1er cycle : DEUG.- IUT.- Classes préparatoires -
Écoles d'Ingénieurs - Formation permanente

Comprendre et appliquer l'électrostatique

COURS - EXERCICES

J. P. LONCHAMP

1

MASSON ET CIE

COLLECTION « COMPRENDRE ET APPLIQUER »
Coordonnateur : G. Germain

= 1 =

COMPRENDRE ET APPLIQUER
L'ÉLECTROSTATIQUE

par

J. P. LONCHAMP

Professeur
Président de l'Université de Metz

COURS - EXERCICES

MASSON et C^{ie}, ÉDITEURS
120, boulevard Saint-Germain, Paris 6^e
1974

LIBRARY OF CONGRESS CATALOG CARD NUMBER : 74-79574

ISBN : 2-225 39875-5

Imprimé en France

COMPRENDRE ET APPLIQUER

L'ÉLECTROSTATIQUE

CHEZ LE MÊME ÉDITEUR

Du même auteur

THERMODYNAMIQUE ET INTRODUCTION A LA PHYSIQUE STATISTIQUE. Enseignement supérieur. 1er cycle. 1970, 210 pages, 88 figures.

Dans la même collection

Physique.

COMPRENDRE ET APPLIQUER LA THERMODYNAMIQUE, par H. DEMANGE, G. GERMAIN et M. NOTIN. 560 exercices, 100 tests et 25 problèmes. 1973, 288 pages, 220 figures.

COMPRENDRE ET APPLIQUER L'ELECTROCINÉTIQUE. *Le courant continu*, par J. P. LONCHAMP (1er trimestre 1975).

Mathématiques.

MATHÉMATIQUES PRATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

Les intégrales simples, par G. HIRSCH et J. ROUYER. 300 exercices et tests (4e trimestre 1974).

Les équations différentielles, par G. HIRSCH (1er trimestre 1975).

Chimie.

ABRÉGÉ DE CHIMIE. P.C.E.M. Tome I. *Chimie générale*, par G. GERMAIN, R. MARI et D. BURNEL (4e trimestre 1974).

COMPRENDRE ET APPLIQUER LA THERMODYNAMIQUE CHIMIQUE, par H. DEMANGE, G. GERMAIN et M. NOTIN (1er trimestre 1975).

AVANT-PROPOS

Il est difficile d'innover dans un exposé classique de l'électrostatique du vide. Notre objectif est d'abord de fournir à l'étudiant un cours limité à l'essentiel ; il y trouve les définitions, les théorèmes, les démonstrations ; chaque chapitre est centré sur une notion fondamentale (champ, potentiel, flux, etc...). Certaines remarques, certes intéressantes, mais non essentielles dans le déroulement logique de l'exposé sont renvoyées en appendice.

Chaque chapitre est accompagné, parfois, de questions destinées à faire réfléchir sur un point précis du cours, toujours, d'exercices ou problèmes permettant d'utiliser les notions que l'on vient d'acquérir.

Il va de soi que le lecteur aura intérêt à essayer de résoudre le problème sans lire la solution au préalable.

La sélection des problèmes proposés a été faite avec soin ; on a écarté les exercices qui ne sont que des prétextes à calculs sans rapport direct avec la physique.

En résumé cet ouvrage veut tenir compte des capacités d'assimilation d'un étudiant de premier cycle. Il y trouvera l'essentiel ainsi que les exercices lui permettant de contrôler l'assimilation des connaissances dans l'esprit de la collection « Comprendre et appliquer ».

Remarque : Le lecteur notera la typographie utilisée dans cet ouvrage pour indiquer **les grandeurs vectorielles.** Celles-ci sont imprimées en **caractère gras** et ne sont donc pas surmontées d'une flèche.

J. P. LONCHAMP.

CONSEILS POUR BIEN RÉSOUDRE VOS PROBLÈMES

1) *Lire attentivement l'énoncé. Le traduire par une figure. Si les notations ne sont pas imposées, choisir des notations logiques (par exemple si vous avez 2 rayons de sphères R_1 et R_2 prenez R_2 pour le plus grand) et qui évitent des confusions possibles (exemple : éviter d'appeler R une longueur dans un problème où intervient aussi une résistance etc...).*

2) *Tenir compte de toutes les simplifications suggérées par l'énoncé (par exemple pour une sphère chargée, si les autres charges sont à des distances suffisantes, on pourra négliger l'influence de ces charges et supposer sur la sphère une répartition uniforme).*

3) *Avant tout calcul, examiner les conditions de symétrie du problème ; cela peut entraîner de grosses simplifications (par exemple une couche sphérique et homogène de charges donnera un champ à symétrie sphérique).*

4) *Pour simplifier vos calculs, pensez d'abord à utiliser des théorèmes « synthétiques » comme le théorème de Gauss qui joue un rôle capital : cela vous évitera d'avoir à effectuer de laborieuses intégrations (par exemple pour calculer des champs). De même, l'utilisation de l'énergie d'un système permet de résoudre des questions concernant les forces.*

