следующий вид:

$$\{Q,Q'\}_+ = X \qquad [X,X']_- = X'' \qquad [Q,X]_- = Q''. \tag{1.2}$$

Здесь Q, Q' и Q'' — нечетные (антикоммутирующие) элементы алгебры, а X, X' и X'' — четные (коммутирующие) элементы.

Операторы X определяются теоремой Коулмена—Мандулы. Они являются либо элементами алгебры Пуанкаре $\mathscr{P} = \{P_m, M_{mn}\}$, либо элементами лоренц-инвариантной компактной алгебры Ли $\mathscr{A}$. Алгебра $\mathscr{A}$ есть прямая сумма полупростой алгебры $\mathscr{A}_1$ и абелевой алгебры $\mathscr{A}_2$: $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \oplus \mathscr{A}_2$.

Генераторы Q можно разбить по представлениям, неприводимым относительно однородной группы Лоренца $\mathscr{L}$:

$$Q = \sum Q_{\underline{\alpha_1 \cdots \alpha_a}, \underline{\dot\alpha_1 \cdots \dot\alpha_b}}. \tag{1.3}$$

Генераторы $Q_{\underline{\alpha_1 \ldots \alpha_a}, \underline{\dot\alpha_1 \ldots \dot\alpha_b}}$ симметричны по подчеркнутым индексам $\alpha_1, \ldots, \alpha_a$ и $\dot\alpha_1, \ldots, \dot\alpha_b$. Они принадлежат неприводимым представлениям группы $\mathscr{L}$ со спином $\frac{1}{2}(a+b)$[1]. Поскольку операторы Q антикоммути-

[1] Обычно термин «спин» употребляется в связи с группой Пуанкаре. Представление же группы Лоренца характеризуется двумя целыми числами a, b и обозначается $(a/2, b/2)$. По группе Пуанкаре представление $(a/2, b/2)$ разбивается в сумму нескольких представлений с разными спинами, наибольший из них равен $\frac{1}{2}(a+b)$. — *Прим. перев.*

руют, из связи спина и статистики мы заключаем, что $a + b$ должно быть нечетным.

Воспользуемся теперь двумя дополнительными предположениями, чтобы доказать, что $a + b = 1$. Эти предположения таковы:

1) операторы Q действуют на гильбертовом пространстве с положительно определенной метрикой;

2) алгебра включает как Q, так и их эрмитовы сопряжения $\bar{Q}$.

Начнем с рассмотрения антикоммутатора

$$\{Q_{\underline{\alpha_1 \cdots \alpha_a}, \underline{\dot{\alpha}_1 \cdots \dot{\alpha}_b}}, \bar{Q}_{\underline{\dot{\beta}_1 \cdots \dot{\beta}_a}, \underline{\beta_1 \cdots \beta_b}}\}, \tag{1.4}$$

где все индексы выберем равными 1. Произведение

$$Q_{\underbrace{1 \cdots 1}_{a}, \underbrace{\dot{1} \cdots \dot{1}}_{b}} \bar{Q}_{\underbrace{\dot{1} \cdots \dot{1}}_{a}, \underbrace{1 \cdots 1}_{b}} \tag{1.5}$$

принадлежит представлению группы $\mathscr{L}$ со спином $(a + b)$, так что

$$\left\{Q_{\underbrace{1 \cdots 1}_{a}, \underbrace{\dot{1} \cdots \dot{1}}_{b}}, \bar{Q}_{\underbrace{\dot{1} \cdots \dot{1}}_{a}, \underbrace{1 \cdots 1}_{b}}\right\} \tag{1.6}$$

должен быть равен четному элементу алгебры со спином $(a + b)$. Из теоремы Коулмена—Мандулы мы знаем, что этот элемент может быть либо нулем, либо компонентой P_m. Таким образом, при $a + b > 1$ он должен быть нулем.

Антикоммутатор (1.6) есть положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве с положительно определенной метрикой. Следовательно, $Q_{\underbrace{1 \ldots 1}_{a}, \underbrace{\dot{1} \ldots \dot{1}}_{b}} = 0$ при $a + b > 1$. Поскольку операторы $Q_{\underline{\alpha_1 \ldots \alpha_a}, \underline{\dot{\alpha}_1 \ldots \dot{\alpha}_b}}$ неприводимы относительно $\mathscr{L}$, все они должны равняться нулю при $a + b > 1$. Поэтому мы заключаем, что нечетная часть алгебры суперсимметрии состоит только из операторов $Q_\alpha{}^L$ и $\bar{Q}_{\dot{\alpha}M}$ спина 1/2.

