ISSN 0131–6982

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

22
1980

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ УССР
КИЕВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Т. Г. ШЕВЧЕНКО

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

РЕСПУБЛИКАНСКИЙ
МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ СБОРНИК

ОСНОВАН В 1970 г.

ВЫПУСК 22

КИЕВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ КИЕВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ «ВИЩА ШКОЛА»
1980

УДК 519.21

Теория вероятностей и математическая статистика, вып. 22. Респ. межвед. науч. сборник. Киев, издательское объединение «Вища школа», 1980, 161+7.

Печатаются статьи, в которых изучаются свойства случайных матриц, предельные теоремы для стохастических интегралов, условия непрерывности и разрывности случайных полей, оценки параметров случайных процессов, линейные операторные уравнения, вопросы теории массового обслуживания.

Для специалистов по теории вероятностей, аспирантов и студентов старших курсов соответствующего профиля, а также для лиц, интересующихся приложениями теории вероятностей и математической статистики.

Адрес редакционной коллегии: 252001, Киев-1, ГСП, ул. Владимирская, 64, университет, кафедра теории вероятностей, тел. 66-41-74.

Редакция естественной литературы
Зав. редакцией Б. Н. Фляшников

Т $\frac{20203-001}{М224(04)-80}$ 424—80 1702060000

УДК 519.21

В. В. АНИСИМОВ, д-р физ.-мат. наук
Киевский университет

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ, ДОПУСКАЮЩИХ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ УКРУПНЕНИЕ ОДНОЙ КОМПОНЕНТЫ

При анализе поведения сложных стохастических систем важную роль играет проблема асимптотического укрупнения фазового пространства состояний, а также асимптотического исследования аддитивных функционалов от таких систем. При исследовании этой проблемы в работах [1—3] методом, основанным на теории возмущения линейных операторов на спектре, получены условия сходимости укрупненных марковских и полумарковских процессов (ПМП) к марковским процессам и асимптотические разложения по степеням малого параметра. Прямыми вероятностными методами получены [4] оценки близости укрупненных процессов к цепи Маркова с непрерывным временем. Автором [5—8] были впервые приведены условия сходимости к ПМП укрупненных ПМП, подмножества состояний которых образуют s-связные множества, а также условия сходимости сумм случайных величин на таких процессах к марковским процессам, однородным по второй компоненте (см. [9]). В работах [10—13] развит новый подход к исследованию ступенчатых процессов, заданных на дискретном процессе, допускающем асимптотическое укрупнение состояний. Этот подход, использующий аппарат переключающихся процессов и общие предельные теоремы для них, применен для асимптотического укрупнения конечных неоднородных марковских цепей [14] и однородных марковских процессов с произвольной фазой [15]. Ряд результатов для однородных схем суммирования на конечных и счетных расщепляющихся цепях Маркова и ПМП получен в работах [13, 16, 17].

В данной статье в I части приведена общая схема исследования случайного процесса, одна компонента которого допускает асимптотическое укрупнение состояний. Метод исследования базируется на аппарате переключающихся процессов [10—13]. Во II части получены предельные теоремы для схем суммирования на дискретных процессах с расщепляющимся множеством состояний, а в III части рассмотрены приложения полученных результатов к цепям Маркова и ПМП со счетным расщепляющимся множеством состояний.

1. Пусть при каждом $n\geqslant 0$ $(x_n(t), \zeta_n(t))$, $t\geqslant 0$ — случайный процесс со значениями в $I\times R^r$, траектории которого с вероят-

ностью единица принадлежат пространству функций без разрывов 2-го рода и непрерывных справа.

Пусть $I=\bigcup\limits_{k\geqslant 1} I_k \quad (I_k \cap I_j=\varnothing,\ k\neq j)$. Положим

$$\varkappa_n(t)=k, \text{ если } x_n(t)\in I_k,\ k\geqslant 1. \tag{1}$$

Для широкого класса дискретных схем суммирования ($\zeta_n(t)$ — процесс ступенчатых сумм, заданный на $x_n(t)$) в том случае, когда переходы $x_n(t)$ между областями I_k происходят достаточно «редко», последовательность $\{\varkappa_n([V_n t]),\ \zeta_n([V_n t])\}$ (V_n — нормирующий множитель) сходится при $n\to\infty$ к марковскому процессу $\{\varkappa_0(t),\ \zeta_0(t)\}$, однородному по второй компоненте [8, 11, 13] (могут возникать и более общие классы процессов). При доказательстве таких утверждений удобно использовать следующий подход.

Предположим, что процесс $\{\varkappa_n(t),\ \zeta_n(t)\}$ стохастически эквивалентен переключающемуся процессу $\{\tilde{\varkappa}_n(t),\ \tilde{\zeta}_n(t)\}$, который строится таким образом. Пусть для любых $n, k\geqslant 1$, $i\in I_k$, $u\geqslant 0$ задано семейство случайных процессов $(x_n^{(k,i)}(t,u,l),\ \eta_n^{(k,i)}(t,l)-\eta_n^{(k,i)}(u,l),$ $\chi_n^{(k,i)}(t,l))$, $t\geqslant u$, распределения которых при разных $l\geqslant 0$ независимы. Будем считать, что траектории процессов $x_n^{(k,i)}(t,u,l)$ и $\eta_n^{(k,i)}(t,l)$ принадлежат пространству функций без разрывов второго рода и непрерывных справа. При этом $x_n^{(k,i)}(t,u,l)$, $t\geqslant u$ — процесс со значениями в I_k и $x_n^{(k,i)}(u,u,l)=i$, а $\chi_n^{(k,i)}(t,l)$, $t\geqslant 0$ — ступенчатый ординарный процесс, последовательные моменты скачков которого обозначим $\tau_n^{(k,i)}(s,l)$, а величины скачков $\gamma_n^{(k,i)}(s,l)$, $s\geqslant 1$. При этом величины $\gamma_n^{(k,i)}(s,l)$ принимают значения во множестве (j,r), $r\in I_j$, $j\geqslant 1$, $j\neq k$. Для простоты предположим, что $\zeta_n(0)=0$. Определим рекуррентным образом последовательности:

$$\tau_n^{(0)}=0,\quad \zeta_n^{(0)}=0,\quad y_n^{(0)}=(\varkappa_n(0),\ x_n(0)),\quad \tau_n^{(k+1)}=\min_{s\geqslant 1}\{\tau_n^{y_n^{(k)}}(s,k):$$

$$:\tau_n^{y_n^{(k)}}(s,k)>\tau_n^{(k)}\},\quad y_n^{(k+1)}=\gamma_n^{y_n^{(k)}}(\tau_n^{(k+1)},k),\ \zeta_n^{(k+1)}=\zeta_n^{(k)}+ \tag{2}$$

$$+\eta_n^{y_n^{(k)}}(\tau_n^{(k+1)},k)-\eta_n^{y_n^{(k)}}(\tau_n^{(k)},k),\quad k\geqslant 0.$$