5) *N'oubliez jamais la distinction entre les grandeurs scalaires et les grandeurs vectorielles. N'oubliez pas de surmonter d'une flèche les grandeurs vectorielles. N'égalez jamais une grandeur scalaire avec une grandeur vectorielle. L'addition vectorielle ne se réduit pas à une addition scalaire dans le cas général.*

6) *En physique, les définitions jouent un rôle capital et il convient de les savoir parfaitement.*

7) *En électrostatique, vous remarquerez le rôle important joué par les couches sphériques de charge ; vous n'aurez aucune hésitation concernant leurs propriétés.*

8) *Ne mélangez pas les calculs littéraux et les calculs numériques, faire l'application numérique à la fin.*

9) *Vérifier systématiquement l'homogénéité de vos formules littérales, cela permet de déceler bien des erreurs — n'oubliez pas que ε_0 est une constante douée d'une « dimension » (C/L).*

10) *Ne donnez jamais un résultat numérique sans indication d'unité. Eviter l'indication sommaire (S.I.). Contrôler l'ordre de grandeur de vos résultats numériques, rappelez-vous que les charges usuelles sont plus souvent de l'ordre de 10^{-6} C que de 10^{6} C (si vous trouvez 10^{6} C refaites vos calculs !). N'oubliez pas que les énergies électrostatiques usuelles sont faibles !*

TABLE DES MATIÈRES

1. Charges et champ électrostatique

1.1. Charges électriques

La matière est formée de corpuscules dont certains ont la propriété de s'attirer ou de se repousser mutuellement; on dit que ces corpuscules portent une charge. Parmi ces corpuscules « chargés » figurent essentiellement les électrons qui forment la partie extérieure des atomes et les protons qui se trouvent dans les noyaux des atomes.

Par convention, nous qualifions de **négative** la charge d'un électron atomique et de **positive** celle d'un proton. L'expérience enseigne que **des charges de même signe se repoussent et que des charges de signe contraire s'attirent.**

La charge la plus petite qui puisse se manifester est appelée **charge élémentaire,** on la représente par e. Les charges sont souvent représentées par la notation q :

— pour l'électron atomique : $q = -e$
— pour le proton : $q = +e$.

Un atome de numéro atomique Z possède Z électrons liés à un noyau contenant Z protons d'où une charge globale nulle : on dit que l'atome est électriquement neutre.

Un atome ayant perdu ou gagné un ou plusieurs électrons se transforme en un édifice atomique chargé appelé **ion.** Dans le premier cas, il s'agit d'un ion positif; dans le second cas, il s'agit d'un ion négatif.

1.2. Conducteurs et isolants

Les conducteurs types sont les métaux. Ceux-ci sont formés d'ions positifs occupant des positions fixes. Ces positions constituent des réseaux (exemple : dans un réseau cubique, les ions occupent les sommets de cubes juxtaposés). En plus du réseau, nous avons des électrons qui se sont détachés des atomes et qui circulent d'une façon désordonnée au sein du réseau. Ces électrons sont en très grand nombre (ordre de grandeur : 1 par atome); ils forment un véritable « **gaz électronique** » et sont responsables des phénomènes de transport de charge c'est-à-dire des « courants » et aussi des transferts de chaleur. Ceci explique le nom d'électrons de conduction qui leur a été donné. Pour marquer la grande facilité avec laquelle ils se déplacent, ils sont souvent qualifiés d'**électrons « libres »**.

Dans les conditions habituelles un volume donné contiendra autant de charges + que de charges − et le métal paraîtra « **neutre** ».

Si par un procédé quelconque, on attire un excès d'électrons dans une région déterminée du métal, cette région apparaîtra comme étant chargée négativement. Réciproquement, une région déficitaire en électrons apparaîtra comme étant chargée positivement. Un isolant est un corps dépourvu d'électrons libres; il est normalement neutre.

Un isolant peut être « chargé » en lui arrachant ou en lui apportant des électrons. Ceci peut se faire par frottement.

L' « électrisation » par frottement est un phénomène très courant observable avec les isolants comme avec les conducteurs. Notons que dans le cas des isolants les charges restent localisées à l'endroit où elles sont créées alors que dans les conducteurs elles se déplacent avec la plus grande facilité.

L'indestructibilité des charges fait que la somme algébrique des charges reste constante pour tout corps isolé c'est-à-dire pour tout corps qui n'est en contact avec aucun autre. Seule la répartition de cette charge totale peut être modifiée.

1.3. Notion de champ électrique

On appelle « **champ électrique** » une région de l'espace où une charge est soumise à une force appelée force électrique. Il résulte de cette définition que toute charge crée en son voisinage un champ électrique. Le champ apparaît ainsi comme la cause physique des forces électriques. Ces définitions sont vagues. Nous allons donner à ce concept de champ un aspect quantitatif en définissant le champ électrique en un point.

