

1^{er} cycle: DEUG.-IUT.-Classes préparatoires-
Écoles d'Ingénieurs - Formation permanente

Comprendre et appliquer l'électrocinétique

Le courant continu

COURS - EXERCICES

J.P. LONCHAMP

3

$V=RI$
 $P=VI$
 $R/2$
 $j=gR$
 $0=\int_{\Sigma} I=0$
 $ABco$
 dW
 dQ

MASSON ET CIE



COLLECTION « COMPRENDRE ET APPLIQUER »

Coordonnateur : G. Germain

= 3 =

COMPRENDRE ET APPLIQUER L'ÉLECTROCINÉTIQUE

LE COURANT CONTINU

par

J. P. LONCHAMP

Professeur
Président de l'Université de Metz

COURS - EXERCICES

MASSON et Cie, ÉDITEURS

120, boulevard Saint-Germain, Paris 6^e

===== 1975 =====

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays.

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article 40).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code Pénal.

© MASSON et Cie, Paris 1975

ISBN : 2-225 40920-X

Imprimé en France

COMPRENDRE ET APPLIQUER
L'ÉLECTRODINAMIQUE
LE COURANT CONTINU

CHEZ LE MÊME ÉDITEUR

Du même auteur

THERMODYNAMIQUE ET INTRODUCTION A LA PHYSIQUE STATISTIQUE. Enseignement supérieur.
1^{er} cycle. 1970, 210 pages, 88 figures.

Dans la même collection

Physique.

COMPRENDRE ET APPLIQUER LA THERMODYNAMIQUE, par H. DEMANGE, G. GERMAIN et M. NOTIN.
560 exercices, 100 tests et 25 problèmes. 1973, 288 pages, 220 figures.

COMPRENDRE ET APPLIQUER L'ELECTROSTATIQUE, par J. P. LONCHAMP. Cours et exercices.
1974, 72 pages, 111 figures.

COMPRENDRE ET APPLIQUER L'ELECTROMAGNÉTISME. *La magnétostatique*, par J. P. LONCHAMP
(1^{er} trimestre 1975).

Mathématiques.

MATHÉMATIQUES PRATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

Intégrales simples, par G. HIRSCH et J. ROUYER. 300 exercices et tests. 1974, 84 pages, 18 figures.
Equations différentielles, par G. HIRSCH (2^e trimestre 1975).

Chimie.

ABRÉGÉ DE CHIMIE. P.C.E.M.

Tome I. *Chimie générale*, par G. GERMAIN, R. MARI et D. BURNEL. 1975, 288 pages, 62 figures.

Tome II. *Chimie organique*, par V. LOPPINET et D. BURNEL (en préparation).

COMPRENDRE ET APPLIQUER LA THERMODYNAMIQUE CHIMIQUE, par H. DEMANGE, G. GERMAIN
et M. NOTIN (2^e trimestre 1975).

COMPRENDRE ET APPLIQUER LES ÉQUILIBRES EN SOLUTION, par G. GERMAIN et R. MARI (2^e trimestre 1975).

AVANT-PROPOS

Cet ouvrage est le deuxième d'une série qui couvrira l'ensemble d'un cours d'électricité du niveau de 1^{er} cycle.

L'étude de l'Electrocinétique s'appuie constamment sur des notions acquises en Electrostatique. Le lecteur aura souvent à se reporter aux résultats démontrés dans le Tome I de cette collection « Comprendre et appliquer l'Electrostatique ».

Ici encore le cours est limité à l'essentiel. Chaque chapitre est centré sur un thème précis ; l'étudiant y trouvera : les définitions, les théorèmes, les démonstrations.

Certaines remarques complémentaires non essentielles au déroulement logique de l'exposé sont renvoyés en annexe à la fin de chaque chapitre.

Les exercices d'application accompagnent chacun des chapitres. Il va de soi que le lecteur aura intérêt à essayer de résoudre le problème sans lire la solution au préalable. La sélection des problèmes proposés a été faite avec soin ; on a écarté les exercices qui ne sont que des prétextes à calculs sans rapport direct avec la physique.

En résumé, cet ouvrage veut tenir compte des capacités d'assimilation d'un étudiant de premier cycle. Il y trouvera l'essentiel ainsi que les exercices lui permettant de contrôler l'assimilation des connaissances dans l'esprit de la collection « Comprendre et appliquer ».

Remarque : Le lecteur notera la typographie utilisée dans cet ouvrage pour indiquer **les grandeurs vectorielles**. Celles-ci sont imprimées en **caractère gras** et ne sont donc pas surmontées d'une flèche.

J. P. LONCHAMP.

CONSEILS POUR BIEN RÉSOUDRE VOS PROBLÈMES

1) Lire attentivement l'énoncé. Le traduire par une ou plusieurs figures. Si les notations ne sont pas imposées, choisir des notations logiques et qui évitent des confusions (ρ peut désigner suivant le cas : une résistance, une résistivité, une densité de charges — on évitera d'appeler R une longueur dans un problème où intervient aussi une résistance). Éviter toute ambiguïté dans vos notations, pour une d.d.p. écrire $v_A - v_B$ plutôt que v .

