DE GRUYTER LEHRBUCH

Hans-Joachim Kowalsky

Lineare Algebra

7. Auflage

Walter de Gruyter
Berlin · New York

de Gruyter Lehrbuch

Alexander Aigner

Zahlentheorie

Groß-Oktav. 217 Seiten. 1974. Gebunden DM 34,–
ISBN 3 11 002065 3

Heinz Bauer

Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie

2., erweiterte Auflage, Groß-Oktav. 407 Seiten. 1974.
Gebunden DM 48,– ISBN 3 11 004624 5

L. L. Helms

Einführung in die Potentialtheorie

Groß-Oktav. 305 Seiten. 1973. Gebunden DM 48,–
ISBN 3 11 002039 4

Arnold Schönhage

Approximationstheorie

Groß-Oktav. 212 Seiten. 1971. Gebunden DM 48,–
ISBN 3 11 001982 5

Lothar Jantscher

Distributionen

Groß-Oktav. 367 Seiten. 1971. Gebunden DM 68,–
ISBN 3 11 001972 8

Hartmut Ehrig
Michael Pfender

Kategorien und Automaten

Unter Mitarbeit von Studenten der Mathematik und Informatik.
Groß-Oktav. 170 Seiten. 1972. Kartoniert DM 28,–
ISBN 3 11 003902 9

Georg Aumann
Otto Haupt

Einführung in die reelle Analysis

I. Funktionen einer reellen Veränderlichen.
3., völlig umgestaltete Auflage von Haupt-Aumann-Pauc, Differential- und Integralrechnung.
Groß-Oktav. 319 Seiten. 1974. Gebunden DM 98,–
ISBN 3 11 001970 1

Preisänderungen vorbehalten

W DE G

Walter de Gruyter
Berlin · New York

de Gruyter Lehrbuch

Hans-Joachim Kowalsky

Einführung in die lineare Algebra
2. Auflage
Groß-Oktav. 233 Seiten. 1974. Plastik flexibel DM 18,–
ISBN 3 11 004802 7

Hans-Joachim Kowalsky

Vektoranalysis I
Groß-Oktav. 311 Seiten. 1974. Plastik flexibel DM 28,–
ISBN 3 11 004643 1

B. Hornfeck
L. Lucht

Einführung in die Mathematik
Groß-Oktav. 127 Seiten. 1970. Plastik flexibel DM 18,–
ISBN 3 11 006332 8

Bernhard Hornfeck

Algebra
2., verbesserte Auflage. Groß-Oktav. 271 Seiten. 1973.
Gebunden DM 28,– ISBN 3 11 004455 2

Friedrich A. Willers

Methoden der praktischen Analysis
4., verbesserte Auflage, bearbeitet von Jürgen Tippe.
Groß-Oktav. 445 Seiten. Mit 93 Figuren. 1971.
Gebunden DM 58,– ISBN 3 11 001988 4

Josef Wloka

Funktionalanalysis und Anwendungen
Groß-Oktav. 291 Seiten. 1971. Gebunden DM 48,–
ISBN 3 11 001989 2

Martin Barner
Friedrich Flohr

Analysis
2 Bände. Groß-Oktav. Gebunden.
Band 1: 489 Seiten. 1974. DM 48,– ISBN 3 11 004691 1
Band 2: Etwa 300 Seiten. In Vorbereitung ISBN 3 11 004692 X

Preisänderungen vorbehalten

Walter de Gruyter
Berlin · New York

Mathematik in der Sammlung Göschen

Arnold Scholz

Einführung in die Zahlentheorie

Überarbeitet und herausgegeben von B. Schöneberg.
5. Auflage. 128 Seiten. 1973. DM 9,80
ISBN 3 11 004423 4 (Band 5131)

Erich Kamke

Mengenlehre

7. Auflage. 194 Seiten. Mit 6 Figuren. 1971. DM 7,80
ISBN 3 11 003911 7 (Band 999/999a)

Konrad Knopp

Elemente der Funktionstheorie

8. Auflage. 144 Seiten. Mit 23 Figuren. 1971. DM 4,80
ISBN 3 11 003574 X (Band 1109)

Konrad Knopp

Funktionentheorie

Band I: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen.
12. Auflage. 144 Seiten. Mit 8 Figuren. 1970. DM 4,80
ISBN 3 11 002749 6 (Band 668)