1.4. Définition quantitative du champ

Plaçons en un point P une charge ponctuelle q; celle-ci se trouve soumise à une force électrique $\mathbf{f}$. Nous appellerons champ $\mathbf{E}$ au point P le quotient

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\mathbf{f}}{q}} . \qquad (1.1)$$

Remarquons que cette définition n'a de sens que si le fait de placer q au point P ne perturbe pas le champ préexistant. On dit pour cela que q est une **charge** « **passive** » ou encore « **charge d'épreuve** ».

Nous avons, en plus, admis implicitement que q est une grandeur mesurable. Il en est bien ainsi car on peut définir le rapport de deux charges ponctuelles placées successivement en un même point comme égale au rapport des modules des forces électriques auxquelles elles sont soumises.

Insistons sur le caractère vectoriel du champ. Si q est positif, **f** et **E** ont même direction et même sens. Si q est négatif, **f** et **E** ont même direction et sont de sens contraire. Si $q = +1$, $\mathbf{E} = \mathbf{f}$, c'est-à-dire que le vecteur champ en un point se confond avec le vecteur force électrique qui s'exerce sur une charge ponctuelle positive unité placée en ce point. Le champ électrique appartient à la catégorie des **champs vectoriels** car à chaque point d'un espace donné on associe un vecteur **E** (et un seul).

Rappelons qu'une **ligne de champ** est une courbe tangente en chaque point au vecteur champ associé à ce point. La ligne de champ est orientée par continuité avec les vecteurs champs (cf. Fig. 1.1).

On appelle **tube de champ** la surface formée par l'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé (cf. Fig. 1.2).

Un champ est dit **uniforme** lorsque tous les vecteurs **E** sont équipollents.

Les lignes de champ sont alors des droites parallèles (cf. Fig. 1.3).

FIG. 1.1.

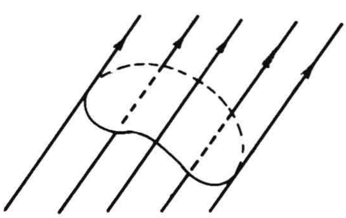


FIG. 1.2.

FIG. 1.3.

1.5. Loi de Coulomb

Cette loi précise la force d'interaction électrique entre deux charges ponctuelles au repos dans un référentiel lié à l'observateur. L'étude expérimentale de cette interaction est l'œuvre de Coulomb (1785).

Enoncé : L'interaction f entre deux charges ponctuelles q et q' est proportionnelle à leurs charges et inversement proportionnelle au carré de leur distance r, sa direction se confond avec la droite joignant les deux charges.

Traduction mathématique

$$f = k\,\frac{qq'}{r^2}$$

k est une constante fonction des unités choisies.

Dans le système international (S.I.) ou (M.K.S.A.) l'unité de charge est le **coulomb** (symbole C) — le coulomb dérive de l'ampère — le coefficient k a alors une valeur bien déterminée donnée par l'expérience

$$\boxed{k = 9.10^9} \qquad (1.2)$$

(cette valeur est approchée par excès à 10^{-3} près) :

$$f\ (\text{newton}) = 9.10^9\,\frac{q.q'\ (\text{C})}{r^2\ (\text{m})}.$$

Il est judicieux d'exprimer k sous la forme $k = 1/4\,\pi\varepsilon_0$ dite « **rationalisée** ».

ε_0 est une constante universelle appelée « **permittivité du vide** » sa valeur numérique est sensiblement égale à :

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\,\pi k} = \frac{1}{36\,\pi.10^9}. \qquad (1.3)$$

Nous écrirons dorénavant la loi de Coulomb sous la forme

$$\boxed{f = \frac{qq'}{4\,\pi\varepsilon_0\,r^2}}. \qquad (1.4)$$

Remarque : l'unité de champ sera précisée ultérieurement (cf. 2.4.2).

1.6. Calcul des champs créés par des charges ponctuelles

Considérons d'abord une charge ponctuelle q placée en un point O, cette charge est une « **source** » **de champ.** Il s'agit d'évaluer le champ **E** créé par cette source en P situé à une distance r de la source.

Pour cela plaçons en P une charge d'épreuve $q' = +1$. On sait que le champ s'identifie avec la force qui s'exerce sur q'.

La loi de Coulomb permet alors de caractériser entièrement le champ **E**.

E a pour direction la droite passant par OP. Si q est positif **E** est dirigé dans le sens de O vers P.

Si q est négatif **E** est dirigé dans le sens P vers O.

Le module du champ est :

$$E = \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\frac{q.1}{r^2}.$$

On peut vectorialiser cette relation en introduisant un vecteur unitaire **u** placé sur OP (cf. Fig. 1.4).

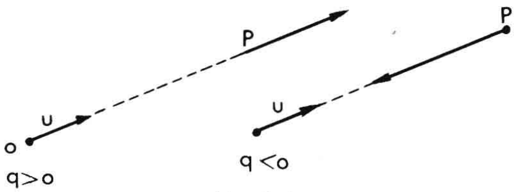


FIG. 1.4.

