ISSN 0131-6982

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

36
1987

И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Т. Г. ШЕВЧЕНКО

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

РЕСПУБЛИКАНСКИЙ
МЕЖДУВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ СБОРНИК

ОСНОВАН В 1970 г.

ВЫПУСК 36

КИЕВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ КИЕВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ
«ВИЩА ШКОЛА»
1987

УДК 519.21

В сборнике публикуются статьи, в которых изучаются предельные теоремы для случайных процессов, законы больших чисел, субгауссовские процессы, локальные свойства случайных полей, специальные классы марковских процессов, многопараметрическое броуновское движение, задачи проверки статистических гипотез, свойства вероятностных распределений.

Для специалистов по теории вероятностей, аспирантов и студентов, а также для лиц, интересующихся приложениями теории вероятностей и математической статистики.

Адрес редакционной коллегии: 252001, Киев-1, ГСП, ул. Владимирская, 64, Киевский университет, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей и математической статистики, тел. 66-23-37.

Редакция естественной литературы

Зав. редакцией Б. Н. Фляшников

Т $\dfrac{1702060000\text{-}006}{М224(04)\text{-}87}$ 490-87

УДК 519.21

Б. В. БОНДАРЕВ, канд. физ.-мат. наук, Донец. ун-т

О ПРОВЕРКЕ СЛОЖНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ. I

Пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — независимые наблюдения над случайной величиной ξ с некоторой функцией распределения $F(x)$. Рассмотрим задачу проверки гипотезы о принадлежности $F(x)$ семейству непрерывных функций распределения [1] $\mathfrak{F} = \{F(x, \theta);\ \theta \in \Theta \subset R^m,\ x \in R^1\}$. Гипотеза справедлива, если существует $\nu_0 \in \Theta$ такое, что $F(x) = F(x, \theta_0)$. Применение для этой цели критерия χ^2 нередко встречает затруднения. Как отмечалось [2], использование этого метода в случае непрерывного по x семейства $\mathfrak{F}$ требует предварительного объединения наблюдаемых значений в последовательные и до известной степени произвольные интервалы. Тем самым оценка приобретает несколько условный характер. При наличии крайних, обычно малочисленных групп, оценка по этому методу бывает малопоказательна из-за большой дисперсии величины χ_k^3. Сама группировка данных [3, с. 589] связана с потерей имеющейся в первоначальных данных информации. В некоторых случаях при просмотре знаков получившихся отклонений наблюденного распределения от теоретического обнаруживается расхождение с проверяемой гипотезой даже тогда, когда χ_k^2 не попадает в критическую область. В силу сказанного имеет смысл рассмотреть некоторые другие меры уклонения эмпирической функции распределения от гипотетической при зависимости последней от неизвестных параметров.

Пусть $\omega_n^2(\theta_n) = n \int\limits_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x, \theta_n)]^2\, dF_n(x)$, где $F_n(x)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по выборке $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $\theta_n = \theta_n\{x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая оценка неизвестного истинного значения параметра θ_0 в предположении принадлежности распределения $F(x)$ семейству $\mathfrak{F}$.

Известно [4], что предельное распределение статистики $\omega_n^2(\theta_n)$ в общем случае зависит от θ_0, и пользоваться стандартными таблицами распределения ω^2 для проверки сложных статистических гипотез нельзя. Вместе с тем из работ [5, 6] следует справедливость неравенства

$$\lim_{n\to\infty} P\{\omega_n^2(\theta_n) > r\} \leqslant \lim_{n\to\infty} P\{\omega_n^2 > r\} = P\{\omega^2 > r\},$$

где ω^2 — предельное значение статистики ω_n^2 в случае простой гипотезы.

Этот факт справедлив при оценке максимального правдоподобия, байесовских, а также некоторых других оценок. Таким образом, при заданном уровне значимости α критический уровень r_α для предельного значения статистики $\omega_n^2(\theta_n)$ ниже, чем ω_n^2. Д. М. Чибисов отметил важность следующей задачи: оценить смещение $\omega^2(\theta_0)$ к нулю по сравнению с ω^2. Решение этой задачи позволило бы установить собственный критический уровень статистики $\omega_n^2(\theta_n)$, что существенно при малом числе наблюдений. Настоящая статья представляет собой попытку продвинуться в решении этой задачи.

1. Представление предельного значения статистики. Пусть θ — m-мерный параметр, принадлежащий Θ—компактному множеству в R^m, истинное значение оцениваемого параметра θ_0 — внутренняя точка компакта Θ, θ_n — оценка, доставляющая минимум $\omega_n^2(\theta)$.

Теорема 1. Пусть $F(x, \theta)$ дифференцируема по θ при всех x и $\theta \in \Theta$, имеет непрерывную по θ производную $F'_\theta(x, \theta)$, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial F}{\partial \theta}(x, \theta'')\right|^2 dF(x, \theta') < \infty \quad \text{для всех } \theta', \theta'' \in \Theta,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial F}{\partial \theta}(x, \theta'') - \frac{\partial F}{\partial \theta}(x, \theta')\right|^2 dF(x, \theta') \to 0 \quad \text{при } |\theta'' - \theta'| \to 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x, \theta) - F(x, \theta_0)|^2 \, dF(x, \theta_0) > 0 \quad \text{при } \theta \neq \theta_0$$

и существует матрица $B^{-1}(\theta)$, обратная к $B(\theta)$, элементы которой

$$b_{ij}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F}{\partial \theta_i}(x, \theta) \frac{\partial F}{\partial \theta_j}(x, \theta) \, dF(x, \theta), \quad i, j = \overline{1, m}.$$

Тогда имеет место представление

$$\sqrt{n}\,[\theta_n - \theta_0] = B^{-1}(\theta_0) \int_{-\infty}^{\infty} Y_n(x) \frac{\partial F^*}{\partial \theta}(x, \theta_0) \, dF(x, \theta_0) + r_n, \qquad (1)$$

где $r_n \xrightarrow{P} 0$, $n \to \infty$, знак $*$ означает транспонирование, $Y_n(x) = \sqrt{n}\,[F_n(x) - F(x, \theta_0)]$.