2) Avant tout calcul, examiner les conditions de symétrie du problème (symétries dans un réseau — symétrie des lignes de courant), ces considérations de symétrie simplifient les calculs.

3) Un problème de réseau peut toujours se résoudre par plusieurs méthodes. Pensez au théorème de Thévenin qui se révèle souvent commode. Songez aussi à désigner les intensités sous une forme qui tient compte déjà des lois aux nœuds, vous gagnerez du temps.

4) Distinguer soigneusement les grandeurs scalaires et les grandeurs vectorielles que vous surmontez d'une flèche. N'égaliez jamais une grandeur scalaire avec une grandeur vectorielle. Souvenez-vous que la densité de courant $\vec{j}$ est une grandeur vectorielle et qu'il est commode de vectorialiser les éléments de surface $d\vec{S}$.

5) La connaissance parfaite des définitions est indispensable.

6) Ne mélangez pas les calculs littéraux et les calculs numériques, faire les applications numériques à la fin.

7) Vérifier systématiquement l'homogénéité de vos formules littérales, cela permet de déceler bien des erreurs.

8) Ne donnez jamais un résultat numérique sans indication d'unité. Éviter l'indication sommaire (S.I.) ou (M.K.S.A.).

9) Contrôler la vraisemblance de l'ordre de grandeur de vos résultats numériques. Rappelez-vous qu'un galvanomètre ne supporte que des courants très faibles (ordre de grandeur 10^{-8} A), et que les courants trop forts risquent de faire fondre les conducteurs.

10) Revoir un cours de mathématiques concernant les méthodes de résolution des systèmes d'équations linéaires.

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS	V
CONSEILS POUR BIEN RÉSOUDRE VOS PROBLÈMES	VI
CHAPITRE PREMIER. Le courant continu et ses caractéristiques	1
1.1. Notion de courant	1
1.2. Classification des divers types de courants	1
1.3. Régime permanent, courant continu	1
1.4. Intensité et densité de courant	2
1.5. Propriétés des régimes permanents	3
1.6. Evaluation d'une densité de courant	3
Remarques complémentaires	4
Exercices	5
CHAPITRE 2. Loi d'Ohm. Résistance	6
2.1. Remarque préliminaire	6
2.2. Loi d'Ohm	6
2.3. Interprétation physique de la loi d'Ohm	6
2.4. Quelques conséquences de la loi d'Ohm	6
2.5. Notion de résistance	8
2.6. Calcul des résistances	8
2.7. Unités	9
Remarques complémentaires	10
Exercices	11
CHAPITRE 3. Aspects énergétiques du courant électrique	16
3.1. Energie dépensée dans un tronçon de circuit	16
3.2. Loi de Joule	17
3.3. Générateur. Champ électromoteur. Force électromotrice	17
3.4. Récepteur et force contre-électromotrice	18
3.5. Lois d'Ohm et de Pouillet	19
Remarques complémentaires	19
Exercices	20
CHAPITRE 4. Etude des réseaux de conducteurs	25
4.1. Définitions et position du problème	25
4.2. Lois de Kirchhoff	25
4.3. Résistance équivalente	26
4.4. Conséquence de la linéarité des lois de Kirchhoff	27
Remarques complémentaires	29
Exercices	31
INDEX ALPHABÉTIQUE	53

1. Le courant électrique et ses caractéristiques

1.1. Notion de courant

Deux conducteurs A et B chargés, puis isolés, ont initialement des potentiels différents V_A et V_B avec par exemple $V_A > V_B$ (cf. Fig. 1.1).

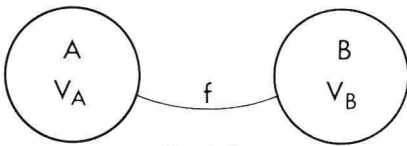


FIG. 1.1.

Réunissons A et B par un fil métallique f . On réalise ainsi un conducteur unique qui tend vers un état d'équilibre caractérisé par l'égalité des potentiels en chaque point. Cette égalisation des potentiels de A et B ne peut se faire que par un transfert de charges d'un conducteur à l'autre à travers f . Ce déplacement de charges est appelé « courant électrique ». Il est essentiellement transitoire et ne dure que le temps, très bref, nécessaire à l'égalisation des potentiels.

Dans les métaux ce sont les électrons (négatifs) qui se déplacent. Dans le cas envisagé, pour diminuer V_A (ou pour augmenter V_B) il faut transférer des électrons de B vers A . Néanmoins, on a conservé une convention qui admet que le sens d'un courant est le sens suivant lequel se déplaceraient des charges positives c'est-à-dire le sens des potentiels décroissants.

Un « courant » tel que nous venons de le décrire se manifeste par un certain nombre d'effets : effet calorifique (effet Joule), effet magnétique (déplacement d'une aiguille aimantée — expérience d'Oersted) ; cette action magnétique est liée au sens du courant et permet donc de le décélérer.

Certains de ces effets se produisent chaque fois que se produit un déplacement de charges.

D'une façon générale on appelle courant tout déplacement de charges.

1.2. Classification des divers types de courants

1.2.1. COURANT DE CONDUCTION

Les charges se déplacent dans un support matériel.

a) Dans les métaux et alliages les charges mobiles sont des électrons.

b) Dans les électrolytes, les charges mobiles sont des ions des deux signes ; il y a donc deux courants superposés, de sens opposés.