On écrit alors :

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathbf{u}} \qquad (1.5)$$

cette relation contient toute l'information concernant **E** (direction, sens, module).

Traitons maintenant le problème plus général du champ créé en un point P par un nombre quelconque de sources ponctuelles q_1, q_2, ..., (q_i) placées en des points O_1, O_2, ..., (O_i). La charge d'épreuve $q' = +1$ placée en P est soumise à des forces dues à chacune des charges q_1, q_2, ..., etc, qui sont autant de champs électriques que nous noterons

$$\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, (\mathbf{E}_i).$$

Ces champs se calculent grâce à (1.5). Ces champs se composent comme des forces c'est-à-dire par addition vectorielle (cf. RC 1.2).

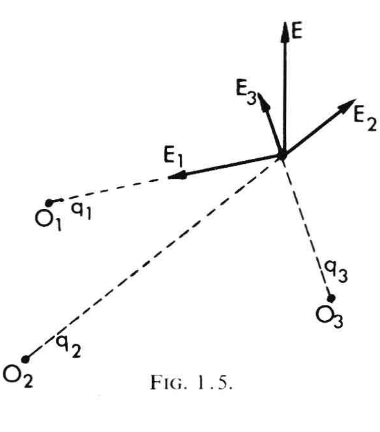


FIG. 1.5.

Soit **E** le champ résultant, nous pouvons écrire :

$$\boxed{\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i}. \qquad (1.6)$$

Nous insistons sur le caractère vectoriel des champs (ne jamais omettre de préciser : direction, sens, module) et leur addition vectorielle.

Précisons que les sources de champ sont supposées immobiles ; nous sommes alors dans le domaine de l'électrostatique et en toute rigueur nous devons appeler le champ créé « **champ électrostatique** ».

Précisons également que toutes les charges sont supposées placées dans le vide.

1.7. Distributions continues de charges

A notre échelle (échelle dite macroscopique), compte tenu de la petitesse des corpuscules chargés, il est commode de considérer les charges comme distribuées d'une façon continue formant une espèce de fluide pouvant recouvrir une surface ou imprégner un volume.

Pour de telles distributions, il est intéressant d'introduire la notion de densité.

1.7.1. DENSITÉ SUPERFICIELLE DE CHARGE

Si ΔS désigne un élément de surface entourant un point P et Δq la charge portée par cet élément, la **densité superficielle de charge** σ au point P est définie comme la limite du quotient $\Delta q/\Delta S$ lorsque ΔS tend vers zéro, ce qui s'écrit sous forme différentielle :

$$\boxed{\sigma = \frac{dq}{dS}}. \qquad (1.7)$$

1.7.2. DENSITÉ VOLUMIQUE DE CHARGE

Si Δv désigne un élément de volume entourant un point P et Δq la charge contenue dans cet élément, **la densité volumique de charge** ρ au point P est définie comme la limite du quotient $\Delta q/\Delta v$ lorsque Δv tend vers zéro, ce qui s'écrit sous forme différentielle :

$$\boxed{\rho = \frac{dq}{dv}}. \qquad (1.8)$$

Insistons sur le fait que ces densités sont relatives à un point : $dq = \rho\, dv$, par exemple, peut être assimilé à une charge ponctuelle.

Comme exemple de distribution de charges en volume, on peut donner celui d'un noyau atomique lequel contient les charges liées aux protons qui s'y trouvent.

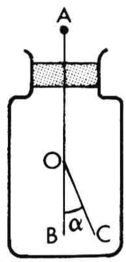
Remarques complémentaires

RC 1.1. Electroscope. — Il s'agit d'un instrument fréquemment utilisé pour détecter ou mesurer des charges.

L'appareil se compose d'une tige métallique AB isolée par rapport à une cage métallique.

Articulée sur AB en O se trouve une feuille métallique très légère OC. Lorsqu'on charge l'électroscope en A, les charges se répartissent à la fois sur OB et OC ; il en résulte une répulsion de la feuille mobile OC qui tourne d'un angle α d'autant plus grand que la charge est plus forte.

L'une des façons de « charger » l'électroscope est de le mettre en contact au niveau de l'extrémité A avec un conducteur ou un isolant lui-même chargé (électrisation par contact).



RC 1.1.

RC 1.2. Principe de superposition. — Les résultats de ce chapitre ont supposé implicitement le postulat suivant : dans un système de charges immobiles l'interaction entre deux quelconques d'entre elles est la même que si elles étaient seules. Ce résultat est connu sous le nom de « Principe de superposition ».