Тогда на промежутке $[\tau_n^{(k)},\tau_n^{(k+1)})$ $\tilde{x}_n(t)=x_n^{y_n^{(k)}}(t,\tau_n^{(k)},k)$, $\tilde{\varkappa}_n(t)=j$, если $\tilde{x}_n(t)\in I_j$, $t\geqslant 0$, $\tilde{\zeta}_n(t)=\zeta_n^{(k)}+\eta_n^{y_n^{(k)}}(t,k)-\eta_n^{y_n^{(k)}}(\tau_n^{(k)},k)$, $k\geqslant 0$, т. е. если $y_n^{(k)}=(j,r)$, то на k-м промежутке независимо от прошлого развивается процесс типа $x_n^{(j,r)}(t,\tau_n^{(k)},k)$, $\tilde{\varkappa}_n(t)=j$, а момент переключения является моментом первого после $\tau_n^{(k)}$ скачка процесса $\chi_n^{(j,r)}(t,k)$. Процесс $\tilde{\zeta}_n(t)$ строится как сумма приращений процессов $\eta_n^{y_n^{(k)}}(t,k)$. Отметим, что при такой конструкции моменты $\tau_n^{(k)}$ являются марковскими моментами для процесса $\{\tilde{x}_n(t), \tilde{\zeta}_n(t), \tilde{\chi}_n(t)\}$, где $\tilde{\chi}_n(t)$ строится так же, как $\tilde{\zeta}_n(t)$, но по процессам $\chi_n^{(k,i)}(t,l)$. Для корректного построения будем предполагать, что $\tau_k \xrightarrow{P} \infty$ при $k \to \infty$, т. е. процесс $\{\tilde{\varkappa}_n(t), \tilde{\zeta}_n(t)\}$ регулярен по $\tilde{\varkappa}_n(t)$.

Обозначим $\widehat{\gamma}_n^{(k,i)}(s,l) = j$, если $\gamma_n^{(k,i)}(s,l) \in (j, I_j), j \geqslant 1$. Пусть $\widehat{\chi}_n^{(k,i)}(t,l)$ — ступенчатый процесс, моменты скачков которого совпадают с моментами скачков $\chi_n^{(k,i)}(t,l)$, но величины скачков равны $\widehat{\gamma}_n^{(k,i)}(s,l)$.

Пусть выполнены условия:

1) существует неслучайная последовательность $V_n \to \infty$ такая, что для любого $k \geqslant 1$, $i \in I_k$, $l \leqslant 0$ последовательность $\{\eta_n^{(k,i)}(V_n t, l), \widehat{\chi}_n^{(k,i)}(V_n t, l)\}$ сходится в J-топологии Скорохода на любом промежутке $[0, T]$ к стохастическому непрерывному процессу $\{\eta_0^{(k)}(t,l), \chi_0^{(k)}(t,l)\}$, где $\chi_0^{(k)}(t,l)$ — ступенчатый ординарный процесс, со значениями в $\{0, 1, 2, \ldots\}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} P\{x_n(0) \in I_k\} = \pi_k, \quad k \geqslant 1, \ \sum\limits_{k\geqslant 1} \pi_k = 1.$

Обозначим через $\tau_0^{(k)}(s,l)$, $s \geqslant 1$ последовательные моменты скачков $\chi_0^{(k)}(t,l)$, а $\gamma_0^{(k)}(s,l)$ — их величины. Построим переключающийся процесс $\{\varkappa_0(t), \zeta_0(t)\}$ следующим образом: положим $\tau_0 = 0$, $\zeta_0 = 0$, $P\{y_0 = k\} = \pi_k$, $k \geqslant 1$, $\tau_{k+1} = \min\limits_{s\geqslant 1}\{\tau_0^{(y_k)}(s,k) : \tau_0^{(y_k)}(s,k) > \tau_k\}$, $y_{k+1} = \gamma_0^{(y_k)}(\tau_{k+1}, k), \zeta_{k+1} = \zeta_k + \eta_0^{(y_k)}(\tau_{k+1}, k) - \eta_0^{(y_k)}(\tau_k, k), \quad k \geqslant 0.$ Тогда на промежутке $[\tau_k, \tau_{k+1})$ $\varkappa_0(t) = y_k$, а $\zeta_0(t) = \zeta_k + \eta_0^{(y_k)}(t,k) - \eta_0^{(y_k)}(\tau_k, k)$, $k \geqslant 0$.

Обозначим через $D_N(k)$, $N \geqslant 1$ некоторую монотонно возрастающую последовательность областей I_k таких, что $\bigcup\limits_{N\geqslant 1} D_N(k) = I_k$.

Введем следующие условия:

$$3) \ \lim_{N\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} P\{x_n(0) \in I_k \setminus D_N(k)\} = 0;$$

4) для любых $i \in I_k$, $j \neq k$, $k, j, s \geqslant 1$, $l \geqslant 0$

$$\lim_{N\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} P\{\gamma_n^{(k,i)}(s,l) \in (j, I_j \setminus D_N(j))\} = 0.$$

Теорема 1. Если существует стохастически эквивалентный процессу $\{\varkappa_n(t), \zeta_n(t)\}$, $t \geqslant 0$ переключающийся процесс, характеристики которого удовлетворяют условиям 1—4, I не более чем счетно и переключающийся процесс $\{\varkappa_0(t), \zeta_0(t)\}$, $t \geqslant 0$ является регулярным (по компоненте $\varkappa_0(t)$), то последовательность $\{\varkappa_n(V_n t), \zeta_n(V_n t)\}$ сходится в J-топологии Скорохода на любом промежутке $[0, T]$ к процессу $\{\varkappa_0(t), \zeta_0(t)\}$.

Замечание 1. При I несчетном теорема останется справедливой, если в условии 1 потребовать сходимость многомерных характеристических функций к предельным и сходимость к 0 модуля непрерывности равномерно по $D_N(k)$.