Band II: Anwendungen und Weiterführung der allgemeinen Theorie.
12. Auflage. 130 Seiten. Mit 7 Figuren. 1971. DM 4,80
ISBN 3 11 006164 3 (Band 703)

Konrad Knopp

Aufgabensammlung zur Funktionentheorie

Band I: Aufgaben zur elementaren Funktionentheorie.
7. Auflage. 135 Seiten. 1965. DM 4,80
ISBN 3 11 006197 X (Band 877)

Band II: Aufgaben zur höheren Funktionentheorie.
7. Auflage. 151 Seiten. 1971. DM 4,80
ISBN 3 11 003573 1 (Band 878)

Ludwig Baumgartner

Gruppentheorie

5., unveränderte Auflage. 190 Seiten. Mit 3 Tafeln.
1972. DM 7,80 ISBN 3 11 001997 3 (Band 837/837 a)

Preisänderungen vorbehalten

de Gruyter Lehrbuch
Kowalsky · Lineare Algebra

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

Lineare Algebra

von
Hans-Joachim Kowalsky

7. Auflage

Walter de Gruyter · Berlin · New York 1975

Dr. rer. nat. *Hans-Joachim Kowalsky*
o. Professor für Mathematik an der Technischen Universität Braunschweig

Copyright 1974 by Walter de Gruyter & Co., vormals G.J. Göschen'sche Verlagshandlung J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung – Georg Reimer – Karl J. Trübner – Veit & Comp., Berlin 30 – Alle Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie der Übersetzung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (durch Photokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des Verlages reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden. – Satz: Walter de Gruyter & Co., Berlin – Druck: Mercedes-Druck, Berlin – Bindearbeiten: Mikolai, Berlin. – Printed in Germany
ISBN 3 11 005859 6

Vorwort

Die Lineare Algebra muß heute zu den wichtigsten Grundstrukturen gerechnet werden, auf denen weite Teile der Mathematik basieren. Die Vertrautheit mit den Begriffsbildungen und Ergebnissen der Linearen Algebra gehört daher mit an den Anfang des Mathematikstudiums. Demgemäß wendet sich auch das vorliegende Lehrbuch an den Anfänger, bei dem indes bereits eine gewisse Übung im mathematischen Denken und Schließen sowie einige grundsätzliche Kenntnisse vorausgesetzt werden. In Vorlesungen wird die Lineare Algebra häufig im Rahmen der Analytischen Geometrie behandelt. Dieses Buch ist jedoch kein Lehrbuch der Analytischen Geometrie: die Anwendung der Linearen Algebra auf die Geometrie steht nicht im Vordergrund und erfolgt auch nur in dem erforderlichen Umfang.

Der auf den Anfänger bezogene Lehrbuchcharakter und der beschränkte Umfang erforderten auch eine Beschränkung in der Stoffauswahl. So wird die Lineare Algebra hier rein als die Theorie der Vektorräume über kommutativen Körpern entwickelt, während auf den allgemeineren Begriff des Moduls nicht eingegangen wird. Andererseits ist jedoch der Begriff des Vektorraums von vornherein möglichst allgemein und ohne Dimensionseinschränkung gefaßt. Allerdings wird hierbei auf Fragen, die speziellere Kenntnisse erfordern, nur in Hinweisen oder besonderen Ergänzungen eingegangen.

Dem Verlag möchte ich an dieser Stelle für sein vielfältiges Entgegenkommen und dafür danken, daß er das Erscheinen dieses Buches ermöglicht hat. Mein besonderer Dank gilt Fräulein A. M. Fraedrich, die die mühevollen Korrekturarbeiten auf sich genommen und mich mit wertvollen Ratschlägen unterstützt hat.

H.-J. Kowalsky

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 8

Erstes Kapitel

Grundbegriffe

§ 1 Mengentheoretische Grundbegriffe 11
§ 2 Gruppen 15
§ 3 Körper und Ringe 19
§ 4 Vektorräume 23

Zweites Kapitel

Unterräume, Basis, Koordinaten

§ 5 Unterräume 29
§ 6 Basis und Dimension 33
§ 7 Koordinaten 40

Drittes Kapitel

Abbildungen

§ 8 Lineare Abbildungen 49
§ 9 Abbildungsräume, Matrizen 55
§ 10 Produkte von Abbildungen und Matrizen 61
§ 11 Lineare Selbstabbildungen 66