Доказательство состоит в проверке условий соответствующей теоремы из работы [7], в силу которой оценка θ_n, полученная по методу минимума $\omega_n^2(\theta)$, является состоятельной оценкой θ_0, а

$$F(x, \theta_n) - F(x, \theta_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial \theta}(x, \theta_0), [\theta_n - \theta_0](1 + \rho_n)\right),$$

$$\rho_n \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty,$$

и в последующем представлении решения системы уравнений, полученных в результате дифференцирования $\omega_n^2(\theta)$ по θ.

Замечание 1. В большинстве случаев нахождение оценки θ_n в явном виде весьма затруднительно. Вместе с тем известно [8], что при некоторой регулярности семейства функций распределения θ_n' произвольную $\sqrt{n}$-состоятельную оценку параметра θ_0 можно преобразовать так, чтобы она была асимптотически эквивалентна θ_n.

Лемма. Пусть выполнены условия теоремы 1, кроме того, любая смешанная производная третьего порядка по θ_i, $i=\overline{1,m}$ функции $F(x,\theta)$ в точке θ' абсолютно интегрируема по мере $F(x,\theta'')$ θ', $\theta''\in\Theta$. Тогда оценка

$$\theta_n'' = \theta_n' + \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x,\theta_n')]\, B^{-1}(\theta_n')\, \frac{\partial F^*}{\partial\theta}(x,\theta_n')\, dF_n(x) \qquad (2)$$

асимптотически эквивалентна θ_n, т. е. $\sqrt{n}\,|\theta_n - \theta_n''| \xrightarrow{P} 0$ при $n\to\infty$ (θ_n' — произвольная $\sqrt{n}$-состоятельная оценка θ_0).

Доказательство состоит в проверке условий леммы 1 из работы [8]. Пусть $u_n(x,\theta_n)=\sqrt{n}\,[F_n(x)-F(x,\theta_n)]$, θ_n — оценка неизвестного параметра, полученная по методу минимума $\omega_n^2(\theta)$, $t_k=F(x_k,\theta_0)$, $G_n(t)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по $\{t_k\}$, $k=\overline{1,n}$, $t=F(x,\theta_0)$. Сделав в $u_n(x,\theta_n)$ стандартную замену, получаем с учетом разложения $F(x,\theta_n)-F(x,\theta_0)$ в ряд окрестности θ_0

$$u_n(t,\theta_0) = Y_n(t) - (g(t,\theta_0),\ \sqrt{n}\,[\theta_n-\theta_0]) + \rho_n, \qquad (3)$$

где $Y_n(t)=\sqrt{n}\,[G_n(t)-t]$, $\rho_n \xrightarrow{P} 0$ при $n\to\infty$ в силу состоятельности θ_n,

$$g(t,\theta_0) = \frac{\partial F}{\partial\theta}(F^{-1}(t,\theta_0),\theta)\,|_{\theta=\theta_0}.$$

Учитывая представление (2), нетрудно убедиться в том, что процесс $u_n(t,\theta_n)$ слабо сходится к процессу

$$u(t,\theta_0) = Y(t) - g(t,\theta_0)\,B^{-1}(\theta_0)\int_0^1 g^*(s,\theta_0)\,Y(s)\,ds,$$

где $Y(t)=w(t)-tw(1)$—броуновский мост. Таким образом, распределение статистики

$$\omega_n^2(\theta_n) = \int_0^1 u_n^2(t,\theta_n)\,dG_n(t)$$

сходится при $n\to\infty$ к распределению величины

$$\omega^2(\theta_0) = \int_0^1 Y^2(t)\,dt - \int_0^1\int_0^1 g(t,\theta_0)\,B^{-1}(\theta_0)\,g^*(s,\theta_0)\,Y(t)\,Y(s)\,dt\,ds.$$

2. Оценка смещения $\omega^2(\theta_0)$. В силу того что $B(\theta_0)$ положительно определена, найдется единственный положительный квадратный корень $B^{1/2}(\theta_0)$, являющийся самосопряженным оператором. Определив $f(t, \theta_0)$ соотношением $f^*(t, \theta_0) = B^{-1/2}(\theta_0) g^*(t, \theta_0)$, запишем $g(t, \theta_0) B^{-1}(\theta_0) g^*(s, \theta_0) = (f(t, \theta_0) = f(s, \theta_0))$. Пусть $f(t, \theta_0) = \{f_1(t, \theta_0), \ldots, f_m(t, \theta_0)\}$, $f_l(t, \theta_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^l(\theta_0)\sqrt{2}\sin i\pi t$, $l = \overline{1, m}$ — разложение по базису $\{\sqrt{2}\sin i\pi t\}$, $t \in [0, 1]$. Тогда

$$\omega^2(\theta_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2}{i^2\pi^2} - \sum_{l=1}^{m}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_i\xi_j}{ij\pi^2}\alpha_i^l(\theta_0)\alpha_j^l(\theta_0),$$

ξ_i — независимые $N(0, 1)$ распределенные случайные величины.