Замечание 2. Пусть S — одна из топологий J_1, J_2, M_1, M_2 (см. [18]). Тогда условие 1 можно записать в таком виде: для любого $k \geqslant 1$, $i \in I_k$, $l \geqslant 0$ конечномерные распределения процесса $\{\eta_n^{(k,i)}(V_n t, l), \widetilde{\chi}_n^{(k,i)}(V_n t, l)\}$ слабо сходятся к распределениям стохастически непрерывного процесса $\{\eta_0^{(k)}(t, l), \chi_0^{(k)}(t, l)\}$, $t \geqslant 0$, где $\chi_0^{(k)}(t, l)$ — ступенчатый ординарный процесс, а процесс $\eta_n^{(k,i)}(V_n t, l)$ S-сходится к $\eta_0^{(k)}(t, l)$ на любом промежутке $[0, T]$ (скачкообразная составляющая $\eta_0^{(k)}(t, l)$ не зависит от $\chi_0^{(k)}(t, l)$). При этом в условиях теоремы $\zeta_n(V_n t)$ S-сходится к $\zeta_0(t)$, а $\varkappa_n(V_n t)$ J-сходится к $\varkappa_0(t)$.

Доказательство. Докажем вначале слабую сходимость конечномерных распределений. Сходимость начального распределения следует из условия 2. Согласно условию 1 и результатам работы [19; 13, § 2, 3] моменты $\tau_n^{(k,i)}(s, l)$ для любого $s \geqslant 1$ являются двусторонними J-моментами [13, § 9 и 11] относительно процесса $\eta_n^{(k,i)}(t, l)$, т. е. конечномерные распределения вектора $\{\tau_n^{(k,i)}(p, l), \widetilde{\gamma}_n^{(k,i)}(p, l), \eta_n^{(k,i)}(t, l), \eta_n^{(k,i)}(\tau_n^{(k,i)}(p, l), l), p \geqslant 1, t \geqslant 0\}$ слабо сходятся к распределениям вектора $\{\tau_0^{(k)}(p, l), \gamma_0^{(k)}(p, l), \eta_0^{(k)}(t, l), \eta_0^{(k)}(\tau_0^{(k)}(p, l), l), p \geqslant 1, t \geqslant 0\}$ для всех $i \in I_k$, $k \geqslant 1$, $l \geqslant 1$.

Отметим следующий простой результат.

Лемма. Пусть для любого $j \in D$ (D — счетное множество) $\xi_n(j) \overset{\text{сл.}}{\Rightarrow} \xi$, где ξ — собственная величина, и существует не зависящая от $\xi_n(i)$ последовательность величин ν_n и конечных областей $D_N \uparrow D \left(\bigcup_{N \geqslant 1} D_N = D\right)$ таких, что $\lim_{N \to \infty} \overline{\lim_{n \to \infty}} P\{\nu_n \overline{\in} D_N\} = 0$.

Тогда $\xi_n(\nu_n) \overset{\text{сл.}}{\Rightarrow} \xi$.

Действительно, $|Me^{i\lambda\xi_n(\nu_n)} - Me^{i\lambda\xi}| \leqslant \sup_{j \in D_N} |Me^{i\lambda\xi_n(j)} - Me^{i\lambda\xi}| + 2P\{\nu_n \overline{\in} D_N\}$, что доказывает лемму. Если D несчетно, то вместо поточечной сходимости $\xi_n(j)$ к ξ достаточно потребовать сходимость $M\exp\{i\lambda\xi_n(j)\}$ к $M\exp\{i\lambda\xi\}$ равномерно по $j \in D_N$ для любого $N \geqslant 1$.

Теперь из леммы, рекуррентных формул для величин $\tau_n^{(k)}$, $y_n^{(k)}$, $\zeta_n^{(k)}$ и условий 3,4 нетрудно по индукции найти, что для любого $N \geqslant 1$

$$\{\tau_n^{(k)}, \varkappa_n(\tau_n^{(k)}), \zeta_n^{(k)},\ k = \overline{0, N}\} \overset{\text{сл.}}{\Rightarrow} \{\tau_k, \varkappa_0(\tau_k), \zeta_k,\ k = \overline{0, N}\}.$$

Оставшаяся часть доказывается аналогично лемме 1, а J-сходимость — теореме 3 [11] (см. также [13, § 9, 11]).

Для доказательства замечания 2 отметим, что при указанных предположениях моменты $\tau_0^{(k,i)}(p, l)$ будут с вероятностью 1 точками непрерывности процесса $\eta_0^{(k,i)}(t, l)$, откуда следует, что $\tau_n^{(k,i)}(p,l)$ будут S-моментами относительно процесса $\eta_n^{(k,i)}(t, l)$.

Замечание 3. Вместо предложенной конструкции процесса $\{x_n(t), \zeta_n(t)\}$, в которой $\tau_n^{(k)}$ являются марковскими моментами, можно исследовать другую модель, в которой на каждом промежутке возможна сильная зависимость от предыстории. А именно, пусть траектории процессов $x_n^{(k,i)}(t, u, t) = x_n^{(k)}(t)$, $\eta_n^{(k,i)}(t, l) = \eta_n^{(k)}(t)$, $\chi_n^{(k,i)}(t, l) = \chi_n^{(k)}(t)$, т. е. тождественно совпадают при разных l и i. Поскольку мы можем управлять не состоянием i области I_k, откуда начинается процесс, а только индексом области, то достаточно рассматривать ситуацию, когда величины скачков $\gamma_n^{(k,i)}(s, l) = \gamma_n^{(k)}(s)$ лежат во множестве $\{1, 2, \ldots\}$. В этом случае в соотношениях (2) положим $y_n^{(0)} = (\varkappa_n(0))$. Утверждение теоремы 1 сохранится, если выполнены условия 1 и 4. При этом предельный процесс $\{\varkappa_0(t), \zeta_0(t)\}$ строится по той же схеме с $\eta_0^{(k)}(t, l) = \eta_0^{(k)}(t)$ и $\chi_0^{(k)}(t, l) = \chi_0^{(k)}(t)$.

Аналогично можно исследовать ситуацию, когда процессы $x_n^{(k)}(t)$ не восстанавливаются (т. е. продолжаются на $[0, \infty)$ и переключаются только верхним индексом), а процессы $\eta_n^{(k,i)}(t, l)$, $\chi_n^{(k,i)}(t, l)$ могут в моменты переключения восстанавливаться и развитие их может зависеть от значения $x_n^{(k)}(t)$ в момент переключения.

II. Рассмотрим схему, которая включает схему суммирования на счетных цепях Маркова с расщепляющимся пространством состояний (аналогичная схема для случая конечной фазы впервые исследована автором [10, 13]).