Антикоммутатор $Q_\alpha{}^L$ и $\bar{Q}_{\dot{\alpha}M}$ пропорционален $P_{\alpha\dot{\alpha}}$:

$$\{Q_\alpha{}^L, \bar{Q}_{\dot{\alpha}M}\} = P_{\alpha\dot{\alpha}} C^L{}_M, \tag{1.7}$$

где $P_{\alpha\dot{\alpha}} = \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m P_m$. Согласно упражнению 1, конечномерная матрица $C^L{}_M$ является эрмитовой, т. е. может быть диагонализирована с помощью унитарного преобразования. Ввиду положительной определенности оператора $\{Q_1{}^L, \bar{Q}_{\dot{1}L}\}$ матрица $C^L{}_M$ имеет положительные собственные значения. Это позволяет выбрать базис в нечетной части алгебры так, что

$$\{Q_\alpha{}^L, \bar{Q}_{\dot{\alpha}M}\} = 2P_{\alpha\dot{\alpha}} \delta^L{}_M. \tag{1.8}$$

Перейдем теперь к антикоммутатору двух нечетных элементов, имеющих индексы без точки. Правая часть этого выражения может быть разбита на симметричную и антисимметричную части. Симметричная часть имеет спин 1.

Из теоремы Коулмена—Мандулы следует, что единственным кандидатом на роль такого оператора является лоренцев генератор $M_{\underline{\alpha\beta}}$[1]:

$$\{Q_\alpha{}^L, Q_\beta{}^M\} = \varepsilon_{\alpha\beta} X^{\underset{\smile}{LM}} + M_{\underline{\alpha\beta}} Y^{\underline{LM}}. \tag{1.9}$$

Поскольку P_m коммутирует с $Q_\alpha{}^L$ (см. упражнение 2), мы заключаем, что $Y^{\underline{LM}}$ должен обращаться в нуль. Это позволяет записать антикоммутатор (1.9) в виде

$$\{Q_\alpha{}^L, Q_\beta{}^M\} = \varepsilon_{\alpha\beta} a^{\ell, \underset{\smile}{LM}} B_\ell. \tag{1.10}$$

Здесь B_l — эрмитов элемент алгебры $\mathscr{A}_1 \oplus \mathscr{A}_2$ и матрица $a^{l, \underset{\smile}{LM}}$ антисимметрична по L и M. После этого алгебра суперсимметрии принимает вид

$$\begin{aligned}
\{Q_\alpha{}^L, \bar{Q}_{\dot\beta M}\} &= 2\sigma_{\alpha\dot\beta}{}^m P_m \delta^L{}_M \\
[P_m, Q_\alpha{}^L] &= [P_m, \bar{Q}_{\dot\beta M}] = 0 \\
\{Q_\alpha{}^L, Q_\beta{}^M\} &= \varepsilon_{\alpha\beta} a^{\ell, \underset{\smile}{LM}} B_\ell = \varepsilon_{\alpha\beta} X^{\underset{\smile}{LM}} \\
\{\bar{Q}_{\dot\alpha L}, \bar{Q}_{\dot\beta M}\} &= \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} a^*{}_{\ell, \underset{\smile}{LM}} B^\ell = \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} X^+{}_{\underset{\smile}{LM}} \\
[Q_\alpha{}^L, B_\ell] &= S_\ell{}^L{}_M Q_\alpha{}^M \\
[B^\ell, \bar{Q}_{\dot\alpha L}] &= S^{*\ell}{}_L{}^M \bar{Q}_{\dot\alpha M} \\
[B_\ell, B_m] &= i c_{\ell m}{}^k B_k.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Чтобы получить дальнейшие ограничения на коэффициенты $a^{l, \underset{\smile}{LM}}$ и $S_l{}^L{}_M$ в (1.11), воспользуемся тождествами Якоби. Обычные тождества Якоби легко обобщаются на случай антикоммутаторов (см. упражнение 3):

$$\{A, \{B, C]] \pm \{B, \{C, A]] \pm \{C, \{A, B]] = 0. \tag{1.12}$$

Скобки $\{\ ,\ ]$ обозначают либо коммутатор, либо антикоммутатор в зависимости от четности элементов A, B и C. Знаки определяются порядком следования нечетных элементов. Если этот порядок получается циклической перестановкой из их порядка в первом члене, то знак положительный, если нет, то он отрицательный. Исследуя тождества Якоби в определенной последовательности, мы придем к нужным результатам кратчайшим путем.