Теорема 2. Справедлива оценка

$$P\{\omega^2(\theta_0) > r\} \leqslant e^{-zr}\prod_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{2z}{i^2\pi^2}\right)^{-1/2} \times$$

$$\times\left[1 + 2z\int_0^1\int_0^1 R(t, s) g(t, \theta_0) B^{-1}(\theta_0) g(s, \theta_0) dt ds\right]^{-1/2}, \qquad (4)$$

где $R(t, s) = \min(t, s) - ts$, $0 < z < \frac{\pi^2}{2}$.

Доказательство. Рассмотрим «усеченную» квадратичную форму

$$\zeta_n^2(\theta_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i^2}{i^2\pi^2} - \sum_{l=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\xi_i\xi_j}{ij\pi^2}\alpha_i^l(\theta_0)\alpha_j^l(\theta_0).$$

Для нее

$$Me^{z\zeta_n^2(\theta_0)} = \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{2z}{i^2\pi^2}\right)^{-1/2}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{R^n} e^{-\frac{|y|^2}{2} - z\sum_{l=1}^{m}(A_l^n y, y)} dy. \qquad (5)$$

Элементами симметричных положительно-определенных матриц A_l^n, $l = \overline{1, m}$ служат величины

$$a_i^l a_j^l = \frac{\alpha_i^l(\theta_0)\alpha_j^l(\theta_0)}{ij\pi^2}\left(1 - \frac{2z}{i^2\pi^2}\right)^{-1/2}\left(1 - \frac{2z}{j^2\pi^2}\right)^{-1/2}.$$

Ранг матрицы A_l^n равен 1.

Алгоритм вычисления интеграла в правой части (5) состоит в следующем: ортогональным преобразованием V_1 квадратичную форму $(A_1^n y, y)$ приводим к виду $(A_1^n y, y) = \mathrm{sp}\, A_1^n y_1^2$, а квадратичные формы $(A_l^n y, y)$, $l = \overline{2, m}$ — к виду

$$(V_1^T A_l^n V_1 y, y), \quad (V_1 y, V_1 y) = |y|^2.$$

Сделав под интегралом замену

$$y_1 \sqrt{1 + 2z \operatorname{sp} A_1^n} = u_1, \quad y_k = u_k, \quad k = \overline{2, m},$$

запишем

$$Me^{z\zeta_n^2(\theta_0)} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{2z}{k^2\pi^2}\right)^{-1/2} (1 + 2z \operatorname{sp} A_1^n)^{-1/2} \times$$

$$\times \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{R^n} \exp\left\{-\frac{|u|^2}{2} - z \sum_{l=2}^{n} (DV_1^T A_l^n V_1 D_1 u, u)\right\} du,$$

где D_1 — диагональная матрица с $d_{11}^1 = (1 + 2z \operatorname{sp} A_1^n)^{-1/2}$, $d_{22}^1 = \ldots$ $\ldots = d_{nn}^1 = 1$.

Заметим, что под интегралом в показателе экспоненты на одну квадратичную форму меньше, чем вначале. Матрица $D_1 V_1^T A_2^n V_1 D_1$ сохраняет структуру элементов вида $c_i c_j$, таким образом ранг $D_1 V_1^T A_2^n V_1 D_1$ также равен 1. Нетрудно заметить, что единственное отличное от нуля собственное значение матрицы есть

$$\operatorname{sp} D_1 V_1^T A_2^n V_1 D_1 \geqslant \frac{\operatorname{sp} A_2^n}{1 + 2z \operatorname{sp} A_1^n}.$$

Сделав в очередной раз замену переменных под знаком интеграла, получим в показателе экспоненты еще на одну квадратичную форму меньше. После m подобных процедур

$$Me^{z\zeta_n^2(\theta_0)} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{2z}{k^2\pi^2}\right)^{-1/2} (1 + 2z \operatorname{sp} A_1^n) \times$$

$$\times \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 + 2z \operatorname{sp} \prod_{i=1}^{k-1} D_i V_i^T A_k^n \prod_{i=1}^{k-1} V_i D_i\right)^{-1/2}.$$

В силу того, что

$$\operatorname{sp} \prod_{i=1}^{k-1} D_i V_i^T A_k^n \prod_{i=1}^{k-1} V_i D_i \geqslant \frac{\operatorname{sp} \prod_{i=1}^{k-2} D_i V_i^T A_k^n \prod_{i=1}^{k-2} V_i D_i}{1 + 2z \operatorname{sp} \prod_{i=1}^{k-2} D_i V_i^T A_{k-1}^n \prod_{i=1}^{k-2} D_i V_i},$$

можно записать

$$Me^{z\zeta_n^2(\theta_0)} \leqslant \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{2z}{k^2\pi^2}\right)^{-1/2} \left(1 + 2z \sum_{l=1}^{m} \operatorname{sp} A_l^n\right)^{-1/2}.$$

Учитывая, что с вероятностью 1 $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n^2(\theta_0) = \omega^2(\theta_0)$, в силу экспоненциального неравенства Чебышева получим

$$P\{\omega^2(\theta_0) > r\} \leqslant e^{-zr} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2z}{k^2\pi^2}\right)^{-1/2} \left(1 + 2z \sum_{l=1}^{m} \operatorname{sp} A_l\right)^{-1/2}.$$

Отсюда с учетом того, что

$$\sum_{l=1}^{m} \operatorname{sp} A_l \geqslant \sum_{l=1}^{m} \int_0^1 \int_0^1 R(t, s) f_l(t, \theta_0) f_l(s, \theta_0)\, dt ds =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 R(t, s) g(t, \theta_0) B^{-1}(\theta_0) g^*(s, \theta_0)\, dt ds,$$

приходим к (4).