Viertes Kapitel

Lineare Gleichungssysteme, Determinanten

§ 12 Lineare Gleichungssysteme 71
§ 13 Determinanten 81
§ 14 Berechnung von Determinanten, Entwicklungssatz 89
§ 15 Anwendungen 95

Fünftes Kapitel

Äquivalenz und Ähnlichkeit von Matrizen

§ 16 Äquivalenz von Matrizen 100
§ 17 Ähnlichkeit, Eigenvektoren, Eigenwerte 105

Sechstes Kapitel

Euklidische und unitäre Vektorräume

§ 18 Das skalare Produkt 115
§ 19 Betrag und Orthogonalität 122

§ 20 Orthogonalisierung ... 128
§ 21 Adjungierte Abbildungen ... 136
§ 22 Selbstadjungierte Abbildungen ... 143
§ 23 Orthogonale und unitäre Abbildungen ... 149
§ 24 Drehungen ... 155

Siebentes Kapitel

Anwendungen in der Geometrie

§ 25 Affine Räume ... 165
§ 26 Affine Abbildungen ... 171
§ 27 Projektive Räume ... 177
§ 28 Projektivitäten ... 186
§ 29 Projektive Hyperflächen 2. Ordnung ... 191
§ 30 Affine Hyperflächen 2. Ordnung ... 200

Achtes Kapitel

Quotientenräume, direkte Summe, direktes Produkt

§ 31 Quotientenräume ... 212
§ 32 Direkte Summe und direktes Produkt ... 216
§ 33 Zusammenhang mit linearen Abbildungen ... 222

Neuntes Kapitel

Allgemeines Normalformenproblem

§ 34 Polynome ... 228
§ 35 Allgemeine Normalform ... 234
§ 36 Praktische Berechnung, Jordansche Normalform ... 242

Zehntes Kapitel

Duale Raumpaare und Dualraum

§ 37 Duale Raumpaare ... 250
§ 38 Der Dualraum ... 256
§ 39 Duale Abbildungen ... 260

Elftes Kapitel

Multilineare Algebra

§ 40 Multilineare Abbildungen und Tensorprodukte ... 265
§ 41 Tensorielle Produkte linearer Abbildungen ... 272
§ 42 Tensormultiplikation und Verjüngung ... 277
§ 43 Tensorielle Abbildungen ... 284
§ 44 Alternierende Abbildungen ... 288
§ 45 Das äußere Produkt ... 296
§ 46 Tensoralgebra und äußere Algebra ... 303
§ 47 Innere Produkte, Zerlegbarkeit ... 309

Lösungen der Aufgaben ... 315

Namen- und Sachverzeichnis ... 337

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

Einleitung

In der Mathematik hat man es vielfach mit Rechenoperationen zu tun, die sich zwar auf völlig verschiedene Rechengrößen beziehen und somit auch auf ganz unterschiedliche Weise definiert sein können, die aber trotz dieser Verschiedenheit gemeinsamen Rechenregeln gehorchen. In der Algebra abstrahiert man nun von der speziellen Natur der Rechengrößen und Rechenoperationen und untersucht ganz allgemein die Gesetzmäßigkeiten, denen sie unterliegen. Ausgehend von einigen Rechenregeln, die man als Axiome an den Anfang stellt, entwickelt man die Theorie der durch diese Axiome charakterisierten abstrakten Rechenstrukturen. Die Lineare Algebra bezieht sich speziell auf zwei Rechenoperationen, die sogenannten linearen Operationen, und auf die entsprechenden Rechenstrukturen, die man als Vektorräume bezeichnet. Die grundlegende Bedeutung der Linearen Algebra besteht darin, daß zahlreiche konkrete Strukturen als Vektorräume aufgefaßt werden können, so daß die allgemein gewonnenen Ergebnisse der abstrakten Theorie auf sie anwendbar sind. So besteht z. B. die Analytische Geometrie in erster Linie in der Anwendung der Linearen Algebra auf die Geometrie, die die algebraische Fassung und rechnerische Behandlung geometrischer Gebilde ermöglicht. Umgekehrt gestattet es aber gerade diese Anwendung, Begriffe und Resultate der abstrakten Theorie geometrisch zu deuten und diese geometrischen Interpretationen auf völlig andersartige Modelle von Vektorräumen, wie etwa Funktionenräume, zu übertragen.