Remarque : Cette double conduction existe également dans les gaz ionisés (plasmas).

1.2.2. COURANTS DE CONVECTION

Quand on déplace un conducteur ou un isolant chargé, on crée un courant dit de convection ; il y a transport de matière en même temps que d'électricité.

L'expérience type est celle de Rowland, rotation d'un disque chargé, équivalant à un courant circulaire. Ces courants ne donnent pas lieu à effet Joule ; ils ne se manifestent que par leurs effets magnétiques.

1.2.3. COURANTS DANS LE VIDE (OU COURANTS PARTICULAIRES)

Il s'agit par exemple, de faisceaux d'électrons (rayons cathodiques, émissions photoélectriques ou thermoioniques) ou de faisceaux d'ions positifs (rayons canaux, faisceaux de protons, de deutons, etc.).

1.3. Régime permanent, courant continu

Il existe des appareils capables de maintenir une différence de potentiel (d.d.p.) permanente entre les deux conducteurs A et B reliés par un fil f dans l'expérience précédente. Un tel appareil est appelé « générateur ». Ce déséquilibre permanent entre A et B entraîne un écoulement permanent de charges à travers le fil de liaison ; cet écoulement est appelé « courant continu » ; on dit que l'on a un « régime permanent ». On notera l'analogie avec un dispositif hydraulique dans lequel un fluide s'écoule d'une façon permanente d'un réservoir A vers un réservoir B à travers un conduit f grâce à une pompe P qui joue le rôle du générateur (cf. Fig. 1.2).

La permanence du courant nécessite une suite ininterrompue de conducteurs qui forment un « circuit » électrique.

Pour préciser la notion de régime permanent — ou encore régime « stationnaire » — on dira que dans un tel régime toutes les grandeurs liées au trans-

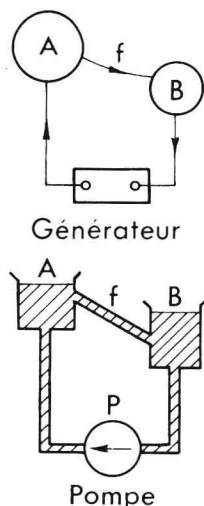
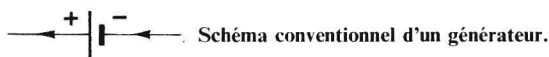


FIG. 1.2.

fert des charges sont **indépendantes du temps**. Il en est ainsi en **un point donné**, de la vitesse d'écoulement, du débit, de la densité volumique de charges ρ (ce qui exclut toute accumulation ou disparition de charges en un point donné).

Remarque : Les générateurs reposent sur des principes très différents (piles ; accumulateurs ; dynamos ; etc.). Tous possèdent deux masses conductrices appelées « **pôles** ». Celui qui est au potentiel le plus élevé est, conventionnellement, appelé **pôle +**.



1.4. Intensité et densité de courant

1.4.1. LIGNE DE COURANT

Dans un métal où circule un courant, le déplacement des électrons est très complexe. Il y a superposition d'un mouvement désordonné d'agitation thermique et d'un mouvement d'entraînement.

Pour décrire les phénomènes nous utilisons la notion de « **charge libre** » déjà utilisée en électrostatique (cf. Electrostatique 4.1). Rappelons qu'une « charge libre » est le barycentre d'une collection d'électrons de conduction contenue dans un volume très petit à notre échelle. Ces barycentres sont immobiles dans le cas d'un conducteur en équilibre ; leur mouvement est ordonné lorsqu'un courant circule.

On appelle « **ligne de courant** » les trajectoires de ces « **charges libres** ». On convient d'orienter ces lignes de courant dans le sens du mouvement des charges positives.

1.4.2. TUBE DE COURANT

On appelle « **tube de courant** » l'ensemble des lignes de courant passant à l'intérieur d'une courbe fermée.

1.4.3. INTENSITÉ

Si dans beaucoup de cas les courants circulent dans des conducteurs filiformes, ceci n'est qu'un cas particulier. Dans le cas général les courants circulent au sein d'un volume de forme quelconque dont aucune dimension n'est nécessairement petite.

Comme exemple donnons celui d'un ballon rempli de mercure ; dans ce mercure aboutissent deux pointes métalliques A et B par lesquelles entre et sort le courant (cf. Fig. 1.3).

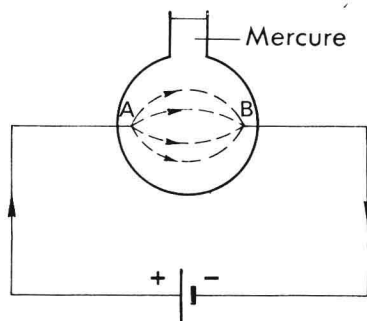


FIG. 1.3.

Soit dQ la quantité d'électricité qui pendant un temps dt traverse une surface S dans un sens donné. On appelle **intensité i du courant** à travers S la grandeur

$$i = \frac{dQ}{dt} \quad (1.1)$$

autrement dit i représente la charge qui traverse S par unité de temps.