Замечание 2. Если $\Theta \in R^2$, то, выполнив более тонкую оценку с учетом конкретного вида ортогонального преобразования V_1 с матрицей, у которой первый столбец

$$y = \left\{ \frac{a_1^2}{\sqrt{\operatorname{sp} A_1}}, \ldots, \frac{a_m^2}{\sqrt{\operatorname{sp} A_1}} \right\}^*,$$

а остальные столбцы—произвольные единичные векторы, ортогональные y и между собой, получим

$$Me^{z\omega^2(\theta_0)} = \frac{1}{\sqrt{D(\theta_0)(2z)}};$$

$$D_{\theta_0}(2z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2z}{k^2\pi^2}\right)^{-1/2} \left\{1 + 2z \left[\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^1)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2)^2 + \right.\right. \tag{6}$$

$$\left.\left. + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^1)^2 \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2)^2 - \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^1 a_k^2 \right)^2 \right]\right\}^{-1/2}.$$

Здесь $a_k^l = \dfrac{\alpha_k^l \theta_0}{k\pi \sqrt{1 - \frac{2z}{k^2\pi^2}}}$; $l = 1, 2$. На основании (4) легко получить следующий результат.

Теорема 3. Пусть $F(x, \theta)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, θ_n — оценка параметра, полученная по методу минимума $\omega_n^2(\theta)$, или ей асимптотически эквивалентная. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} P(\omega_n^2(\theta_n) + \Delta^2(\theta_n, x_0^2) > r\} \leqslant \sqrt{\frac{x_0}{\sin x_0}}\, e^{-\frac{x_0^2 r}{2}}, \tag{7}$$

где x_0 — корень уравнения $x \operatorname{ctg} x + 2rx^2 - 1 = 0$, лежащий в интервале $(0; \pi)$,

$$\Delta^2(\theta_n, x_0^2) = \frac{1}{x_0^2} \ln \left[1 + x_0^2 \int_0^1 \int_0^1 R(t, s) g(t, \theta_n) B^{-1}(\theta_n) g^*(s, \theta_n)\, dt ds \right].$$

В справедливости теоремы нетрудно убедиться, если заметить, что в силу теоремы 2

$$\lim_{n\to\infty} P\{\omega_n^2(\theta_n) > r - \Delta^2(\theta_n, x_0^2)\} \leqslant e^{-\frac{rx_0^2}{2}} \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x_0^2}{k^2\pi^2}\right)^{-1/2} =$$

$$= \left[\min_{0<x<\pi} e^{-rx^2}\frac{x}{\sin x}\right]^{1/2},$$

а x_0 — точка, доставляющая минимум правой части последнего выражения.

Оценка (7) вполне пригодна для практического использования. Так, например, при $r = 1{,}41$ значение правой части (7) равно 0,0008, при $r = 1{,}23$ правая часть (7) равна 0,018. Очевидно также, что с увеличением r правая часть (7) стремится к нулю.

Замечание 3. Используя оценки из работы [9, с. 57] с последующей минимизацией по z, получаем из (4) более грубую, но и более простую, чем (7), оценку

$$\lim_{n\to\infty} P\{\omega_n^2(\theta_n) + \Delta^2(\theta_n) > r\} \leqslant e^{-\frac{r\pi^2}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{6r}}\right)^2}, \tag{8}$$

где

$$\Delta^2(\theta_n) = \frac{1}{\pi^2}\ln\left[1 + \pi^2\int_0^1\int_0^1 R(t,s)\,g(t,\theta_n)\,B^{-1}(\theta_n)\,g^*(s,\theta_n)\,dt\,ds\right],$$

$$r > \frac{1}{6}.$$

Замечание 4. Пусть $F(x, a, \sigma) = F\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$, $-\infty<a<\infty$, $\sigma>0$ — соответственно параметры сдвига и масштаба, $f(x) = F'(x)$, причем величины

$$b_{11} = \int_{-\infty}^{\infty} f^3(z)\,dz; \qquad b_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} zf^3(z)\,dz; \qquad b_{22} = \int_{-\infty}^{\infty} z^2f^3(z)\,dz$$

конечны. Тогда

$$\int_0^1\int_0^1 R(t,s)\,g(t,\theta)\,B^{-1}(\theta)\,g^*(s,\theta)\,dt\,ds = \frac{1}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\min(F(x),F(y)) -$$

$$- F(x)\,F(y)]\,f^2(x)\,f^2(y)\,[b_{22} - b_{12}(x+y) + b_{11}(xy)]\,dx\,dy,$$

т. е. $\Delta_n^2(\theta_n, x_0^2) = \Delta_n^2(x_0)^2$ не зависит от оцениваемых параметров. Таким образом, смещение к нулю $\omega_n^2(\theta_n)$ по сравнению с ω^2 будет неслучайным и собственный критический уровень $\omega_n^2(\theta_n)$ нетрудно рассчитать, воспользовавшись теоремой 3.