Das Hauptinteresse der Linearen Algebra gilt indes nicht dem einzelnen Vektorraum, sondern den Beziehungen, die zwischen Vektorräumen bestehen. Derartige Beziehungen werden durch spezielle Abbildungen beschrieben, die in bestimmter Hinsicht mit den linearen Operationen verträglich sind und die man lineare Abbildungen nennt. Ihr Studium erfolgt in zweierlei Weise: Einerseits werden einzelne Abbildungen hinsichtlich ihrer Wirkung und hinsichtlich der Möglichkeiten ihrer Beschreibung betrachtet. In diese Untersuchungen geht noch wesentlich die interne Struktur der Vektorräume ein. Zweitens aber interessiert man sich für die Struktur der Gesamtheit aller linearen Abbildungen, die man auch als Kategorie der linearen Abbildungen bezeichnet. Hierbei treten die Vektorräume nur noch als bloße Objekte ins

Spiel, zwischen denen Abbildungen definiert sind, deren interne Struktur aber nicht mehr in Erscheinung tritt. Dennoch können interne Eigenschaften von Vektorräumen auch extern in der Kategorie der linearen Abbildungen beschrieben werden; und gerade diese Möglichkeit spielt in den letzten Kapiteln eine wesentliche Rolle. Vielfach repräsentieren die dort konstruierten Vektorräume hinsichtlich ihrer internen Struktur keineswegs neue Vektorraumtypen. Neu aber ist ihre externe Charakterisierung, die die Existenz wichtiger Abbildungen sichert.

An den Anfänger wendet sich dieses Buch hauptsächlich im Sinn einer Ergänzung und Vertiefung. Seine Lektüre erfordert zwar keine speziellen Vorkenntnisse, setzt aber doch bei dem Leser eine gewisse Vertrautheit mit mathematischen Begriffsbildungen und Beweismethoden voraus. Die Stoffanordnung folgt nur teilweise systematischen Gesichtspunkten, die vielfach zugunsten didaktischer Erwägungen durchbrochen sind. Zahlreiche Fragen, die in den Text nicht aufgenommen werden konnten oder die bei dem Leser weitergehende Kenntnisse voraussetzen, werden in besonderen Ergänzungen und meist in Form von Aufgaben behandelt. Auf ein Literaturverzeichnis wurde verzichtet. Jedoch seien in diesem Zusammenhang besonders die entsprechenden Werke von N. BOURBAKI und W. GRAEUB genannt, aus denen zahlreiche Anregungen übernommen wurden.

Bei der Numerierung wurde folgendes Prinzip angewandt: Definitionen, Sätze, Beispiele und Aufgaben sind an erster Stelle durch die Nummer des jeweiligen Paragraphen gekennzeichnet. An zweiter Stelle steht bei Definitionen ein kleiner lateinischer Buchstabe, bei Sätzen eine arabische Zahl, bei Beispielen eine römische Zahl und bei Ergänzungen bzw. Aufgaben ein großer lateinischer Buchstabe. Das Ende eines Beweises ist durch das Zeichen ◆ kenntlich gemacht. Neu definierte Begriffe sind im Text durch Fettdruck hervorgehoben; auf sie wird im Sachverzeichnis verwiesen. Am Ende des Buches finden sich die Lösungen der Aufgaben, die aus Platzgründen allerdings sehr knapp gehalten sind. Bei numerischen Aufgaben, deren Schema vorher behandelt wurde, sind im allgemeinen nur die Ergebnisse angegeben. Bei theoretischen Aufgaben handelt es sich meist um Beweisskizzen oder um einzelne Hinweise, aus denen der Beweisgang entnommen werden kann.

Erstes Kapitel

Grundbegriffe

Die lineare Algebra kann kurz als die Theorie zweier spezieller Rechenoperationen, der sogenannten linearen Operationen, gekennzeichnet werden. Die diesen Operationen entsprechenden algebraischen Strukturen werden lineare Räume oder Vektorräume genannt. Man kann daher die lineare Algebra auch als Theorie der Vektorräume bezeichnen. Der somit für das ganze Buch grundlegende Begriff des Vektorraums wird einschließlich einiger einfacher Eigenschaften im letzten Paragraphen dieses Kapitels behandelt. Vorbereitend wird in § 2 auf eine allgemeinere algebraische Struktur, die Gruppen, eingegangen. Schließlich setzt die allgemeine Definition des Vektorraums noch den Begriff des Körpers voraus, zu dem man durch die abstrakte Behandlung der rationalen Rechenoperationen geführt wird. Mit den Körpern und den mit ihnen eng zusammenhängenden Ringen befaßt sich der dritte Paragraph.