Рассмотрим сначала тождество

$$[B_\ell, \{Q_\alpha{}^L, \bar{Q}_{\dot\beta M}\}] + \{Q_\alpha{}^L, [\bar{Q}_{\dot\beta M}, B_\ell]\} - \{\bar{Q}_{\dot\beta M}, [B_\ell, Q_\alpha{}^L]\} = 0. \tag{1.13}$$

---

[1] Черта под индексами означает симметризацию, а знак $\smile$ — антисимметризацию. — *Прим. перев.*

Первый член равен нулю, так как B_l и P_m коммутируют между собой. Второй и третий члены дают

$$-\{Q_\alpha{}^L,\bar{Q}_{\dot\beta K}\}S^{*\ell}{}_M{}^K + \{\bar{Q}_{\dot\beta M},Q_\alpha{}^K\}S_\ell{}^L{}_K = 0, \tag{1.14}$$

$$2P_{\alpha\dot\beta}[S^{*\ell}{}_M{}^L - S_\ell{}^L{}_M] = 0. \tag{1.15}$$

Равенство (1.15) имеет место лишь в том случае, если

$$S^{*\ell}{}_M{}^L = S_\ell{}^L{}_M, \tag{1.16}$$

так что матрица $S_l{}^L{}_M$ является эрмитовой.

Воспользуемся далее тождеством

$$[B_\ell, \{Q_\alpha{}^L,Q_\beta{}^M\}] + \{Q_\alpha{}^L, [Q_\beta{}^M,B_\ell]\} - \{Q_\beta{}^M,[B_\ell,Q_\alpha{}^L]\} = 0 \tag{1.17}$$

и докажем, что генераторы $X^{\underbrace{LM}} = a^{l,\,\underbrace{LM}}B_l$ образуют инвариантную подалгебру $\mathscr{A}_1 \oplus \mathscr{A}_2$. Подставляя в уравнение (1.17) соотношения (1.11), находим

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\{[B_\ell,X^{\underbrace{LM}}] + S_\ell{}^M{}_K X^{\underbrace{LK}} - S_\ell{}^L{}_K X^{\underbrace{MK}}\} = 0. \tag{1.18}$$

Это соотношение показывает, что коммутатор B_l с $X^{\underbrace{LM}}$ выражается через набор генераторов $X^{\underbrace{LM}}$. Операторы $X^{\underbrace{LM}}$ даются линейными комбинациями B_l, так что мы заключаем, что $X^{\underbrace{LM}}$ образуют инвариантную подалгебру алгебры $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \oplus \mathscr{A}_2$.

Покажем теперь, что генераторы $X^{\underbrace{LM}}$ коммутируют со всеми генераторами алгебры $\mathscr{A}$. Для этого рассмотрим тождество

$$[Q_\alpha{}^L, \{Q_\beta{}^M,\bar{Q}_{\dot\gamma K}\}] + [Q_\beta{}^M, \{\bar{Q}_{\dot\gamma K},Q_\alpha{}^L\}] + [\bar{Q}_{\dot\gamma K}, \{Q_\alpha{}^L,Q_\beta{}^M\}] = 0. \tag{1.19}$$

Учитывая (1.11), находим из этого тождества

$$\varepsilon_{\alpha\beta}[\bar{Q}_{\dot\gamma K},X^{\underbrace{LM}}] = 0, \tag{1.20}$$

так что

$$[X^{\underbrace{KN}},X^{\underbrace{LM}}] = \frac{1}{2}\varepsilon^{\beta\alpha}[\{Q_\alpha{}^K,Q_\beta{}^N\}, X^{\underbrace{LM}}] = 0. \tag{1.21}$$

Отсюда следует, что $X^{\underbrace{LM}}$ образуют абелеву (инвариантную) подалгебру алгебры $\mathscr{A}$. Так как $\mathscr{A}_1$ является полупростой, элементы X^{LM} принадлежат алгебре $\mathscr{A}_2$ и коммутируют со всеми элементами алгебры $\mathscr{A}$:

$$[X^{\underbrace{LM}},B_\ell] = 0. \tag{1.22}$$

По этой причине их называют центральными зарядами. Подставляя (1.22) в (1.18)

$$S_\ell{}^M{}_K X^{\underbrace{LK}} - S_\ell{}^L{}_K X^{\underbrace{MK}} = 0, \tag{1.23}$$