Пусть для каждого $n \geqslant 1$ заданы: параметрическое семейство независимых в совокупности по индексу $l \geqslant 0$ случайных процессов $\varkappa_n = \{\varkappa_n^{(k,i)}(j, l),\ j \geqslant 0\},\ i \in I_k,\ k \geqslant 1,\ l \geqslant 0\}$, где $\varkappa_n^{(k,i)}(j, l)$, $j \geqslant 0$ — процесс с дискретным временем и не более чем счетным множеством состояний I_k $(I_k \cap I_m = \varnothing,\ k \neq m)$, распределения которого не зависят от индекса $l \geqslant 0$, причем $\varkappa_n^{(k,i)}(0, 0) = i$; независимое от $\varkappa_n$ семейство независимых в совокупности случайных векторов $\{(\xi_n^{(k)}(p, l), \chi_n^{(k)}(p, l)),\ p \in I_k,\ k \geqslant 1, l \geqslant 0\}$, распределение которых не зависит от индекса l, при этом величины $\xi_n^{(k)}(p, l)$ принимают значения в пространстве R^r, а $\chi_n^{(k)}(p, l)$ — в пространстве $\{0\} \cup \cup \bigcup_{m \neq k} \bigcup_{i \in I_k} \{(m, i)\}$. Обозначим

$$x_n^{(k,i)}(t, u, l) = \varkappa_n^{(k,i)}([t] - [u], l),$$

$$(\eta_n^{(k,i)}(t, l), \chi_n^{(k,i)}(t, l)) = \sum_{j=0}^{[t]} (\xi_n^{(k)}(\varkappa_n^{(k,i)}(j, l), j), \chi_n^{(k)}(\varkappa_n^{(k,i)}(j, l), j)).$$

Зададимся некоторым начальным распределением $p_n^{(k)}(i) = P\{x_n(0) = i\}$, $i \in I_k$, $k \geqslant 1$ и построим согласно I части по введенным процессам переключающийся процесс $\{\varkappa_n(t), \zeta_n(t)\}$, $t \geqslant 0$. Положим

$$\nu_n^{(k,i)}(j, m) = \sum_{l=0}^{m-1} \delta_j(\varkappa_n^{(k,i)}(l)), \ i \in I_k, \ j \in I_k, \ k \geqslant 0, \ m \geqslant 0$$

(здесь $\delta_j(p) = 1$, если $p = j$, и 0, если $p \neq j$, т. е. $\nu_n^{(k,i)}(j, m)$ — частоты попаданий в состояния $\varkappa_n^{(k,i)}(l)$ за m шагов, причем $\nu_n^{(k,i)}(j, 0) = 0$). Далее, пусть $\widehat{\chi_n^{(k)}}(p, l) = j$, если $\chi_n^{(k)}(p, l) \in (j, I_j)$, и 0, если $\chi_n^{(k)}(p, l) = 0$. Обозначим

$$\varphi_n^{(k)}(p, \lambda, s) = M \exp\{i(\lambda, \xi_n^{(k)}(p, 1)) - s\widehat{\chi_n^{(k)}}(p, 1)\}, \ p \in I_k, \ \lambda \in R^r, s \geqslant 0.$$

Пусть $D_N(k)$ — монотонная последовательность конечных областей из I_k, таких, что $\bigcup_{N \geqslant 1} D_N(k) = I_k$. Предположим, существует последовательность $V_n \to \infty$ такая, что выполнены следующие условия:

5) для любого $k \geqslant 1$, $N \geqslant 1$, $i \in I_k$ конечномерные распределения векторного процесса $\left\{\frac{1}{V_n} \nu_n^{(k,i)}(j, [V_n t]), \ j \in D_N(k)\right\}$ слабо сходятся к распределениям процесса $\{\nu_0^{(k)}(j, t), \ j \in D_N(k)\}$ для всех $t \geqslant 0$, при этом

$$\lim_{N \to \infty} P\left\{\sum_{j \in I_k \setminus D_N(k)} \nu_0^{(k)}(j, t) > \varepsilon\right\} = 0, \ \varepsilon > 0, \ t > 0;$$

6) $\lim\limits_{n \to \infty} V_n(\varphi_n^{(k)}(j, \lambda, s) - 1) = a_j^{(k)}(\lambda, s)$, $j \in I_k$, $k \geqslant 1$, где $a_j^{(k)}(\pm 0, +0) = 0$, и для любых $\lambda \in R^r$, $s \geqslant 0$

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sup_{j \in I_k} V_n |\varphi_n^{(k)}(j, \lambda, s) - 1| < \infty, \ k \geqslant 1.$$

Обозначим $(\eta_0^{(k)}(t), \chi_0^{(k)}(t)) = \sum\limits_{j \in I_k} (\xi_0^{(k)}(j, \nu_0^{(k)}(j, t)), \chi_0^{(k)}(j, \nu_0^{(k)}(j, t)))$, где $(\xi_0^{(k)}(j, u),\ \chi_0^{(k)}(j, u))$, $j \in I_k$ — независимое от $\{\nu_0^{(k)}(q, t),\ q \in I_k\}$ семейство независимых процессов с независимыми приращениями, таких, что

$$M \exp\{i(\lambda, \xi_0^{(k)}(j, u)) - s\chi_0^{(k)}(j, u)\} = ua_j^{(k)}(\lambda, s).$$

(Сам процесс $\chi_0^{(k)}(j, u)$ является обобщенным пуассоновским процессом, величины скачков которого принадлежат множеству $\{1, 2, \ldots\}$). Построим по начальному распределению π_k, $k \geqslant 1$ и процессам $(\eta_0^{(k)}(t), \chi_0^{(k)}(t))$ переключающийся процесс $\{\varkappa_0(t), \zeta_0(t)\}$ так, как в теореме 1.

Теорема 2. Если выполнены условия 5, 6, начальное распределение удовлетворяет условиям 2, 3, процесс $\{\varkappa_0(t), \zeta_0(t)\}$ регулярен и для любого $j \neq k$

$$\lim_{N \to \infty} \overline{\lim_{n \to \infty}} P\{\chi_n^{(k)}(i, 1) \in (j, I_j \setminus D_N(j)) / \chi_n^{(k)}(i, 1) \neq 0\} = 0 \qquad (3)$$

при тех i, при которых $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} V_n P\{\chi_n^{(k)}(i, 1) \neq 0\} > 0$, то последовательность процессов $\{\varkappa_n(V_n t),\ \zeta_n(V_n t)\}$ J-сходится к $\{\varkappa_0(t), \zeta_0(t)\}$ на любом промежутке $[0, T]$.