Neben diese algebraischen Grundlagen treten als wesentliche Voraussetzung noch einige einfache Begriffe der Mengenlehre, die im ersten Paragraphen aus Gründen der Bezeichnungsnormierung zusammengestellt werden. Der Mengenbegriff wird dabei als intuitiv gegeben vorausgesetzt; auf die axiomatische Begründung wird nicht eingegangen.

§ 1 Mengentheoretische Grundbegriffe

Die Objekte, aus denen eine Menge besteht, werden ihre **Elemente** genannt. Für „x *ist ein Element der Menge* M“ schreibt man „$x \in M$“. Die Negation dieser Aussage wird durch „$x \notin M$“ wiedergegeben. Statt „$x_1 \in M$ *und* ... *und* $x_n \in M$“ wird kürzer „$x_1, \ldots, x_n \in M$“ geschrieben. Eine spezielle Menge ist die **leere Menge**, die dadurch charakterisiert ist, daß sie überhaupt keine Elemente besitzt. Sie wird mit dem Symbol $\emptyset$ bezeichnet. Weitere häufig auftretende Mengen sind:

Z Menge aller ganzen Zahlen.
R Menge aller reellen Zahlen.
C Menge aller komplexen Zahlen.

Eine Menge M heißt **Teilmenge** einer Menge N (in Zeichen: $M \leq N$), wenn aus $x \in M$ stets $x \in N$ folgt. Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge; außerdem ist jede Menge Teilmenge von sich selbst. Gilt $M \leq N$ und $M \neq N$, so heißt M eine **echte Teilmenge** von N.

Die Elemente einer Menge $\mathfrak{S}$ können selbst Mengen sein. Es wird dann $\mathfrak{S}$ bisweilen auch als **Mengensystem** bezeichnet. Unter dem **Durchschnitt** D eines nicht-leeren Mengensystems $\mathfrak{S}$ versteht man die Menge aller Elemente, die gleichzeitig Elemente aller Mengen des Systems sind: Es ist also $x \in D$ gleichwertig mit $x \in M$ für alle Mengen $M \in \mathfrak{S}$. Man schreibt

$$D = \bigcap_{M \in \mathfrak{S}} M \quad \text{oder auch} \quad D = \bigcap \{M\colon M \in \mathfrak{S}\}.$$

Besteht das System aus nur endlich vielen Mengen $M_1, \ldots, M_n$, so bezeichnet man den Durchschnitt dieser Mengen auch mit $M_1 \cap \cdots \cap M_n$. Die Gleichung $M \cap N = \emptyset$ besagt, daß die Mengen M und N kein gemeinsames Element besitzen; es werden dann M und N als **fremde** Mengen bezeichnet.

Ähnlich wie der Durchschnitt wird die **Vereinigung** V eines nicht-leeren Mengensystems $\mathfrak{S}$ definiert: Sie ist die Menge aller derjenigen Elemente, die zu mindestens einer Menge aus $\mathfrak{S}$ gehören. Es ist also $x \in V$ gleichwertig mit $x \in M$ für mindestens eine Menge $M \in \mathfrak{S}$. Man schreibt

$$V = \bigcup_{M \in \mathfrak{S}} M \quad \text{oder auch} \quad V = \bigcup \{M\colon M \in \mathfrak{S}\}$$

und im Fall eines endlichen Systems entsprechend $M_1 \cup \cdots \cup M_n$. Mit Hilfe der Definitionen von Durchschnitt und Vereinigung ergeben sich unmittelbar folgende Beziehungen, deren Beweis dem Leser überlassen bleiben möge:

$$M \cap (N_1 \cup N_2) = (M \cap N_1) \cup (M \cap N_2),$$
$$M \cup (N_1 \cap N_2) = (M \cup N_1) \cap (M \cup N_2),$$
$$M \cap N = M \text{ ist gleichbedeutend mit } M \leq N,$$
$$M \cup N = M \text{ ist gleichbedeutend mit } N \leq M.$$

Endliche Mengen können durch Angabe ihrer Elemente gekennzeichnet werden. Man schreibt $\{x_1, \ldots, x_n\}$ für diejenige Menge, die genau aus den angegebenen n Elementen besteht. Die einelementige Menge $\{x\}$ ist von ihrem Element x zu unterscheiden: So ist z. B. $\{\emptyset\}$ diejenige Menge, deren einziges Element die leere Menge ist.