и учитывая, что $X^{\underbrace{MK}} = a^{l,\,\underbrace{MK}} B_l$, получаем

$$S_\ell{}^M{}_K a^{k,\underbrace{LK}} - S_\ell{}^L{}_K a^{k,\underbrace{MK}} = 0. \tag{1.24}$$

Поскольку матрица $S_l{}^M{}_K$ эрмитова, а $a^{k,\,\underbrace{MK}}$ антисимметрична, мы заключаем, что

$$S_\ell{}^M{}_K a^{k,\underbrace{KL}} = -a^{k,\underbrace{MK}} S^{*\ell}{}_K{}^L. \tag{1.25}$$

В упражнении 4 показано, что $S_l{}^M{}_K$ образуют представление алгебры $\mathscr{A}_1 \oplus \mathscr{A}_2$. Равенство (1.25) показывает, что матрицы a^k «сплетают» представление S_l с комплексно-сопряженным представлением $-S_l{}^*$. Центральные заряды существуют лишь в том случае, если алгебра $\mathscr{A}_1 \oplus \mathscr{A}_2$ допускает такие «сплетающие» матрицы. Тривиальный пример есть $S_l^{\underbrace{MK}} = 0$. Другой пример отвечает случаю ортогональных групп, для которых $S_l = -S_l{}^*$. Третий пример приведен в упражнении 5.

Анализ других тождеств Якоби не приводит к новым ограничениям. Таким образом, мы нашли наиболее общую алгебру суперсимметрии

$$\begin{aligned}
[P_m, P_n] &= 0 \\
[P_m, Q_\alpha{}^L] &= [P_m, \bar{Q}_{\dot\alpha L}] = 0 \\
[P_m, B_\ell] &= [P_m, X^{\underbrace{LM}}] = 0 \\
\{Q_\alpha{}^L, \bar{Q}_{\dot\alpha M}\} &= 2\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m P_m \delta^L{}_M \\
\{Q_\alpha{}^L, Q_\beta{}^M\} &= \varepsilon_{\alpha\beta} X^{\underbrace{LM}} \\
\{\bar{Q}_{\dot\alpha L}, \bar{Q}_{\dot\beta M}\} &= \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} X^+{}_{\underbrace{LM}} \\
[X^{\underbrace{LM}}, \bar{Q}_{\dot\alpha K}] &= [X^{\underbrace{LM}}, Q_\alpha{}^K] = 0 \\
[X^{\underbrace{LM}}, X^{\underbrace{KN}}] &= [X^{\underbrace{LM}}, B_\ell] = 0 \\
[B_\ell, B_m] &= i c_{\ell m}{}^k B_k \\
[Q_\alpha{}^L, B_\ell] &= S_\ell{}^L{}_M Q_\alpha{}^M \\
[\bar{Q}_{\dot\alpha L}, B^\ell] &= -S^{*\ell}{}_L{}^M \bar{Q}_{\dot\alpha M} \\
X^{\underbrace{LM}} &= a^{\ell,\underbrace{LM}} B_\ell .
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Это наиболее общая градуированная алгебра симметрий S-матрицы, возможная в рамках релятивистской квантовой теории поля. В случае существования центральных зарядов они должны иметь вид $X^{\underbrace{LM}} = a^{l,\underbrace{LM}}B_l$, где a^l сплетает представления S_l и $-S^{*l}$.

ЛИТЕРАТУРА

Coleman S., Mandula J. — Phys. Rev., 1967, v. 159, p. 1251.
Haag R., Lopuszanski J., Sohnius M. — Nucl. Phys., 1975, v. B88, p. 257.

СВОДКА ФОРМУЛ

$$
\begin{aligned}
\{Q_\alpha{}^A, \bar{Q}_{\dot\beta B}\}_+ &= 2\sigma_{\alpha\dot\beta}{}^m P_m \delta^A{}_B \\
\{Q_\alpha{}^A, Q_\beta{}^B\}_+ &= \{\bar{Q}_{\dot\alpha A}, \bar{Q}_{\dot\beta B}\}_+ = 0 \\
[P_m, Q_\alpha{}^A]_- &= [P_m, \bar{Q}_{\dot\alpha A}]_- = 0 \\
[P_m, P_n]_- &= 0.
\end{aligned}
\tag{I}
$$