Доказательство. Из условий 5,6 и работы [20] (теорема 1) следует, что для любых $i \in I_k$, $k \geqslant 1$ последовательность процессов $(\eta_n^{(k,i)}(V_n t, l),\ \chi_n^{(k,i)}(V_n t, l))$ J-сходится на любом промежутке $[0, T]$ к процессу $(\eta_0^{(k)}(t), \chi_0^{(k)}(t))$, который принимает собственные значения в пространстве $R^r \times \{0, 1, \ldots\}$ и, как легко удостовериться, стохастически непрерывен. Значит, выполнено условие 1 теоремы 1. Покажем теперь, что из соотношения (3) следует условие 4. Обозначим

$$\gamma_N^{(k,i)}(t) = \sum_{j=0}^{[V_n t]} \chi_n^{(k)}(\varkappa_n^{(k,i)}(j, 1), 1)\, \delta_{I_k \setminus D_N(k)}(\varkappa_n^{(k,i)}(j, 1)),$$

где $\delta_A(x) = 1$, $x \in A$ и $0, x \overline{\in} A$.

Так же, как при оценке величины $\bar{\gamma}_{N, N_1}(t)$ в теореме 1 [20], нетрудно найти, что для любого $t > 0$

$$\lim_{N \to \infty} \lim_{n \to \infty} M \exp\{-s\gamma_N^{(k,i)}(t)\} = 1. \qquad (4)$$

Отсюда следует, что если $\mu_n^{(k,i)}(l)$ — момент l-го скачка процесса $\chi_n^{(k,i)}(V_n t, 1)$, то для любого $l \geqslant 1$

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} P\{\varkappa_n^{(k,i)}(\mu_n^{(k,i)}(l)) \in I_k \setminus D_N(k)\} \leqslant \overline{\lim_{n \to \infty}} P\{\mu_n^{(k,i)}(l) > T\} + $$
$$+ \overline{\lim_{n \to \infty}} P(\gamma_N^{(k,i)}(T) \geqslant 1\}. \qquad (5)$$

Из J-сходимости $\chi_n^{(k,i)}(V_n t, 1)$ к $\chi_0^{(k)}(t, 1)$ — ступенчатому ординарному процессу следует сходимость моментов скачков. Так как момент l-го $\chi_0^{(k)}(t, 1)$ — собственная величина, то первое слагаемое в правой части (5) выбором T может быть сделано сколько угодно малым, а 2-е слагаемое в силу (4) при фиксированном T будет мало при достаточно больших N. Отсюда

$$\lim_{N\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} P\{\varkappa_n^{(k,i)}(\mu_n^{(k,i)}(l)) \in I_k \setminus D_N(k)\} = 0. \qquad (6)$$

Пусть $\gamma_n^{(k,i)}(l)$ — величина l-го скачка процесса $\chi_n^{(k,i)}(V_n t, 1)$. Поскольку $\gamma_n^{(k,i)}(l) = \chi_n^{(k)}(\varkappa_n^{(k,i)}(\mu_n^{(k,i)}(l)), 1)$, то из (6) и условия (3) можно получить условие 4 теоремы 1. Значит, при наших предположениях выполнены все условия теоремы 1, т. е. теорема 2 доказана.

Следствие 1. Пусть в теореме 2 вместо условия 5 выполнено условие:

5′) для любого $k \geqslant 1$, $i \in I_k$ $\frac{1}{V_n} \nu_n^{(k,i)}(j, [V_n t]) \xrightarrow{P} t q_0^{(k)}(j)$, $j \in I_k$, $\sum_{j\in I_k} q_0^{(k)}(j) = 1$.

Тогда $\{\varkappa_0(t), \zeta_0(t)\}$, $t \geqslant 0$ — однородный марковский процесс, однородный по второй компоненте, задаваемый следующими характеристиками. Обозначим

$$\lim_{n\to\infty} V_n P\{\widehat{\chi}_n^{(k)}(j, 1) = m\} = \lambda_k(j, m),$$

$$\lim_{n\to\infty} V_n (M[\exp\{i(\lambda, \xi_n^{(k)}(j, 1))\}/\chi_n^{(k)}(j, 1) = 0] - 1) = \tilde{a}_k(j, \lambda),$$

$$\lim_{n\to\infty} M[\exp\{i(\lambda, \xi_n^{(k)}(j, 1))\}/\widehat{\chi}_n^{(k)}(j, 1) = m] = \psi_k(j, \lambda, m), \quad j \in I_k,$$

$$k \geqslant 1, \quad m \neq k, \quad m > 0.$$

Положим

$$\lambda_{km} = \sum_{j\in I_k} q_0^{(k)}(j) \lambda_k(j, m),$$

$$A_k(\lambda) = \sum_{j\in I_k} q_0^{(k)}(j) \tilde{a}_k(j, \lambda), \; \psi_{km}(\lambda) = \sum_{j\in I_k} q_0^{(k)}(j) \psi_k(j, \lambda, m) \qquad (7)$$

(данные пределы и ряды существуют в силу условия 6). Тогда $\varkappa_0(t)$ — однородная цепь Маркова с начальным распределением π_k, $k \geqslant 1$ и интенсивностями вероятностей переходов λ_{km}, а $\zeta_0(t)$ строится на $\varkappa_0(t)$ по процессам с независимыми приращениями с кумулянтами $A_k(\lambda)$ и случайным величинам, характеристические функции которых $\psi_{km}(\lambda)$, так, как указывалось в работе [9].

Замечание 4. Результаты теоремы 2 нетрудно распространить на неоднородные схемы суммирования аналогично тому, как это сделано в теореме 2 [20], и при этом получится класс предельных процессов такого же вида, однако $(\xi_0^{(k)}(j, u), \chi_0^{(k)}(j, u))$ будут неоднородными процессами с независимыми приращениями.

III. Рассмотрим приложения теоремы 2 к схемам суммирования на счетных марковских и полумарковских процессах, допускающих асимптотическое укрупнение состояний (схемы суммирования в случае конечной фазы изучены автором в работах [11, 13]).

Пусть $x_n(l), l \geqslant 0$ — однородная цепь Маркова со счетным множеством состояний I и матрицей вероятностей переходов $P_n = \| p_n(i, j) \|$, $i, j \in I$. Предположим, что существует $P_0 = \lim_{n\to\infty} P_n$, причем матрице P_0 соответствуют возвратные классы $I_1, I_2, \ldots \ldots \left(\bigcup_{k\geqslant 1} I_k = I\right)$ с матрицами вероятностей переходов $P_0(k)$, $k \geqslant 1$.

Обозначим $\tilde{P}_n(k) = \| \tilde{p}_n^{(k)}(i, j) \|$, $i, j \in I_k$, где $\tilde{p}_n^{(k)}(i, j) = p_n(i, j)(1 - p_n^{(k)}(i))^{-1}$, а $p_n^{(k)}(i) = \sum_{l \bar{\in} I_k} p_n(i, l)$.