Замечание 5. Если семейство $\mathfrak{F}$ зависит не более чем от двух параметров, то для расчета вероятности выхода $\omega_n^2(\theta_n)$ за уровень $r > 0$ можно воспользоваться формулой Н. В. Смирнова. Действительно, согласно (6) характеристическая функция величины $\omega^2(\theta_0)$ имеет вид

$$Me^{iz\omega^2(\theta_0)} = (D_{\theta_0}(2iz))^{-1/2}.$$

Повторяя выкладки Н. В. Смирнова [2], находим

$$\lim_{n\to\infty} P\{\omega_n^2(\theta_n) > r\} \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{\lambda_1(\theta_0)}^{\lambda_2(\theta_0)} \frac{e^{-r\lambda/2}}{\lambda\sqrt{-D_{\theta_0}(\lambda)}}\,d\lambda, \tag{9}$$

где $\lambda_1(\theta_0) < \lambda_2(\theta_0)$ — наименьшие по величине корни уравнения $D_{\theta_0}(\lambda) = 0$. Как отмечалось в работе [1, с. 57], при вычислении вероятностей, превышающих 0,98, достаточно взять один интервал. Если $\Theta \in R^1$, то

$$D_{\theta_0}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2(\theta_0)}{1 - \frac{\lambda}{k^2\pi^2}} = 0,$$

где $\alpha_k(\theta_0)$ — коэффициенты Фурье разложения функции $\dfrac{g(t,\theta_0)}{\left[\int\limits_0^1 g^2(s,\theta_0)\,ds\right]}$ по базису $\{\sqrt{2}\sin k\pi t\}$. Отметим, что $D_{\theta_0}(\lambda)$ не зависит от параметров, если они являются параметрами сдвига и масштаба.

1. *Мартынов Г. В.* Критерии омега-квадрат. М., 1978. 80 с. 2. *Смирнов Н. В.* О распределении ω^2-критерия Мизеса // Теория вероятностей и математическая статистика: Избр. тр. М., 1970. С. 60—78. 3. *Кендалл М. Дж., Стьюарт А.* Статистические выводы и связи. М., 1973. 900 с. 4. *Гіхман І. І.* Про одне питання з теорії ω^2-критерія // Наук. зап. Київ .ун-ту. 1954. **13**, № 8. С. 51—60. 5. *Durbin J.* Kolmogorov—Smirnov tests when parameters are estimated // Lect. Notes Math. 1976. **566**. P. 33—44. 6. *Хмаладзе Э. В.* Применение критериев типа ω^2 для проверки параметрических гипотез // Теория вероятностей и ее применения. 1979. **24**, вып. 2. С. 280—297. 7. *Дороговцев А. Я.* Об одном утверждении, полезном при доказательстве состоятельности оценок // Теория вероятностей и мат. статистика. 1976. Вып. 14. С. 34—41. 8. *Джапаридзе К. О.* Об упрощенных оценках неизвестных параметров с хорошими асимптотическими свойствами // Теория вероятностей и ее применения. 1974. **19**, вып. 2. С. 355—365. 9. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., 1969. 368 с.

Поступила в редколлегию 02.06.85

УДК 519.21

В. В. БУЛДЫГИН, д-р физ.-мат. наук,
Ин-т математики АН УССР,
Ю. В. КОЗАЧЕНКО, канд. физ.-мат. наук, Киев. ун-т

СУБГАУССОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕКТОРЫ И ПРОЦЕССЫ

В статье продолжается изучение субгауссовских случайных элементов, начатое в работе [1]. Как обычно, все рассматриваемые случайные элементы заданы на основном полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1. Субгауссовские случайные векторы. *Определение 1.* Случайный вектор $\xi \in R^n$ $(n \geqslant 1)$ назовем субгауссовским, если найдется такой симметричный неотрицательно-определенный оператор $B: R^n \to R^n$, что

$$M \exp\{(u, \xi)\} \leqslant \exp\left\{\frac{1}{2}(Bu, u)\right\} \quad (u \in R^n), \tag{1}$$

где (,) — скалярное произведение, согласованное с естественной евклидовой нормой в R^n.

Простым примером субгауссовского вектора может служить центрированный гауссовский вектор. При этом если в качестве B выбрать ковариационный оператор, то в соотношении (1) имеет место равенство. Из определения 1 следует, что случайный вектор $\xi \in R^n$ будет субгауссовским тогда и только тогда, когда найдется такой центрированный гауссовский вектор $\zeta \in R^n$, что имеет место мажорация $M \exp\{(u, \xi)\} \leqslant M \exp\{(u, \zeta)\}$ $(u \in R^n)$.

При $n = 1$ определение субгауссовского случайного вектора переходит в определение субгауссовской случайной величины.

Согласно [1] пространство субгауссовских случайных величин является банаховым относительно нормы τ. Эта норма для субгауссовской случайной величины η определяется следующим образом:

$$\tau(\eta) = \sup_{\lambda \neq 0}\left[\frac{2 \ln M \exp\{\lambda\eta\}}{\lambda^2}\right]^{1/2}$$

и называется субгауссовским стандартом (субгауссовским отклонением). Класс субгауссовских случайных величин обозначается sub (R), аналогично класс субгауссовских случайных векторов в пространстве R^n будем обозначать sub (R^n). Подобно sub (R) класс sub (R^n) замкнут относительно операций сложения и умножения на действительные числа. Более того, образ субгауссовского вектора при линейном отображении также является субгауссовским.

Лемма 1. Пусть $\xi \in \mathrm{sub}(R^n)$ и A — линейное отображение пространства R^n в пространство R^m. Тогда $A\xi \in \mathrm{sub}(R^m)$.

Доказательство. Так как $\xi \in \mathrm{sub}(R^n)$, то для любого $u \in R^m$ справедливы соотношения $M \exp\{(u, A\xi)\} = M \exp\{(A^*u, \xi)\} \leqslant \exp\{(BA^*u, A^*u)\} = \exp\{(Cu, u)\}$, где $C = ABA^*$, B — некоторый симметричный неотрицательно-определенный оператор в R^n, A^* — оператор, сопряженный к A. Так как оператор C симметричен и неотрицательно определен в R^m, то согласно определению 1 $A\xi \in \mathrm{sub}(R^m)$. Лемма 1 доказана.