Ein anderes Mittel zur Beschreibung von Mengen besteht darin, daß man alle Elemente einer gegebenen Menge X, die eine gemeinsame Eigenschaft $\mathfrak{E}$ besitzen, zu einer neuen Menge zusammenfaßt. Bedeutet $\mathfrak{E}(x)$, daß x die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ besitzt, so bezeichnet man diese Menge mit $\{x\colon x \in X,\ \mathfrak{E}(x)\}$.

So ist z. B. $\{x\colon x \in \mathbf{Z},\ x^2 = 1\}$ die aus den Zahlen $+1$ und -1 bestehende Teilmenge der Menge aller ganzen Zahlen. Bei dieser Art der Mengenbildung ist die Angabe der Bezugsmenge X, aus der die Elemente entnommen werden, wesentlich, da sonst widerspruchsvolle Mengen entstehen können (vgl. 1 A). Da die Bezugsmenge jedoch im allgemeinen durch den jeweiligen Zusammenhang eindeutig bestimmt ist, soll in diesen Fällen auf ihre explizite Angabe verzichtet werden.

Ein wichtiges Beweishilfsmittel ist das **Zornsche Lemma**: Es sei $\mathfrak{S}$ ein nicht-leeres Mengensystem. Eine nicht-leere Teilmenge $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{S}$ heißt eine **Kette**, wenn aus $M_1, M_2 \in \mathfrak{K}$ stets $M_1 \leq M_2$ oder $M_2 \leq M_1$ folgt. Eine Menge $M \in \mathfrak{S}$ heißt ein **maximales Element** von $\mathfrak{S}$, wenn aus $N \in \mathfrak{S}$ und $M \leq N$ stets $M = N$ folgt. Das Zornsche Lemma lautet nun:

Wenn für jede Kette $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{S}$ die Vereinigungsmenge $\bigcup \{K\colon K \in \mathfrak{K}\}$ ein Element von $\mathfrak{S}$ ist, dann gibt es zu jeder Menge $A \in \mathfrak{S}$ ein maximales Element M von $\mathfrak{S}$ mit $A \leq M$.

Es seien jetzt X und Y zwei nicht-leere Mengen. Unter einer **Abbildung** φ von X in Y (in Zeichen: $\varphi\colon X \to Y$) versteht man dann eine Zuordnung, die jedem Element $x \in X$ eindeutig ein Element $y \in Y$ als **Bild** zuordnet. Das Bild y von x bei der Abbildung φ wird mit $\varphi(x)$ oder auch einfach mit φx bezeichnet. Die Menge X heißt der **Definitionsbereich** der Abbildung φ, die Menge Y ihr **Bildbereich**.

Ist φ eine Abbildung von X in Y und M eine Teilmenge von X, so nennt man die Menge aller Bilder von Elementen $x \in M$ entsprechend das Bild der Menge M und bezeichnet es mit $\varphi(M)$ oder einfach mit φM. Es gilt also

$$\varphi M = \{\varphi x\colon x \in M\},$$

und φM ist eine Teilmenge von Y. Das Bild der leeren Menge ist wieder die leere Menge. Weiter ist speziell φX eine Teilmenge von Y. Gilt sogar $\varphi X = Y$, tritt also jedes Element von Y als Bild eines Elements von X auf, so nennt man φ eine Abbildung von X *auf* Y. Umgekehrt sei N eine Teilmenge von Y. Dann wird die Menge aller Elemente von X, deren Bild ein Element von N ist, das **Urbild** von N bei der Abbildung φ genannt und mit $\varphi^-(N)$ bezeichnet. Es gilt also

$$\varphi^-(N) = \{x\colon \varphi x \in N\},$$

und $\varphi^-(N)$ ist eine Teilmenge von X. Auch wenn $N \neq \emptyset$ gilt, kann $\varphi^-(N)$ die leere Menge sein.

Bei einer Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ können verschiedene Elemente von X dasselbe Bild haben. Ist dies nicht der Fall, folgt also aus $x_1 \neq x_2$ stets $\varphi x_1 \neq \varphi x_2$,

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com