Введем условие:

7) для любого k цепь Маркова $x_n^{(k)}(l)$, $l \geqslant 0$ с матрицей вероятностей переходов $\tilde{P}_n(k)$ имеет стационарное распределение $\tilde{q}_n^{(k)}(i)$, $i \in I_k$, причем $\lim_{N\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i \in I_k \setminus D_N(k)} \hat{q}_n^{(k)}(i) = 0$.

Пусть при каждом $n \geqslant 1$ $\{\xi_n(j, l), j \in I, l \geqslant 0\}$ — независимое от $x_n(m)$ семейство независимых в совокупности случайных величин, распределение которых не зависит от индекса $l \geqslant 0$.

Положим $\varkappa_n(m) = k$, если $x_n(m) \in I_k$, $k \geqslant 1$, $m \geqslant 0$, $\zeta_n(m) = \sum_{l=0}^{m} \xi_n(x_n(l), l)$.

Теорема 3. Пусть цепь $x_n(l)$, $l \geqslant 0$ удовлетворяет условию 7, начальное распределение цепи — условиям 2 и 3; существуют конечные пределы

$$\lim_{n\to\infty} V_n (M \exp\{i(\lambda, \xi_n(j, 1))\} - 1) = a_j(\lambda), \quad a_j(\pm 0) = 0, \quad j \in I; \tag{8}$$

$$\lim_{n\to\infty} V_n \sum_{l \in I_m} p_n(j, l) = \lambda(j, m), \quad j \bar{\in} I_m; \tag{9}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{j \in I} V_n | M \exp\{i(\lambda, \xi_n(j, 1))\} - 1 | < \infty; \tag{10}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{j \in \Gamma_k} V_n p_n^{(k)}(j) < \infty, \quad j \in I_k; \tag{11}$$

$$\lim_{N\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} V_n \sum_{m > N} \sum_{l \in I_m} p_n(j, l) = 0, \quad j \in I; \tag{12}$$

$$\lim_{N\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, V_n \sum_{l\in I_m \setminus D_N^{(m)}} p_n(j,l) = 0,\ j\in I_k,\ k,m\geqslant 1,\ k\neq m, \quad (13)$$

причем цепь Маркова $\varkappa_0(t)$, которая задается начальным распределением π_k, $k\geqslant 1$ и интенсивностями вероятностей переходов

$$\lambda_{km} = \sum_{j\in I_k} q_0^{(k)}(j)\,\lambda(j,m), \quad (14)$$

регулярна (здесь $q_0^{(k)}(j)$, $j\in I_k$ — стационарное распределение для матрицы $P_0(k)$). Тогда последовательность $\{\varkappa_n([V_nt]),\ \zeta_n([V_nt])\}$ J-сходится на любом промежутке $[0,T]$ к однородному марковскому процессу $\{\varkappa_0(t),\ \zeta_0(t)\}$, однородному по 2-й компоненте. Здесь $\zeta_0(t)$ задается, согласно [9], совокупностью процессов с независимыми приращениями с кумулянтами $A_k(\lambda) = \sum_{j\in I_k} q_0^{(k)}(j)\,a_j(\lambda)$, а величины $\psi_{km}(\lambda)\equiv 1$, $k,m\geqslant 1$, $k\neq m$.

Следствие 2. Если цепь $x_n(l)$ удовлетворяет условиям 2, 3, 7 и выполнены соотношения (9), (11)—(13), причем цепь $\varkappa_0(t)$ регулярна, то последовательность укрупненных процессов $\varkappa_n([V_nt])$ J-сходится к $\varkappa_0(t)$.

Доказательство. Обозначим через $\varkappa_n^{(k,i)}(l)$, $l\geqslant 0$ однородную цепь Маркова со множеством состояний I_k, которая задается матрицей вероятностей переходов $\tilde{P}_n(k)$ и начальным состоянием i. Введем величины $\chi_n^{(k)}(j,l)$ следующим образом: $P\{\chi_n^{(k)}(j,l)=(m,s)\} = p_n(j,s)$, $j\in I_k$, $s\in I_m$, $P\{\chi_n^{(k)}(j,l)=0\} = 1-\tilde{p}_n^{(k)}(j)$.

Нетрудно проверить, что процесс $\{\varkappa_n([t]),\ \zeta_n([t])\}$, $t\geqslant 0$ стохастически эквивалентен переключающемуся процессу $\{\varkappa_n([t]),\ \zeta_n([t])\}$, $t\geqslant 0$, введенному во II части. Таким образом, наша схема суммирования вложена в общую модель, рассмотренную во II части, и осталось проверить условия теоремы 2. Заметим, что из условия 7 согласно [20] (лемма 2) следует, что существует стационарное распределение $q_0^{(k)}(j)$, $j\in I_k$, $\lim_{n\to\infty}\tilde{q}_n^{(k)}(j) = q_0^{(k)}(j)$ и выполнено условие 5. Соотношения (8) — (12), как несложно проверить, влекут выполнение условия 6, а из (13) следует (3) (в частности, из условия (12) вытекает, что предельное распределение величин $\widehat{\chi}_n^{(k)}(j,1)$ будет собственным). Следовательно, справедливы условия следствия 1, при этом ввиду независимости $\xi_n^{(k)}(j,l)$ от цепи $x_n^{(k)}(l)$ $\psi_k(j,\lambda,m)\equiv 1$, что окончательно доказывает теорему.

Пусть теперь $y_n(t)$, $t\geqslant 0$ — ПМП, для которого заданы вложенная цепь Маркова $x_n(l)$, $l\geqslant 0$ и семейство независимых от $x_n(l)$ и в совокупности векторов $\{(\gamma_n(i,l),\ \tau_n(i,l)),\ i\in I,\ l\geqslant 0\}$ со значениями в $R^r\times[0,\infty)$, распределения которых не зависят от индекса $l\geqslant 0$. Здесь $\tau_n(i,l)$ — время пребывания $y_n(t)$ в состоянии i при l-м попадании в него. Обозначим $\nu_n(t)$ число скачков $y_n(u)$ на промежутке $[0, T]$, т. е.

$$\nu_n(t) = \min\left\{k : \sum_{l=0}^{k} \tau_n(x_n(l), l) \geqslant t\right\}.$$

Введем процессы $\gamma_n^-(t) = \sum_{l=0}^{\nu_n(t)-1} \gamma_n(x_n(l), l)$, $\gamma_n^+(t) = \gamma_n^-(t) + \gamma_n(x_n(\nu_n(t)), \nu_n(t))$ и укрупненный процесс $\widehat{y}_n(t) = k$, если $y_n(t) \in I_k$, $k \geqslant 1$, $t \geqslant 0$. Обозначим $\xi_n(j, l) = (\gamma_n(j, l), \tau_n(j, l))$.