L'unité d'intensité, unité fondamentale du système M.K.S.A., est l'**ampère (A)** défini à partir des propriétés magnétiques des courants.

1.4.4. DENSITÉ DE COURANT

Soit un tube de courant élémentaire s'appuyant sur une surface dS centrée sur M (cf. Fig. 1.4).

Désignons par di l'intensité du courant qui traverse dS .

Soit dS_n la section droite du tube en ce même point M .

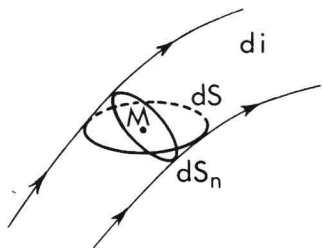


FIG. 1.4.

On appelle « **densité de courant** », j , au point M l'intensité rapportée à l'unité de surface de la section droite

$$j = \frac{di}{dS_n} \quad (1.2)$$

Il est utile de considérer cette densité comme une grandeur vectorielle $\mathbf{j}$ liée au point M . Pour caractériser ce vecteur, prenons la ligne de courant passant par M (cf. Fig. 1.5) ; le vecteur $\mathbf{j}$ est tangent en M à la ligne de courant ; son module est donné par (1.2) ; son sens est celui de la ligne de courant.

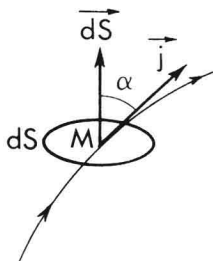


FIG. 1.5.

Associés à dS un vecteur $d\mathbf{S}$, de module dS , porté par la normale orientée par continuité avec la ligne de courant. Les deux vecteurs $\mathbf{j}$ et $d\mathbf{S}$ font un angle α . On a :

$$dS_n = dS \cos \alpha ; \quad j = \frac{di}{dS \cos \alpha} ; \quad di = j dS \cos \alpha$$

$$di = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.3)$$

On voit que l'intensité à travers un élément de surface s'identifie avec le flux du vecteur densité à travers cet élément dS .

Il en est encore ainsi pour une surface S quelconque ; i à travers S est la somme des intensités

élémentaires di (ceci découle de la définition même d'une intensité)

$$i(S) = \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.4)$$

L'intensité à travers une surface S est le flux du vecteur densité de courant à travers S .

Remarque : Les densités de courant s'expriment en ampère/mètre² (A/m²).

1.5. Propriétés des régimes permanents

Soit Σ une surface fermée ; comme en régime permanent il ne peut y avoir ni accumulation, ni disparition de charges, il faut que les charges qui entrent dans Σ soient compensées par celles qui en sortent. L'intensité à travers Σ dans un sens donné, par exemple de l'intérieur vers l'extérieur, est donc nulle ; il découle de (1.4) que le flux de $\mathbf{j}$ sortant par Σ est nul, lui aussi ; en d'autres termes : le flux du vecteur $\mathbf{j}$ est, en régime permanent, un flux conservatif.

On sait que la condition mathématique de flux conservatif est : $\text{div } \mathbf{j} = 0$ (cf. Electrostatique 3.5.3). Il découle de ce résultat (cf. Electrostatique 3.5.1) que le flux de $\mathbf{j}$ à travers une section quelconque d'un tube de courant est invariant. Il en sera donc de même pour l'intensité dans un tel tube de courant.

Un circuit étant un ensemble de tubes de courant, **on peut dire que l'intensité i est invariante tout le long d'un circuit.**

Par définition du régime permanent l'intensité à travers une section S quelconque d'un circuit en régime permanent (courant continu) est indépendante du temps : $i = \text{cst} = I$. On peut donc intégrer la relation (1.1) pour avoir :

$$Q = It \quad (1.5)$$

La charge qui traverse une section d'un circuit est proportionnelle au temps.

1.6. Evaluation d'une densité de courant

Utilisons un modèle simple. On suppose qu'il y a un seul type de « charges libres » de charge q chacune, au nombre de n par unité de volume au voisinage d'un point M ; elles ont toutes la même vitesse $\mathbf{v}$.

Pendant le temps dt , l'élément de surface dS est traversé par toutes les charges mobiles contenues dans un cylindre oblique de base dS et de longueur $v dt$ (en effet $v dt$ est le chemin parcouru par

une charge mobile durant le temps dt). Ce cylindre (cf. Fig. 1.6) a pour volume

$$v dt \cos \theta dS = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} dt ;$$

il contient une charge mobile $dQ = nq\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} dt$.

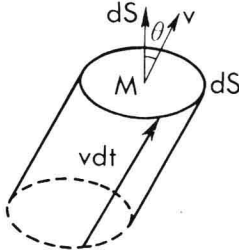


FIG. 1.6.

L'intensité à travers dS est :

$$di = \frac{dQ}{dt} = nq\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} . \quad (1.6)$$

Par définition de $\mathbf{j}$ (cf. (1.3)) $di = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$, d'où :

$$\mathbf{j} = nq\mathbf{v} . \quad (1.7)$$

Remarque : nq représente la densité volumique de charges mobiles ρ_m ; $nq = \rho_m$:

$$\mathbf{j} = \rho_m \mathbf{v} . \quad (1.7bis)$$

Remarques complémentaires

RC 1.1. Généralisation du calcul d'une densité de courant. — Examinons le cas de plusieurs types de porteurs avec des vitesses différentes.