Из леммы 1 вытекает, что любой линейный функционал от субгауссовского случайного вектора будет субгауссовской случайной величиной. В частности, таковыми являются координаты случайного вектора в любом ортонормированном базисе. Поскольку всякая субгауссовская случайная величина необходимо имеет нулевое среднее [1], то и всякий субгауссовский случайный вектор имеет нулевое среднее.

Лемма 2. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — координаты случайного вектора $\xi \in R^n$ в ортонормированном базисе $e_1, \ldots, e_n$. Если $\xi_i \in \operatorname{sub}(R)$ $(i = 1, \ldots, n)$, то $\xi \in \operatorname{sub}(R^n)$,

Доказательство. Согласно свойствам субгауссовского стандарта τ для любых действительных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ справедливо неравенство

$$\tau^2\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} n\lambda_i^2 \tau^2(\xi_i).$$

Следовательно, для любого $u \in R^n$

$$M \exp\{(u, \xi)\} = M \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} (u, e_i)\xi_i\right\} \leqslant \exp\left\{\frac{1}{2}\tau^2\left(\sum_{i=1}^{n} (u, e_i)\xi_i\right)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} n(u, e_i)^2\tau^2(\xi_i)\right\} = \exp\left\{\frac{1}{2}(Bu, u),\right.$$

где B — оператор, заданный соотношением $(Be_i, e_j) = \delta_{ij} n\tau^2(\xi_i)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, δ_{ij}—символ Кронекера. Поскольку B симметричен и неотрицательно определен, то $\xi \in \operatorname{sub}(R^n)$. Лемма 2 доказана.

В дальнейшем мы иногда используем координатную форму представления векторов и матриц. При этом если $u \in R^n$ —вектор-столбец, то символ u^T обозначает транспонированный вектор, т. е. вектор-строку. Если $u^T = (u_1, \ldots, u_n)$, $v^T = (v_1, \ldots, v_n)$, то неравенство $u \geqslant v$, как обычно, понимается покомпонентно; соответственно $R^n_+ = \{u \in R^n : u \geqslant 0\}$.

Приведем одно неравенство, полезное в оценках вероятностей попадания субгауссовских векторов в некоторые множества.

Лемма 3. Пусть $\xi^T = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \operatorname{sub}(R^n)$, а B—такая симметричная неотрицательно-определенная матрица, что $\det B \neq 0$ и выполнено соотношение (1). Пусть также $x^T = (x_1, \ldots, x_n)$ и $B^{-1}x \geqslant 0$. Тогда

$$P\{\xi_1 \geqslant x_1, \xi_2, \geqslant x_2, \ldots, \xi_n \geqslant x_n\} \leqslant \exp\left\{-\frac{1}{2}(B^{-1}x, x)\right\}. \qquad (2)$$

Доказательство. Если $u \in R^n_+$, то для любого $z \geqslant x$ $(u, z) \geqslant (u, x)$. Следовательно, при $u \in R^n_+$

$$P\{\xi_1 \geqslant x_1, \ldots, \xi_n \geqslant x_n\} \leqslant \exp\{-(u, x)\} M \exp\{(u, \xi)\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{\frac{1}{2}(Bu, u) - (u, x)\right\}.$$

Так как $\min\limits_{u \in R^n}\left[\frac{1}{2}(Bu, u) - (u, x)\right] = -\frac{1}{2}(B^{-1}x, x)$ и достигается при $\hat{u} = \frac{1}{2}B^{-1}x$, то в силу условия леммы $\hat{u} \in R^n_+$. Отсюда, очевидно, вытекает (2). Лемма 3 доказана.

Замечание 1. Если необходимо оценивать в
$\geqslant x_i,\ i = 1, \dots, n\}$, где $\varepsilon_i = \pm 1$, то согласно л
пользоваться неравенством (2), заменив матрицу
где

$$E = (e_{ij})_{i,j=1}^n; \qquad e_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

При этом должно выполняться условие $E^{-1}B^{-1}E^{-1}x \geqslant 0$.

Если вектор $\xi \in \operatorname{sub}(R^n)$, то матрицы B, удовлетворяющие соотношению (1), подчиняются некоторым условиям согласованности.

Лемма 4. Пусть $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \operatorname{sub}(R^n)$ и матрица $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ удовлетворяет соотношению (1). Тогда для всех $i, j = 1, \dots, n$ справедливы неравенства

$$\tau^2(\xi_i + \xi_j) \leqslant b_{ii} + 2b_{ij} + b_{jj}, \quad \tau^2(\xi_i - \xi_j) \leqslant b_{ii} - 2b_{ij} + b_{jj}; \tag{3}$$

$$\tau^2(\xi_i) \leqslant b_{ii}. \tag{4}$$

Докажем неравенство (4). Рассматривая неравенство (1) для векторов $u^{\mathrm{T}} = (u_1, \dots, u_n)$, у которых все координаты за исключением i-й равны нулю, замечаем, что для любого $i = 1, \dots, n$ справедливо неравенство $M \exp\{\lambda\xi_i\} \leqslant \exp\left\{\frac{1}{2} b_{ii}\lambda^2\right\}$ $(\lambda \in R)$. Отсюда согласно определению τ следует (4).