Теорема 4. Пусть цепь $x_n(l)$, $l \geqslant 0$ удовлетворяет условиям 2, 3, 7, а также соотношениям (9), (11)—(13), а величины $\xi_n(j, 1)$ — соотношению (10) и

$$\lim_{n\to\infty} V_n(M\exp\{i(\lambda, \xi_n(j, 1)) - s\tau_n(j, 1)\} - 1) = a_j(\lambda, s),\ j \in I,$$

при этом цепь $\varkappa_0(t)$ регулярна. Тогда почти для всех $T > 0$ последовательности процессов $\{\widehat{y}_n(t), \gamma_n^-(t)\}$ и $\{\widehat{y}_n(t), \gamma_n^+(t)\}$ J-сходятся на $[0, T]$ соответственно к процессам $\{\varkappa_0(\mu_0(t)), \zeta_0(\mu_0(t) - 0)\}$ и $\{\varkappa_0(\mu_0(t)), \zeta_0(\mu_0(t))\}$, если $\tau_0(u)$ строго монотонно возрастает. Здесь $\mu_0(t) = \inf\{u : u \geqslant 0, \tau_0(u) \geqslant t\}$, а $\{\varkappa_0(t), (\zeta_0(t), \tau_0(t))\}$, $t \geqslant 0$ — марковский процесс, однородный по второй компоненте и задаваемый совокупностью процессов с независимыми приращениями $(\gamma_0^{(k)}(t), \tau_0^{(k)}(t))$ с кумулянтами

$$A_k(\lambda, s) = t^{-1} \ln M\exp\{i(\lambda, \gamma_0^{(k)}(t)) - s\tau_0^{(k)}(t)\},$$

где $A_k(\lambda, s) = \sum_{j\in I_k} q_0^{(k)}(j) a_j(\lambda, s)$, $k \geqslant 1$.

Доказательство. Обозначим

$$(\zeta_n(u), \tau_n(u)) = \sum_{l=0}^{[V_n u]} (\gamma_n(x_n(l), l), \tau_n(x_n(l), l)).$$

На основании теоремы 3 процесс $\{\varkappa_n([V_n u]), (\zeta_n(u), \tau_n(u))\}$ J-сходится к $\{\varkappa_0(u), (\zeta_0(u), \tau_0(u))\}$. Поскольку $V_n^{-1}\nu_n(t) = \inf\{u : u \geqslant 0, \tau_n(u) \geqslant t\}$, $\gamma_n^-(t) = \zeta_n(\nu_n(t)/V_n - 0)$, $\gamma_n^+(t) = \zeta_n(\nu_n(t)/V_n)$, то для доказательства теоремы осталось воспользоваться результатами [19] (см. также [13], § 3).

Заметим, что процесс $\varkappa_0(\mu_0(t))$ будет ПМП с преобразованием Лапласа времени пребывания в состоянии k $\lambda_k(\lambda_k + A_k(0, s))^{-1}$, где $\lambda_k = \sum_{m\neq k} \lambda_{km}$ (см. (14)).

Следствие 3. Если задан ПМП $y_n(t)$, вложенная цепь которого удовлетворяет условиям 2,3,7 и соотношениям (9), (11)—(13), а времена пребывания — условию (15) (при $\lambda = 0$) и условию типа (10), при этом цепь $\varkappa_0(t)$ регулярна, то конечномерные распределения процесса $\widehat{y_n}(t)$ слабо сходятся к распределениям ПМП $\widehat{y_0}(t)$ в точках стохастической непрерывности $\widehat{y_0}(t)$. Если для любого k $A_k(0,s) \not\equiv 0$, то $\widehat{y_n}(t)$ J-сходится к $\widehat{y_0}(t)$ на промежутке $[0, T]$ для тех T, в которых $\widehat{y_0}(t)$ стохастически непрерывен. Здесь время пребывания в состоянии k у ПМП $\widehat{y_0}(t)$ имеет преобразование Лапласа $\lambda_k(\lambda_k + A_k(0,s))^{-1}$.

Замечание 5. Если величины $\tau_n(j, l)$ удовлетворяют при каждом j закону больших чисел, т. е. в (15) $a_j(0, s) \equiv -sm_j$, то $A_k(0, s) \equiv -sM_k$ и укрупненный ПМП $\hat{y}_n(t)$ сходится к цепи Маркова с непрерывным временем, что согласуется с результатами [1—4]. При этом $\zeta_0(\mu_0(t)-0) \equiv \zeta_0(\mu_0(t))$, и, как нетрудно проверить, процесс $\{\varkappa_0(\mu_0(t)), \zeta_0(\mu_0(t))\}$ также будет марковским процессом, однородным по 2-й компоненте.

1. *Королюк В. С.* Асимптотическое поведение времени пребывания полумарковского процесса в подмножестве состояний.— УМЖ, 1969, 21, № 6. 2. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения. Киев, Наукова думка, 1976. 3. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем. Киев, Наукова думка, 1978. 4. *Коваленко И. Н.* Исследование по анализу надежности сложных систем. Киев, Наукова думка, 1975. 5. *Анисимов В. В.* Предельные распределения функционалов от полумарковского процесса, заданных на фиксированном множестве состояний до момента первого выхода.— ДАН СССР, 1970, **193**, № 4. 6. *Анисимов В. В.* О предельном поведении полумарковского процесса с расщепляющимся множеством состояний.— ДАН СССР, 1972, **206**, № 4. 7. *Анисимов В. В.* Асимптотическое укрупнение состояний случайных процессов.— Кибернетика, 1973, № 3. 8. *Анисимов В. В.* Предельные теоремы для процессов, управляемых полумарковским процессом с расщепляющимся множеством состояний.— Тезисы докладов Международной конференции по теории вероятностей и математической статистике. Вильнюс, 1973. 9. *Ежов И. И., Скороход А. В.* Марковские процессы, однородные по второй компоненте. I.— Теория вероятностей и ее применения, 1969, **14**, 1. 10. *Анисимов В. В.* Предельные теоремы для случайных процессов и их применения к дискретным схемам суммирования.— Теория вероятностей и ее применения, 1975, **20**, 3. 11. *Анисимов В. В.* Предельные теоремы для переключающихся процессов и их применение.— Кибернетика, 1978, № 6, 12. *Анисимов В. В.* Переключающиеся процессы.— Кибернетика, 1977, № 4. 13. *Анисимов В. В.* Предельные теоремы для случайных процессов и их применение к дискретным схемам суммирования. Киев, Вища школа. Изд-во при Киев. ун-те, 1976. 14. *Анисимов В. В., Ситюк В. Н.* Асимптотическое поведение неоднородного пуассоновского потока с ведущей функцией, зависящей от малого параметра, управляемого цепью Маркова.— Кибернетика, 1977, № 4. 15. *Война А. А.* Время пребывания в фиксированном подмножестве и укрупнение состояний случайных процессов с произвольным фазовым пространством.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1979, вып. 20. 16. *Анисимов В. В.* Предельные теоремы для случайных процессов и их применение к процессам с дискретной компонентой. Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Киев. ун-т, 1975. 17. *Анисимов В. В.* Предельные теоремы для схем суммирования на счетных расщепляющихся процессах и их применение к марковским и полумарковским процессам.— Тезисы докладов II Международной конференции по теории вероятностей и математической статистике. Вильнюс, 1977. 18. *Скороход А. В.* Предельные теоремы для случайных процессов.— Тео-