Par unité de volume il y a n_i porteurs de charge q_i animés d'une même vitesse $\mathbf{v}_i$; ces porteurs apportent à l'intensité une contribution donnée par (1.6).

L'intensité totale s'obtient par addition de ces contributions, c'est-à-dire :

$$dI = \sum_i n_i q_i \mathbf{v}_i \cdot d\mathbf{S} = d\mathbf{S} \cdot \sum_i n_i q_i \mathbf{v}_i$$

il en résulte que

$$\mathbf{j} = \sum_i n_i q_i \mathbf{v}_i .$$

Reprenons le cas d'un métal et considérons la totalité des électrons mobiles, au nombre de N par unité de volume, de charge $q_i = -e$. Regroupons ces électrons en classes de vitesse sensiblement constante ; soient donc n_i le nombre d'électrons ayant une vitesse $\mathbf{v}_i$ on a alors $\mathbf{j} = -e \sum n_i \mathbf{v}_i$.

Introduisons la vitesse moyenne des électrons

$$\mathbf{u} = \frac{\sum n_i \mathbf{v}_i}{\sum n_i} = \frac{\sum n_i \mathbf{v}_i}{N} .$$

On a

$$\mathbf{j} = -eN\mathbf{u} .$$

Dans un conducteur en équilibre la distribution des vitesses est isotrope donc $\mathbf{u} = 0 \Rightarrow \mathbf{j} = 0$. Lorsque $\mathbf{u} \neq 0$, $\mathbf{u}$ représente une vitesse moyenne d'entraînement.

RC 1.2. Théorème de la divergence de $\mathbf{j}$. — Soit une surface fermée Σ délimitant un volume $\mathcal{V}$. Ce volume

contient une charge totale mobile

$$Q' = \iiint_{\mathcal{V}} \rho_m d\tau .$$

Désignons par I_Σ l'intensité du courant qui sort à travers Σ ; cette intensité est par définition égale à la diminution correspondante de Q'

$$I_\Sigma = -\frac{dQ'}{dt} = -\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} d\tau . \quad (i)$$

L'intensité étant le flux de la densité :

$$I_\Sigma = \iint_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} .$$

Le théorème de Green permet d'écrire (cf. Electrostatique RC 3.1) :

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \mathbf{j} d\tau . \quad (ii)$$

En comparant les relations (i) et (ii) il vient :

$$\text{div } \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t} .$$

Lorsque le régime est permanent ρ_m est indépendant de t c'est-à-dire que $\partial \rho_m / \partial t = 0$ donc $\text{div } \mathbf{j} = 0$.

EXERCICES

E 1.1. (Question classique, illustre la notion d'intensité)

Un disque chargé uniformément avec une densité superficielle de charge σ est animé d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire ω . Une couronne circulaire de rayon r et de largeur dr peut être assimilée à un « courant circulaire » dont on demande d'évaluer l'intensité.

Solution

Imaginons une surface fictive dS telle que la couronne passe à l'intérieur de dS . La couronne porte une charge $dq = \sigma 2\pi r dr$.

Si le disque effectue v tours par seconde, une charge totale $v dq$ traverse dS en une seconde ce qui représente l'intensité di à travers dS

$$di = v \sigma 2\pi r dr = \sigma \omega r dr.$$

E 1.2. (Application numérique, fixe bien les ordres de grandeur)

Le cuivre a une masse atomique 63,5 et une masse volumique de $9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. En admettant que chaque atome fournit un électron de conduction, calculer la

vitesse du courant électronique de 10 A dans un fil de cuivre de 1 mm^2 de section, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; N_A (Avogadro) = $6 \cdot 10^{26}$ (M.K.S.).

Solution

Le nombre n d'électrons de conduction par m^3 est :

$$n = \frac{6 \cdot 10^{26} \times 9 \cdot 10^3}{63,5} = 8,5 \cdot 10^{28}.$$

La densité de charges mobiles est :

$$\rho_m = ne = 13,6 \cdot 10^9 \text{ C/m}^3$$

la densité de courant est

$$j = \frac{10}{10^{-6}} = 10^7 \text{ A/m}^2$$

comme

$$j = \rho_m v \Rightarrow v = \frac{10^7}{13,6 \cdot 10^9} = 7,4 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}.$$

On remarquera qu'il s'agit d'une vitesse faible !

2. Loi d'Ohm. Résistance

2.1. Remarque préliminaire

Nous admettons que le responsable du mouvement des charges est un champ $\mathbf{E}$ de même type que celui décrit en électrostatique, c'est-à-dire qu'il dérive d'un potentiel, qu'il obéit à l'équation de Poisson, etc.

Nous supposons les conducteurs homogènes, isotropes, à température uniforme et parcourus par des courants continus.

2.2. Loi d'Ohm

Il existe une catégorie importante de conducteurs qui satisfont à une relation locale simple entre le champ $\mathbf{E}$ responsable du courant et la densité $\mathbf{j}$ de ce courant. Il s'agit d'une relation de proportionnalité appelée « loi d'Ohm »

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.1)$$

La constante σ , indépendante de j et E , est appelée « **conductivité** » du milieu. Son inverse est appelé « **résistivité** ».