Пусть теперь $i \neq j$. Рассматривая неравенство (1) сначала для векторов $u^T = (u_1, \dots, u_n)$, у которых $u_k = 0\ (k \neq i,\ k \neq j)$ и $u_i = u_j = \lambda$, а затем для векторов $u^T = (u_1, \dots, u_n)$, у которых $u_k = 0\ (k \neq i,\ k \neq j)$ и $\lambda = u_j = -u_i$, приходим к неравенствам

$$M \exp\{\lambda(\xi_i + \xi_j)\} \leqslant \exp\left\{\frac{1}{2}(b_{ii} + 2b_{ij} + b_{jj})\lambda^2\right\},$$

$$M \exp\{\lambda(\xi_i - \xi_j)\} \leqslant \exp\left\{\frac{1}{2}(b_{ii} - 2b_{ij} + b_{jj})\lambda^2\right\},$$

справедливым при всех $\lambda \in R$. Отсюда следуют неравенства (3). Лемма доказана.

Заметим, что в случае, когда неравенства (3) и (4) превращаются в равенства, $b_{ij} = \frac{1}{4}[\tau^2(\xi_i + \xi_j) - \tau^2(\xi_i - \xi_j)]$.

Леммы 1—3 показывают, что для субгауссовских случайных векторов выполняются некоторые свойства, присущие гауссовским векторам. В то же время лемма 2 указывает на излишнюю широту класса $\operatorname{sub}(R^n)$. Это обстоятельство связано с недостаточной конкретизацией вида оператора B в определении 1. Как видим, существует нежелательное расхождение с центрированными гауссовскими векторами, для которых в качестве B можно выбрать ковариационный оператор. Лемма 4 показывает, что в классе $\operatorname{sub}(R^n)$ естественно выделить подкласс случайных векторов, для которых соотношение (1) выполняется с матрицей $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$,

$$b_{ij} = \frac{1}{4}[\tau^2(\xi_i + \xi_j) - \tau^2(\xi_i - \xi_j)] \quad (i, j = 1, \dots, n). \tag{5}$$

Корректность такого подхода связана с выяснением неотрицательной определенности матрицы B. При $n = 2$ этот факт очевиден, поскольку $b_{12} = \frac{1}{4}[\tau^2(\xi_1+\xi_2) - \tau^2(\xi_1-\xi_2)] \leqslant \frac{1}{4}[(\tau(\xi_1)+\tau(\xi_2))^2 - (\tau(\xi_1) - \tau(\xi_2))^2] = \tau(\xi_1)\tau(\xi_2)$ и, следовательно, $\det B = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = \tau^2(\xi_1) \times \tau^2(\xi_2) - b_{12}^2 \geqslant 0$. При $n > 2$ ситуация сложнее и требуется более тщательный анализ.

В гауссовском случае структурное отклонение и среднеквадратическое отклонение совпадают. Следовательно, для центрированных гауссовских случайных векторов матрица, заданная соотношением (5), является ковариационной. Совпадение структурного и среднеквадратического отклонения выделяет в классе субгауссовских случайных величин подкласс строго субгауссовских случайных величин [1]. Таким образом, если у вектора $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ все линейные комбинации $\xi_i \pm \xi_j$, $i, j = 1, \ldots, n$ строго субгауссовские, то матрица, определенная соотношением (4), является ковариационной матрицей вектора $(\xi_1, \ldots, \ldots, \xi_n)$. Этот факт обосновывает выделение в классе $\mathrm{sub}(R^n)$ подкласса строго субгауссовских случайных векторов.

Определение 2. Случайный вектор $\xi \in R^n$ назовем строго субгауссовским, если $M \exp\{(u, \xi)\} \leqslant \exp\left\{\frac{1}{2}(Bu, u)\right\}$ $(u \in R^n)$, где B — ковариационная матрица вектора ξ.

Класс строго субгауссовских случайных векторов обозначим $\overline{\mathrm{sub}}(R^n)$.

2. Строго субгауссовские случайные величины. Прежде чем перейти к основному объекту настоящей статьи — строго субгауссовским случайным векторам и процессам, остановимся на строго субгауссовских случайных величинах [1, 2]. Напомним, что случайная величина ζ называется строго субгауссовской, если $M\zeta = 0$ и $\tau^2(\zeta) = M\zeta^2 = \sigma^2$, т. е. $M \exp\{\lambda\zeta\} \leqslant \exp\{{}^1/_2\, \sigma^2\lambda^2\}$. Это определение согласовано с определением строго субгауссовского случайного вектора при $n = 1$. Помимо центрированной гауссовской случайной величины, типичным примером строго субгауссовской служит случайная величина, принимающая значения ± 1 с вероятностью 1/2. Класс строго субгауссовских случайных величин обозначим $\mathrm{sub}(R)$.

Приведем некоторые дополнительные факты о строго субгауссовсовских случайных величинах. Следующее утверждение усиливает соответствующую теорему Ньюмена [3].

Теорема 1. Пусть центрированная случайная величина ζ такова, что ее характеристическая функция $\varphi(z) = \varphi_\zeta(z) = M \exp\{iz\,\zeta\}$ $(z \in C_1)$ (C_1 — поле комплексных чисел) является целой функцией конечного порядка. Тогда если $\{z : \varphi(z) = 0\} \subset R$, то $\zeta \in \overline{\mathrm{sub}}(R)$.

Доказательство. Согласно теореме Гольдберга—Островского [4] найдутся такие постоянные C, γ, β, a_k, $k \geqslant 1$, что $\gamma \geqslant 0$, $\operatorname{Im}\beta = 0$, $a_k > 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^{-2} < \infty$ и функция $\varphi(z)$ представима в виде

$$\varphi(z) = C \exp\{-\gamma z^2 + i\beta z\} \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{a_k^2}\right).$$

С другой стороны,

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M\zeta^k}{k!} (iz)^k.$$

Отсюда следует, что $C = 1$, $\beta = 0$ и $M\zeta^2 = 2\left(\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{-2}\right)$. Пусть $z = i\lambda$, $\lambda \in R$, тогда

$$Me^{\lambda\zeta} = \varphi(-i\lambda) = \exp\{\gamma\lambda^2\} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda^2}{a_k^2}\right) \leqslant \exp\left\{\gamma\lambda^2 + \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k^2}\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2} M\zeta^2) \lambda^2\right\}.$$

Теорема доказана.