рия вероятностей и ее применения, 1956, 1, 3. 19. *Анисимов В. В.* J-Непрерывность некоторых классов функционалов и предельные теоремы для случайно остановленных процессов.— Тезисы докладов Всесоюзного симпозиума по статистике случайных процессов. Киев, 1973. 20. *Анисимов В. В.* Предельные теоремы для ступенчатых процессов, заданных на случайном процессе со счетным множеством состояний.— Теория случайных процессов, 1976, вып. 4.

Поступила в редколлегию 19.12.78

V. V. Anisimov

LIMIT THEOREMS FOR PROCESSES THAT ALLOW THE ASYMPTOTIC ENLARGEMENT OF A COMPONENT

The general scheme of proving limit theorems for the random processes named in the title is considered. The scheme uses the notion of switching processes proposed by author earlier.

The limit behavior of a step-process constructed on a discrete process with splitting state is investigated and applications to the homogeneous scheme of summing on the countable Markov and semi-Markov chains in the scheme of series are obtained.

УДК 519.21:517.51

Ю. И. ВОЛКОВ, канд. физ.-мат. наук
Винницкий политехнический институт

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТИПА B И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

I. Определения и примеры. Распределение $F_x(t)$, зависящее от параметра x, $x \in X$, называется распределением типа B, если существует такая строго положительная бесконечно дифференцируемая на X функция $v(x)$, что характеристическая функция $\varphi=\varphi(t, x)$ данного распределения удовлетворяет уравнению

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t}+v(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-x\varphi. \tag{1}$$

Покажем, что ряд известных распределений являются распределениями типа B.

1. Распределение Бернулли с параметром x, $0<x<1$ есть распределение типа B. Действительно, такое распределение имеет случайная величина ξ, которая принимает только два значения 1 и 0 с вероятностями соответственно x и $1-x$, поэтому, полагая $v(x)=x(1-x)$, получаем $\varphi(t, x)=1+x(e^{it}-1)$, которая удовлетворяет уравнению (1).

2. Биномиальное распределение с параметрами (n, p) есть распределение типа B_0. Действительно, положим $x=np$, $v(x)=$ $=x(1-x/n)$, $x\in(0, n)$, тогда $\varphi(t, x)=(1+xn^{-1}(e^{it}-1))^n$ и удовлетворяет уравнению (1).

3. Распределение Пуассона с параметром $\lambda=x$, $x>0$ есть распределение типа B. Действительно, положим $v(x)=x$, тогда $\varphi(t, x)=\exp(x(e^{it}-1))$ и удовлетворяет уравнению (1).

4. Нормальное распределение с параметрами (x, σ), $x \in (-\infty, \infty)$ есть распределение типа B. Действительно, положим $v(x) = \sigma^2$, тогда $\varphi(t, x) = \exp(itx - 0{,}5\ \sigma^2 x^2)$ и удовлетворяет уравнению (1).

5. Отрицательное биномиальное распределение с параметрами (n, p) есть распределение типа B. Действительно, положим, $x = n(1-p)$, $v(x) = x(1 + x/n)$, $x > 0$, тогда $\varphi(t, x) = (1 + xn^{-1} \times$ $\times (1 - e^{it}))^{-n}$ и удовлетворяет уравнению (1).

В частности, при $n = 1$ получим геометрическое распределение, которое есть распределение типа B.

6. Гамма-распределение с параметрами (n, x), $n > 0$, $x > 0$, есть распределение типа B. Действительно, положим $v(x) =$ $= x^2 n^{-1}$, тогда $\varphi(t, x) = (1 - itxn^{-1})^{-n}$ и удовлетворяет уравнению (1).

В частности, при $n = 1$ получим показательное распределение, которое есть распределение типа B.

7. Логарифмическое распределение с параметром p есть распределение типа B. Действительно, такое распределение имеет случайная величина ξ, которая принимает натуральные значения с вероятностями $P\{\xi = k\} = -q^k (k \ln p)^{-1}$, $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, 0 < p < 1$, $q = 1 - p$. Положим $-q(p \ln p)^{-1} = x$, $v(x) =$ $= xp^{-1} - x^2$, $x > 1$, где p находится из уравнения $p - 1 = xp \ln p$, которое имеет единственное решение при $x > 1$, ибо функция $x = x(p) = (p-1)(p \ln p)^{-1}$ монотонно убывает на промежутке $(0, 1)$. Получим $\varphi(t, x) = \ln(1 - qe^{it})/\ln p$, которая удовлетворяет уравнению (1), ибо

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -iqe^{it}/(1 - qe^{it}) \ln p, \quad v(x) \frac{\partial\varphi}{\partial x} = q \ln(1 - qe^{it})/p \ln^2 p -$$

$$- qe^{it}/(1 - qe^{it}) \ln p.$$

Теорема 1. (О структуре характеристической функции распределения типа B). Пусть: $a = a(x)$ — какая-либо первообразная функция $(v(x))^{-1}$; $x = x(a)$ — функция, обратная к функции $a(x)$; $b(x)$ — какая-либо первообразная функции $x(v(x))^{-1}$. Тогда характеристическую функцию распределения типа B можно представить в виде

$$\varphi(t, x) = \exp(b(x(a(x) + it)) - b(x)). \qquad (2)$$

Доказательство. Действительно, первые интегралы системы $\frac{dt}{i} = \frac{dx}{v(x)} = \frac{d\varphi}{-x\varphi}$ имеют вид $a(x) + it = C_1$, $b(x) + \ln\varphi = C_2$ (C_1, C_2 — произвольные постоянные), отсюда при $t = 0$ $a(x) = C_1$, $b(x) = C_2$ (ибо $\varphi(0, x) = 1$), поэтому $b(x(C_1)) - C_2 = 0$, следовательно, уравнение $b(x(a(x) + it)) - b(x) - \ln\varphi = 0$ и определяет то частное решение (2) уравнения (1), которое удовлетворяет начальному условию $\varphi(0, x) = 1\ \forall x \in X$.