RC 1.3. Comparaison des forces de gravitation et des forces électriques. — Il résulte de la loi de Newton que 2 masses ponctuelles m et m' placées à une distance r l'une de l'autre s'attirent avec une force

$$f = G\frac{mm'}{r^2} \qquad G = 6{,}670.10^{-11}\ (\text{S.I.})\,.$$

Si par exemple nous comparons les forces d'interaction gravitationnelle et électrique, dans le cas de deux protons, placés à la même distance r compte tenu des valeurs $m_p = 1{,}672\,5.10^{-27}$ kg, $e = 1{,}60.10^{-19}$ C on obtient :

$$\frac{f\,(\text{électrique})}{f\,(\text{gravitation})} = 1{,}24.10^{36}\,.$$

On remarquera donc que les ordres de grandeur sont totalement différents ; les forces électriques appartiennent aux interactions fortes.

Questions

Q 1.1. Deux lignes de champ peuvent-elles se couper ?

Q 1.2. Donner de la relation (1.5) une autre expression vectorielle.

Q 1.3. Trouver en fonction de ρ l'expression de la charge totale Q se trouvant à l'intérieur d'un volume V (voir le cas particulier de ρ uniforme).

Q 1.4. Soit un fil (de très faible diamètre) porteur de charges. Définir la « densité linéaire de charge » λ.

Voir Réponses en Appendice.

EXERCICES

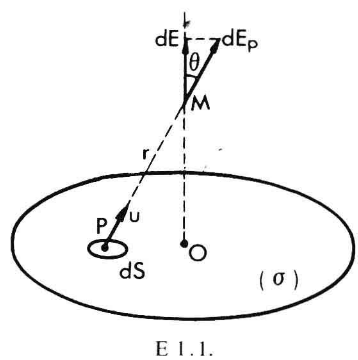
E 1.1. (*Très classique, complément du cours.*)

Calculer le champ créé par un disque circulaire uniformément chargé en un point M de son axe.

Solution

Si σ désigne la densité uniforme de charge, la charge $\sigma\,\mathrm{d}S$ d'un élément de surface $\mathrm{d}S$ pris autour de P est considérée comme quasi ponctuelle. Elle crée en M un champ

$$\mathrm{d}\mathbf{E}_p = \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\,\frac{\sigma\,\mathrm{d}S}{r^2}\,\mathbf{u} \quad \text{avec} \quad r = PM\,.$$



E 1.1.

Le champ total est par raison de symétrie porté par l'axe OM, son module E est la somme des composantes $\mathrm{d}E$ de $\mathrm{d}E_p$:

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\,\sigma\,\frac{\mathrm{d}S\cos\theta}{r^2}.$$

Or $\mathrm{d}S\cos\theta/r^2$ est l'angle solide $\mathrm{d}\Omega$ sous lequel de M on voit $\mathrm{d}S$.

Le champ total est

$$E = \frac{\sigma}{4\,\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}\Omega = \frac{\sigma\Omega}{4\,\pi\varepsilon_0};$$

Ω étant l'angle solide sous lequel de M on voit le disque.

Remarques : *a*) Ce résultat reste valable pour toute surface admettant un centre de symétrie.

b) Quand M se rapproche infiniment près du centre O, $\Omega \to 2\,\pi$, le champ tend vers la valeur

$$E = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}.$$

c) Si le rayon du disque croît indéfiniment, la surface devient un plan.

Quelle que soit la position de M :

$$\Omega = 2\,\pi\,, \qquad E = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}$$

ce champ est uniforme dans tout l'espace.

E 1.2. (*Intéressant par sa méthode*)

Evaluer le champ créé par un fil rectiligne infini X'X porteur d'une densité linéaire uniforme λ en un point M placé à une distance R du fil.

Solution

Par raison de symétrie le champ **E** se trouve dans le plan défini par M et $X'X$; il est porté par OM.

En un point P d'abscisse $OP = x$, considérons un élément $\mathrm{d}x$ du fil, il porte une charge $\mathrm{d}q = \lambda\,\mathrm{d}x$; cet élément crée en M un champ élémentaire :

$$\mathrm{d}E = \frac{\lambda\,\mathrm{d}x}{4\,\pi\varepsilon_0\,r^2}$$

E est la somme des projections sur OM des champs élémentaires $\mathrm{d}E$

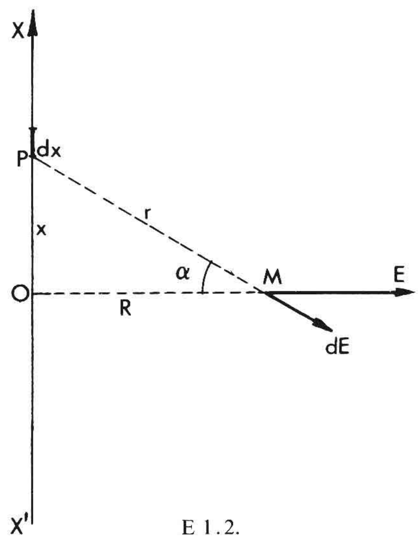
$$E = \int \mathrm{d}E\cos\alpha = \frac{\lambda}{4\,\pi\varepsilon_0}\int\frac{\mathrm{d}x}{r^2}\cos\alpha\,.$$

Prenons α comme variable :

$$r = \frac{R}{\cos\alpha}\,;\quad x = R\,\mathrm{tg}\,\alpha \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{R}{\cos^2\alpha}\,\mathrm{d}\alpha$$

$$E = \frac{\lambda}{4\,\pi\varepsilon_0\,R}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \frac{\lambda}{2\,\pi\varepsilon_0\,R}.$$

On comparera cette méthode de calcul avec celle, plus simple, de l'exercice E 3.4.