Insistons sur le fait que la loi d'Ohm ne fait que traduire une propriété de certains conducteurs (ces conducteurs sont dits « linéaires » ou « ohmiques ») ; elle n'est pas une loi générale de l'électricité comme la loi de Gauss par exemple.

Signalons que les métaux suivent parfaitement la loi d'Ohm, même pour les champs les plus intenses que l'on sache réaliser en laboratoire.

σ dépend du conducteur et de la température.

2.3. Interprétation physique de la loi d'Ohm

Sous l'action d'un champ $\mathbf{E}$ une charge q est soumise à une force électrique

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E} \quad (2.2)$$

Pour un champ constant (lié à une d.d.p. constante) le mouvement des charges devrait aller en s'accélégrant. Or en régime permanent le déplacement des charges se fait à vitesse constante. Pour cela il faut admettre l'intervention d'une autre force qui s'oppose à la force électrique. L'hypothèse la plus simple consiste à faire intervenir une force de « frottement » $\mathbf{f}'$

opposée et proportionnelle à $\mathbf{v}$ (frottement du type visqueux)

$$\mathbf{f}' = -k\mathbf{v} \quad (2.3)$$

La charge atteint la vitesse limite v lorsque $\mathbf{f} + \mathbf{f}' = 0$. On déduit de (2.2) et (2.3) que :

$$\mathbf{v} = \frac{q}{k} \mathbf{E} \quad (2.4)$$

Comme $\mathbf{j} = \rho_m \mathbf{v}$ (cf. (1.7bis)) on a alors

$$\mathbf{j} = \rho_m \frac{q}{k} \mathbf{E}$$

ce qui exprime bien la proportionnalité entre $\mathbf{j}$ et $\mathbf{E}$ dans la mesure où la densité de charges mobiles ρ_m peut être considérée comme constante.

Toutes ces considérations ne constituent pas une démonstration de la loi d'Ohm qui en fin de compte est un postulat.

Remarque : La proportionnalité entre $\mathbf{v}$ et $\mathbf{E}$ (cf. (2.4)) peut se mettre sous la forme

$$\mathbf{v} = \mu \mathbf{E} \quad (2.4bis)$$

Le coefficient μ est appelé « **mobilité** » des charges en mouvement.

2.4. Quelques conséquences de la loi d'Ohm

2.4.1. LIGNES DE COURANT ET LIGNES DE CHAMP

Les lignes de courant (tangentes en chaque point au vecteur $\mathbf{j}$) **coïncident avec les lignes de champ** (tangentes en chaque point au vecteur $\mathbf{E}$) ; ceci résulte du fait que $\mathbf{j}$ et $\mathbf{E}$ ont même direction et même sens.

2.4.2. LOI D'OHM ET RÉGIME PERMANENT

En régime permanent $\text{div } \mathbf{j} = 0$ entraîne $\text{div } \mathbf{E} = 0$ donc $\Delta V = 0$ et $\rho = 0$ (revoir les relations de l'électrostatique (3.10) et (3.10bis)).

Comme en électrostatique, la relation $\rho = 0$ signifie qu'au sein d'un volume donné il y a compensation exacte entre les charges + et les charges -.

Cet équilibre n'est pas affecté par la circulation des charges ; ce qui pénètre dans un volume donné est compensé par ce qui en sort.

2.4.3. EQUATIONS DE PASSAGE A LA SURFACE DE SÉPARATION DE DEUX CONDUCTEURS DE NATURE DIFFÉRENTE

Nous caractérisons par les indices (1) et (2) les grandeurs relatives aux deux milieux.

Soient deux couples de points AB et $A'B'$ situés de part et d'autre du plan tangent et infiniment près de celui-ci (cf. Fig. 2.1). $AB = A'B' = dl$ sont parallèles à ce plan.

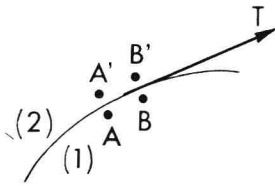


FIG. 2.1.

De part et d'autre de la surface de séparation, les composantes du champ selon AB et $A'B'$ sont désignées respectivement par $E_{1,T}$ et $E_{2,T}$:

$$E_{1,T} = - \frac{dV_{AB}}{dl} ; \quad E_{2,T} = - \frac{dV_{A'B'}}{dl} .$$

En raison de la continuité du potentiel $V_A = V_{A'}$ et $V_B = V_{B'}$, donc $dV_{AB} = dV_{A'B'}$ et

$$E_{1,T} = E_{2,T} . \quad (2.5)$$

On dit qu'il y a **conservation de la composante tangentielle du champ**.

Considérons un élément de surface dS et deux tubes de courant s'appuyant sur dS respectivement dans chaque milieu (cf. Fig. 2.2).

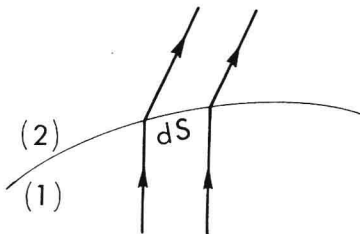


FIG. 2.2.