$$\{A, \{B, C]] \pm \{B, \{C, A]] \pm \{C, \{A, B]] = 0. \tag{1.12}$$

$$S^{*\ell}{}_M{}^L = S_\ell{}^L{}_M. \tag{1.16}$$

$$S_\ell{}^M{}_K a^{k,\underbrace{KL}} = -a^{k,\underbrace{MK}} S^{*\ell}{}_K{}^L. \tag{1.25}$$

$$
\begin{aligned}
[P_m, P_n] &= 0 \\
[P_m, Q_\alpha{}^L] &= [P_m, \bar{Q}_{\dot\alpha L}] = 0 \\
[P_m, B_\ell] &= [P_m, X^{\underbrace{LM}}] = 0 \\
\{Q_\alpha{}^L, \bar{Q}_{\dot\alpha M}\} &= 2\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m P_m \delta^L{}_M \\
\{Q_\alpha{}^L, Q_\beta{}^M\} &= \varepsilon_{\alpha\beta} X^{\underbrace{LM}} \\
\{\bar{Q}_{\dot\alpha L}, \bar{Q}_{\dot\beta M}\} &= \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} X^{+}{}_{\underbrace{LM}} \\
[X^{\underbrace{LM}}, \bar{Q}_{\dot\alpha K}] &= [X^{\underbrace{LM}}, Q_\alpha{}^K] = 0 \\
[X^{\underbrace{LM}}, X^{\underbrace{KN}}] &= [X^{\underbrace{LM}}, B_\ell] = 0 \\
[B_\ell, B_m] &= i c_{\ell m}{}^k B_k \\
[Q_\alpha{}^L, B_\ell] &= S_\ell{}^L{}_M Q_\alpha{}^M \\
[\bar{Q}_{\dot\alpha L}, B^\ell] &= -S^{*\ell}{}_L{}^M \bar{Q}_{\dot\alpha M} \\
X^{\underbrace{LM}} &= a^{\ell,\underbrace{LM}} B_\ell.
\end{aligned}
\tag{1.26}
$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Сравнивая антикоммутатор (1.7) с эрмитово сопряженным ему, докажите, что $C^L{}_M$ в (1.7) есть эрмитова матрица.

2. Покажите, что $[Q_\alpha, P_m] = 0$. Исходите из того факта, что генераторы со спином 3/2 отсутствуют. Сделайте заключение, что $[P_{\alpha\dot\alpha}, Q_\gamma{}^L] = Z^L{}_M \varepsilon_{\alpha\gamma} \overline{Q}_{\dot\alpha}{}^M$, где $Z^L{}_M$ образуют некоторый набор чисел. Воспользуйтесь тождеством Якоби для $[P_{\beta\dot\beta}, [P_{\alpha\dot\alpha}, Q_\gamma{}^L]]$ для доказательства того, что все $Z^L{}_M$ равны нулю. Как следствие все «заряды» $Q_\alpha{}^L$ являются трансляционно инвариантными.

3. Докажите тождество Якоби (1.12). Проверьте в частности, что

$$[B_1, [B_2,B_3]] + [B_2, [B_3,B_1]] + [B_3, [B_1,B_2]] = 0$$

$$[Q_1, [B_2,B_3]] + [B_2, [B_3,Q_1]] + [B_3, [Q_1,B_2]] = 0$$

$$[B_1, \{Q_2,Q_3\}] + \{Q_2, [Q_3,B_1]\} - \{Q_3, [B_1,Q_2]\} = 0$$

$$[Q_1, \{Q_2,Q_3\}] + [Q_2, \{Q_3,Q_1\}] + [Q_3, \{Q_1,Q_2\}] = 0.$$

4. Используйте тождество

$$[B_\ell, [B_m,Q_\alpha{}^L]] + [B_m, [Q_\alpha{}^L,B_\ell]] + [Q_\alpha{}^L, [B_\ell,B_m]] = 0$$

для доказательства того, что

$$[S_m,S_\ell] = ic_{m\ell}{}^k S_k.$$

(Матрица S_l имеет элементы $S_l{}^K{}_M$.) Покажите, что $-S^*{}_l$ удовлетворяет тем же коммутационным соотношениям.

5. Матрицы Паули σ и сопряженные им матрицы $-\sigma^*$ образуют два представления группы $SU(2)$. Покажите, что матрица ε «сплетает» эти представления. Проверьте, что выражение для антикоммутатора

$$\{Q_\alpha{}^L,Q_\beta{}^M\} = \varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{LM}(c_1 Z_1 + ic_2 Z_2)$$

согласуется с тождествами Якоби, если Z_1 и Z_2 являются центральными зарядами.