E 1.2.

E 1.3. (*A faire après avoir étudié* E 1.2)

Evaluer le champ créé par un fil rectiligne de longueur L porteur d'une densité linéaire uniforme λ, en un point M équidistant de ses extrémités à une distance R du fil.

Solution

La méthode utilisée est la même que pour E 1.2.

Résultat :

$$E = \frac{\lambda}{2\,\pi\varepsilon_0\,R\sqrt{1+\dfrac{4\,R^2}{L^2}}}.$$

2. Potentiel électrostatique

2.1. Existence d'un potentiel électrostatique

Nous établirons que la circulation du vecteur champ entre deux points A et B ne dépend que de la position de ces points et non du trajet effectivement suivi pour aller de A en B ; on dit pour cette raison que le « **champ électrostatique dérive d'un potentiel** ».

Dans ces conditions, la circulation du champ peut prendre la forme d'une différence entre la valeur prise par une fonction scalaire $V(x, y, z)$, respectivement au point A et B notée $V(A)$ et $V(B)$. Cette fonction est appelée « **fonction potentiel** » ou simplement « **potentiel** ». Rappelons que la circulation du vecteur $\mathbf{E}$ le long d'une trajectoire AB est l'intégrale curviligne :

$$\int_{\widehat{AB}} \mathbf{E}.\mathbf{dl}$$

$\mathbf{dl}$ est un élément de la trajectoire.

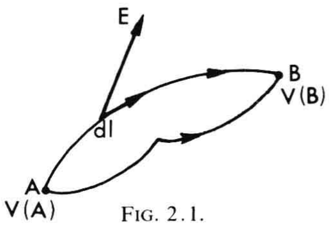


FIG. 2.1.

L'existence d'un potentiel se traduit donc par la relation :

$$\boxed{\int_{\widehat{AB}} \mathbf{E}.\mathbf{dl} = V(A) - V(B)} \quad . \qquad (2.1)$$

Comme corollaire de cette existence, on remarquera que lorsque le champ décrit une courbe fermée le point d'arrivée est confondu avec le point de départ ce qui entraîne d'après (2.1) une circulation nulle. **La circulation du champ électrostatique le long de toute courbe fermée est nulle.**

$$\boxed{\oint \mathbf{E}.\mathbf{dl} = 0} \quad . \qquad (2.2)$$

2.2. Expressions de la fonction potentiel

La démonstration des propriétés annoncées ci-dessus consistera à montrer la possibilité d'évaluer dans tous les cas une fonction V qui satisfait à la relation fondamentale (2.1).

Nous avons à examiner plusieurs cas selon la nature des sources du champ.

2.2.1. La source du champ est une charge ponctuelle unique q

q est placée en O ; au point P de la trajectoire la valeur du champ est donnée par (1.5)

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^2}\,\mathbf{u}$$

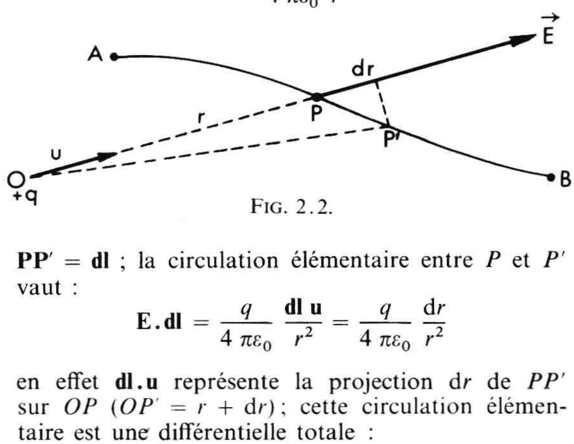


FIG. 2.2.