L'intensité à travers dS est la même pour les deux tubes ; on peut donc écrire

$$\mathbf{j}_1 \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{j}_2 \cdot d\mathbf{S}$$

ou encore

$$j_{1,N} dS = j_{2,N} dS$$

$j_{1,N}$ et $j_{2,N}$ désignent les composantes normales de $\mathbf{j}_1$ et $\mathbf{j}_2$

$$j_{1,N} = j_{2,N} . \quad (2.6)$$

On dit qu'il y a **conservation de la composante normale de la densité de courant**.

D'après la loi d'Ohm :

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{j}_1}{\sigma_1} ; \quad \mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{j}_2}{\sigma_2} .$$

La conservation de la composante tangentielle de $\mathbf{E}$ donne :

$$\frac{j_1 \sin \alpha_1}{\sigma_1} = \frac{j_2 \sin \alpha_2}{\sigma_2} \quad (\text{cf. Fig. 2.3}) .$$

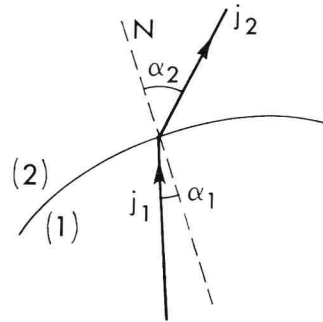


FIG. 2.3.

La conservation de la composante normale de $\mathbf{j}$ donne

$$j_1 \cos \alpha_1 = j_2 \cos \alpha_2 .$$

Divisons membre à membre les deux dernières relations, il vient :

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad (2.7)$$

cette relation détermine la **réfraction des lignes de champ et de courant**.

Examinons quelques cas particuliers (cf. Fig. 2.4).

a) Supposons que (2) soit un isolant parfait (vide par exemple) c'est-à-dire $\sigma_2 = 0$ et $j_2 = 0$; comme $j_{2,N} = 0$ on a aussi $j_{1,N} = 0$ donc $j_1 = j_{1,T}$; cela signifie que **les lignes de courant arrivent tangentiellement à la surface d'un conducteur en contact avec un isolant parfait**.



FIG. 2.4.

b) Supposons que (2) soit un mauvais conducteur par rapport à (1) bon conducteur (contact isolant-métal) ; le rapport σ_1/σ_2 est alors grand (peut atteindre 10^{19} !), la relation (2.7) sera satisfaite avec $\alpha_1 \simeq \pi/2$ et $\alpha_2 \simeq 0$; cela signifie que **les lignes de courant** (donc aussi les lignes de champ) **sont à peu près normales à la surface du bon conducteur**.

2.5. Notion de résistance

Soit une portion finie d'un conducteur comprise entre 2 surfaces équipotentielles A et B caractérisées par les potentiels V_A et V_B (dans certains cas A et B constituent des « électrodes », celles-ci peuvent à la limite être quasi ponctuelles).

Nous supposons que le déplacement des charges est dû uniquement à un champ du type électrostatique dans lequel est vérifié la loi d'Ohm, $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$.

Désignons par Σ une surface traversée par toutes les lignes de courant qui se rendent de A en B .

Soit I l'intensité du courant à travers Σ .

Démontrons que le rapport $(V_A - V_B)/I$ est constant lorsque $V_A - V_B$ et I varient. Ce résultat se démontre à partir du théorème de superposition (cf. Electrostatique 6.3). Multiplions par un scalaire λ chacun des potentiels V_A et V_B donc aussi la d.d.p. $(V_A - V_B)$; en chaque point le champ $\mathbf{E}$ se trouve multiplié par ce même scalaire λ donc aussi les vecteurs densités $\mathbf{j}$ (car $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$).

L'opération ne change pas la forme des équipotentielles ni par conséquent celle des lignes de courant. Le flux de $\mathbf{j}$, c'est-à-dire I , à travers Σ est donc lui aussi multiplié par λ . Par suite le rapport $(V_A - V_B)/I$ reste constant.

Ce rapport est appelé par définition la **résistance R du conducteur entre A et B**

$$\boxed{\frac{V_A - V_B}{I} = R} \quad (2.8)$$

Le produit RI est appelé « **chute ohmique de tension** ».

2.6. Calcul des résistances

Dans le cas général d'un conducteur de forme quelconque le calcul des résistances est compliqué. Nous nous bornerons à quelques cas simples.

2.6.1. RÉSISTANCE D'UN FIL CYLINDRIQUE

Soit un conducteur cylindrique de longueur L , de section S (forme quelconque) (cf. Fig. 2.5). Imposons aux sections terminales A et B des potentiels V_A et V_B . Par raison de symétrie les lignes de courant (donc aussi les lignes de champ) sont des droites parallèles aux génératrices. Les surfaces équipotentielles sont les sections droites. Nous les repérons par leur abscisse x comptée sur un axe parallèle aux génératrices.

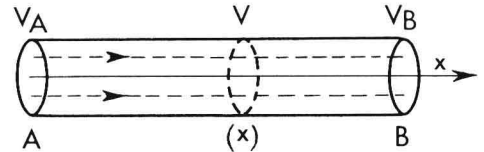


FIG. 2.5.