Следующая лемма содержит простой достаточный признак строгой субгауссовости для симметричных случайных величин.

Лемма 5. Пусть ζ — симметричная случайная величина. Если $M\zeta^{2k} < \infty$ и $M\zeta^{2k} \leqslant (2k-1)!! (M\xi^2)^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то $\zeta \in \overline{\text{sub}}(R)$.

Доказательство очевидно.

Лемма 6. Пусть $\zeta \in \overline{\text{sub}}\, R)$. Тогда $M\zeta^3 = 0$ и $M\zeta^4 \leqslant 3\sigma^4$.

Доказательство очевидно.

Из леммы 6 следует, что коэффициент эксцесса $\gamma = \frac{M\zeta^4}{(M\zeta^2)^2} - 3$ у *строго субгауссовской случайной величины не может быть положи*тельным.

Лемма 7. Пусть $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ — независимые строго субгауссовские случайные величины с нулевым эксцессом. Тогда их линейная комбинация $\sum_{i=1}^{n} c_i \zeta_i$ также является строго субгауссовской случайной величиной с нулевым эксцессом.

Доказательство того, что $\sum_{i=1}^{n} c_i \zeta_i \in \overline{\text{sub}}(R)$, есть в работе [1]. Утверждение, что у данной линейной комбинации эксцесс равен нулю, устанавливается непосредственной выкладкой с использованием леммы 6.

Приведем примеры строго субгауссовских случайных величин с нулевым эксцессом.

1. Центрированная гауссовская случайная величина.
2. Случайная величина с плотностью распределения

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\alpha+1}{2\alpha} (1 - |x|^\alpha), & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

где $\alpha = \sqrt{10} - 3$.

3. Случайная величина с плотностью распределения

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\alpha}{2|x|^{\alpha}}, & |x|\leqslant 1, \quad x\neq 0,\\ 0, & |x|>1, \quad x=0,\end{cases}$$

где $\alpha=3-\sqrt{6}$.

4. Дискретная случайная величина, принимающая значения ± 1 с вероятностью 1/6 и 0 с вероятностью 2/3.

Лемма 8. Пусть $\eta=\sum_{i=1}^{n} c_i\zeta_i$, где $\zeta_1,\ldots,\zeta_n\in\overline{\mathrm{sub}}(R)$, и независимы в совокупности. Если η имеет нулевой эксцесс, то случайные величины ζ_i, $i=1,\ldots,n$ также имеют нулевой эксцесс, $c_i\neq 0$.

Доказательство. Утверждение леммы достаточно доказать в случае $\eta=\zeta_1+\zeta_2$. Положим $M\zeta_i^4/(M\zeta_i^2)^2=c_i$, $i=1,2$. Так как ζ_1, $\zeta_2\in\overline{\mathrm{sub}}(R)$, то $c_i\leqslant 3$, $i=1,2$. Далее, $M\eta^4=M\zeta_1^4+M\zeta_2^4+6M\zeta_1^2M\zeta_2^2=3(M\eta^2)^2+(c_1-3)(M\zeta_1^2)^2+(c_2-3)(M\zeta_2^2)^2=3(M\eta^2)^2$. Отсюда $(c_1-3)(M\zeta_1^2)^2+(c_2-3)(M\zeta_2^2)^2=0$. При предположении $M\zeta_1^2>0$, $M\zeta_2^2>0$ последнее равенство возможно лишь в том случае, если $c_1=3$, $c_2=3$. Лемма 8 доказана.

3. Строго субгауссовские случайные векторы и процессы. Остановимся на некоторых свойствах строго субгауссовских случайных векторов в R^n, определение которых приведено в п. 1.

Лемма 9. Пусть $\xi\in\overline{\mathrm{sub}}(R^n)$ и A — линейное отображение пространства R^n в пространство R^m. Тогда $A\xi\in\overline{\mathrm{sub}}(R^m)$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

Следующее очевидное утверждение в совокупности с леммой 9 позволяет конструктивно задавать строго субгауссовские случайные векторы.

Лемма 10. Пусть $\xi_1,\ldots,\xi_n\in\overline{\mathrm{sub}}(R)$ и независимы в совокупности; $e_1,\ldots,e_n$ — ортонормированный базис в R^n Тогда $\xi=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\in\overline{\mathrm{sub}}(R^n)$.

Как и гауссовские, строго субгауссовские случайные векторы характеризуются линейными функционалами.

Лемма 11. Вектор $\xi\in\overline{\mathrm{sub}}(R^n)$ тогда и только тогда, когда для любого $u\in R^n$ $(u,\xi)\in\overline{\mathrm{sub}}(R)$.

В дальнейшем нам понадобится такая лемма.

Лемма 12. Пусть $(\xi_1,\xi_2)\in\overline{\mathrm{sub}}(R^2)$. Тогда

$$M\xi_1^2\xi_2=M\xi_2^2\xi_1=0; \tag{6}$$

$$M\xi_1^4+6M\xi_1^2\xi_2^2+M\xi_2^4\leqslant 3(\sigma_1^4+2(\sigma_1^2\sigma_2^2+2\rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2)+\sigma_2^4), \tag{7}$$

где $\sigma_1^2=M\xi_1^2$, $\sigma_2^2=M\xi_2^2$, $\rho=\dfrac{M\xi_1\xi_2}{\sigma_1\sigma_2}$.