$\mathbf{PP'} = \mathbf{dl}$; la circulation élémentaire entre P et P' vaut :

$$\mathbf{E}.\mathbf{dl} = \frac{q}{4\,\pi\varepsilon_0}\,\frac{\mathbf{dl}\,\mathbf{u}}{r^2} = \frac{q}{4\,\pi\varepsilon_0}\,\frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

en effet $\mathbf{dl}.\mathbf{u}$ représente la projection $\mathrm{d}r$ de PP' sur OP ($OP' = r + \mathrm{d}r$) ; cette circulation élémentaire est une différentielle totale :

$$\mathbf{E}.\mathbf{dl} = \frac{q}{4\,\pi\varepsilon_0}\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{r}\right) .$$

La circulation totale entre A et B s'obtient par intégration sur r qui varie de $r_A = OA$ à $r_B = OB$

$$\int_{\widehat{AB}} \mathbf{E}.\mathbf{dl} = \frac{q}{4\,\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = \frac{q}{4\,\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right] .$$

Cette expression est bien de la forme $V(A) - V(B)$ à condition de poser :

$$\boxed{V = \frac{q}{4\,\pi\varepsilon_0\,r} + C} \quad . \qquad (2.3)$$

C est une constante d'intégration, le potentiel en un point n'est défini qu'à une constante additive près; seules les différences ont une signification physique. Une convention commode consiste à faire $C = 0$, ce qui revient à supposer $V = 0$ en un point P infiniment éloigné du point source. Nous prendrons dorénavant comme expression du potentiel créé par une charge ponctuelle q :

$$\boxed{V = \frac{q}{4\,\pi\varepsilon_0\, r}}\,. \qquad (2.4)$$

2.2.2. La source du champ est un ensemble de charges ponctuelles

Soit q_i une charge quelconque de cet ensemble ; elle crée en un point P situé à une distance r_i de q_i un champ $\mathbf{E}_i$ et un potentiel $V_i = q_i/4\,\pi\varepsilon_0\, r_i$.

L'addition vectorielle des champs $\mathbf{E}_i$ (cf. (1.6)) entraîne l'addition scalaire des circulations élémentaires $\mathbf{E}_i.\mathbf{dl}$. Le potentiel total V est donc la somme scalaire des potentiels V_i

$$\boxed{V = \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\sum \frac{q_i}{r_i}}\,. \qquad (2.5)$$

2.2.3. La source du champ est une distribution continue de charges

Chaque élément de la distribution porte une charge quasi ponctuelle de valeur $\mathrm{d}q = \rho\,\mathrm{d}v$ pour une distribution en volume ou $\mathrm{d}q = \sigma\,\mathrm{d}S$ pour une distribution en surface. L'addition des potentiels conduit selon le cas à une intégrale triple ou une intégrale double qui généralisent la relation (2.5)

$$\boxed{V = \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\iiint_v \rho\,\frac{\mathrm{d}v}{r}} \qquad (2.6)$$

$$\boxed{V = \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\iint_S \sigma\,\frac{\mathrm{d}S}{r}}\,. \qquad (2.7)$$

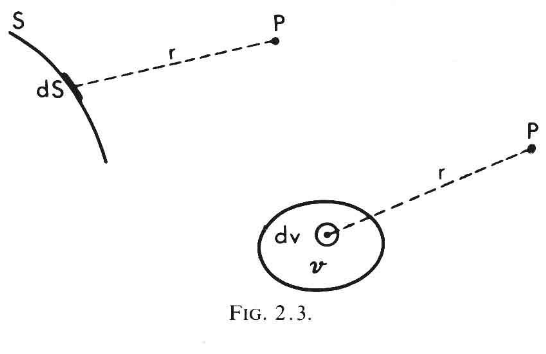


Fig. 2.3.

Lorsque le point P est pris à l'intérieur de la distribution, il y a nécessairement une valeur de r qui s'annule ; le potentiel garde néanmoins une valeur finie pourvu que la densité de charge soit elle-même finie. Voir la démonstration de cette continuité du potentiel dans la remarque complémentaire RC 2.1.

2.3. Travail d'une force électrostatique

Soit une charge q qui se déplace dans un champ de A en B. Comme en tout point de la trajectoire la force électrique $\mathbf{f}$ est liée au champ $\mathbf{E}$ par $\mathbf{f} = q\mathbf{E}$ (cf. (1.1)), le travail de $\mathbf{f}$ noté $W_A^B(\mathbf{f})$ est égal à la circulation de $\mathbf{E}$ multipliée par le scalaire q, d'où :

$$W_A^B(\mathbf{f}) = q\int_{\widehat{AB}} \mathbf{E}.\mathbf{dl}\,.$$

D'après (2.1) :

$$\boxed{W_A^B(\mathbf{f}) = q[V(A) - V(B)]}\,. \qquad (2.8)$$

Cette relation permet de définir l'unité de différence de potentiel (d.d.p) $V(A) - V(B) = 1$, lorsque $W_A^B = 1$ et $q = 1$.

Dans le système international (S.I.) cette unité est **le volt** (V).

Le volt est la d.d.p. entre deux points tels que, lors du déplacement d'un coulomb de l'un à l'autre, la force électrique effectue un travail d'un joule.

Les dimensions d'une d.d.p. sont donc $[V] = [W]/[Q]$.

La relation (2.8) nous permet encore de définir une nouvelle unité de travail et d'énergie très utilisée en physique atomique : **l'électron-volt** (eV).

Prenons pour q la charge « élémentaire » e (valeur absolue de la charge d'un électron) et prenons $V(A) - V(B) = 1$ V ; le travail correspondant est appelé électron-volt.