V fonction de la seule variable x obéit à l'équation de Laplace $\Delta V = 0$ qui se réduit ici à $d^2V/dx^2 = 0$ donc $dV/dx = \text{cst}$; comme $E = -dV/dx$, E est constant et le champ de $\mathbf{E}$ (comme le champ de $\mathbf{j}$) sont des champs uniformes. La circulation du champ $\mathbf{E}$ entre A et B a pour expression $EL = V_A - V_B$.

L'intensité I à travers une section droite quelconque est

$$I = \Sigma \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = jS \quad \text{avec} \quad j = \sigma E \quad \frac{V_A - V_B}{I} = \frac{EL}{\sigma ES} = \frac{L}{\sigma S}.$$

La résistance du fil cylindrique est donc

$$\boxed{R = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{S} = \rho \frac{L}{S}} \quad (2.9)$$

$\rho = 1/\sigma$ = résistivité du conducteur.

2.6.2. RÉSISTANCES EN SÉRIE

Des conducteurs placés bout à bout sont dits montés en série. Il résulte de l'additivité des tensions que la **résistance de l'ensemble est égale à la somme des résistances en série**.

2.6.3. EXTENSION DU RÉSULTAT PRÉCÉDENT

Le fil de section constante n'est plus rectiligne mais forme un enroulement quelconque avec une

courbure faible par rapport au diamètre ; ce fil peut être considéré comme formé par l'association en série de petits éléments cylindriques et rectilignes de longueur dL dont les résistances s'ajoutent

$$R = \rho \frac{1}{S} \Sigma dL = \rho \frac{L}{S}.$$

La relation (2.9) s'applique donc encore à ce cas.

2.6.4. RÉSISTANCE D'UN TUBE DE COURANT

Un tel tube (cf. Fig. 2.6) peut être assimilé à un fil conducteur de section lentement variable. Le tube peut être décomposé en éléments de longueur dL de section dS placés en série. Chaque élément a une résistance

$$dR = \rho \frac{dL}{dS}.$$

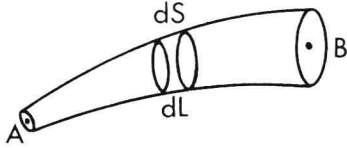


FIG. 2.6.

La résistance totale a donc pour expression :

$$R = \rho \int_A^B \frac{dL}{dS} \quad (2.10)$$

dS est ici une grandeur variable. Pour calculer R il faut connaître la loi de variation de dS .

2.6.5. CALCUL DE LA RÉSISTANCE D'UN CONDUCTEUR PLACÉ ENTRE DEUX ÉLECTRODES FORMANT UN CONDENSATEUR

Précisons nos hypothèses : le conducteur placé entre les électrodes a une conductivité faible par rapport à celle des électrodes.

On a vu (cf. 2.4.3) que dans ces conditions les lignes de courant sont normales aux électrodes qui sont équipotentielles. Désignons par V_1 et V_2 ces potentiels constants en supposant $V_1 > V_2$ (cf. Fig. 2.7) (dans cette figure nous n'avons représenté qu'une partie du condensateur).

Désignons par Σ une surface fermée tracée entre les électrodes. Soit I l'intensité du courant continu à travers Σ . On a alors

$$I = \iint_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \sigma \iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.11)$$

(en vertu de la loi d'Ohm).

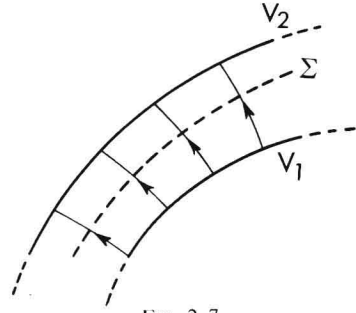


FIG. 2.7.

Considérons maintenant le système formé par les électrodes précédentes mais placées dans le vide ; elles sont maintenues aux potentiels constants V_1 et V_2 .

La distribution des potentiels est la même que dans le système précédent car dans les deux cas V obéit à l'équation $\Delta V = 0$ et les conditions aux limites sont identiques. Le champ est donc lui aussi le même. Le flux de $\mathbf{E}$ à travers Σ est, en vertu du théorème de Gauss :

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2.12)$$

Q = charge de l'électrode interne (potentiel V_1).

Pour ce condensateur, $Q = C_0(V_1 - V_2)$:

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{C_0}{\epsilon_0} (V_1 - V_2). \quad (2.13)$$

Le rapprochement des relations (2.11) et (2.13) permet d'écrire

$$I = \frac{\sigma C_0}{\epsilon_0} (V_1 - V_2). \quad (2.14)$$

D'où la valeur de la résistance

$$R = \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{\epsilon_0}{\sigma C_0}. \quad (2.15)$$

Cette relation permet de calculer certaines résistances « **résistance de fuite** » en utilisant des résultats établis en électrostatique.

2.7. Unités

2.7.1. UNITÉ DE RÉSISTANCE

Elle dérive de celle d'intensité et de d.d.p. par la relation $R = \frac{V_A - V_B}{I}$. $R = 1$ pour $V_A - V_B = 1$ et $I = 1$; aux termes du décret du 3 mai 1961 l'unité