Comme $e = 1{,}6.10^{-19}$ C

$$\boxed{1\ \mathrm{eV} = 1{,}6.10^{-19}\ \mathrm{J}}\,.$$

2.4. Relations entre champ et potentiel

2.4.1. Le champ comme dérivée de la fonction potentiel

La circulation élémentaire du champ $\mathbf{E}$ entre un point P où le potentiel est V et un point infiniment voisin P' où le potentiel est $V + \mathrm{d}V$ a pour valeur $\mathbf{E}.\mathbf{dl}$ (avec $\mathbf{dl} = \mathbf{PP'}$) et d'après (2.1) cette circulation a pour valeur

$$V - (V + \mathrm{d}V) = -\,\mathrm{d}V\,,\quad \mathbf{E}.\mathbf{dl} = -\,\mathrm{d}V\,. \qquad (2.9)$$

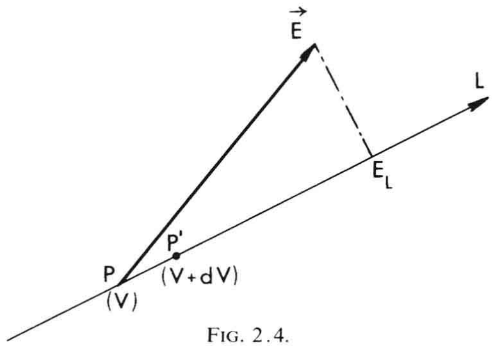


FIG. 2.4.

Sur un axe orienté L passant par P et P', le vecteur $\mathbf{E}$ a une projection $\mathbf{E}_L$ de valeur algébrique E_L, la mesure algébrique de **dl** est dl. La relation précédente s'écrit encore :

$$E_L\,\mathrm{d}l = -\,\mathrm{d}V\,, \quad \boxed{E_L = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l}}\,. \qquad (2.10)$$

Une discussion algébrique montre que $\mathbf{E}_L$ est dirigé dans le sens des potentiels décroissants.
Lorsque les directions de L et de $\mathbf{E}$ sont confondues : $E_L = E$

$$\boxed{E = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l}}\,. \qquad (2.11)$$

Cette relation n'est qu'un cas particulier de la relation générale (2.10) ; c'est dans cette direction particulière que la variation dV/dl est maximale.

2.4.2. Unité de champ

La relation (2.11) nous montre que le champ a pour dimension $[V]/[L]$. Il s'exprime donc en **volt par mètre** (V/m).

2.4.3. Champ et gradient du potentiel

Si nous prenons successivement comme axe L les trois axes d'un trièdre trirectangle de référence, en désignant les composantes de $\mathbf{E}$ par E_x, E_y, E_z, la relation (2.10) nous permet d'écrire

$$\boxed{E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}\,;\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}\,;\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}} \qquad (2.12)$$

V est fonction de x, y, z ; le symbole $\partial V/\partial x$ représente une dérivée « partielle » c'est-à-dire une dérivée par rapport à la seule variable x ; y et z sont à considérer comme des constantes.

On appelle **gradient d'une fonction scalaire** un vecteur dont les composantes sur les axes x, y, z sont les dérivées partielles de la fonction par rapport respectivement à x, y, z ; c'est-à-dire que **grad** V a pour composantes $\partial V/\partial x$, $\partial V/\partial y$, $\partial V/\partial z$.
La relation (2.12) prend donc la forme équivalente

$$\boxed{\mathbf{E} = -\,\mathbf{grad}\,V}\,. \qquad (2.13)$$

La relation (2.13) est équivalente à la relation vectorielle

$$\boxed{\mathbf{rot}\,\mathbf{E} = 0}\,. \qquad (2.14)$$

(cf. RC 2.2).

2.4.4. Surfaces équipotentielles

Une **surface équipotentielle** est une surface telle qu'en tous ses points le potentiel a même valeur ; son équation est $V(x, y, z) = \mathrm{Cte}$.
Démontrons que le champ $\mathbf{E}$ est normal en tout point à la surface équipotentielle passant par ce point.
En effet le long d'un trajet **dl** infiniment petit, pris sur une équipotentielle, on a d$V = 0$; il résulte de (2.9) que $\mathbf{E}.\mathbf{dl} = 0$ ce qui indique que $\mathbf{E}$ est orthogonal à tout déplacement **dl** sur l'équipotentielle ; ceci démontre la propriété.
Il en résulte que les lignes de champ sont les trajectoires orthogonales aux surfaces équipotentielles.
Si dn est un élément de longueur pris sur une normale orientée N à la surface équipotentielle, on a d'après (2.11)

$$\boxed{E = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n}}\,. \qquad (2.15)$$

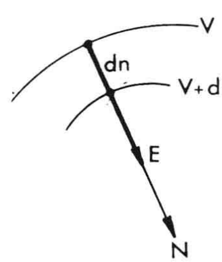


FIG. 2.5.