М.Ф. БАРИНОВА
О.В. ГОЛУБЕВА

Задачи и упражнения по классической механике

М. Ф. БАРИНОВА, О. В. ГОЛУБЕВА

Задачи и упражнения по классической механике

ДОПУЩЕНО МИНИСТЕРСТВОМ ПРОСВЕЩЕНИЯ СССР
В КАЧЕСТВЕ УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ
ФИЗИКО МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФАКУЛЬТЕТОВ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1980

ББК 22.3
Б24
УДК 53

Рецензенты:

кафедра теоретической физики Свердловского государственного педагогического института; проф А. А. Яблонский

Баринова М. Ф., Голубева О. В.

Б 24 Задачи и упражнения по классической механике: Учеб. пособие для педагогических институтов. — М.: Высш. школа, 1980. — 176 с., ил.

30 к.

Книга представляет собой пособие для самостоятельной работы по разделу «Классическая механика» курса теоретической физики.

Теоретические основы механики представлены в книге краткими сведениями к темам, которые входят в программу курса Они использованы при разборе типовых задач, что необходимо для приобретения навыков самостоятельного решения приведенных в пособии задач. Перечень вопросов предназначен для закрепления материала

В книгу включены в основном задачи, связанные с инженерной практикой и необходимые для понимания классической механики в эпоху научно-технической революции В пособии уделено большое внимание задачам естественнонаучного характера, в частности посвященным движению космических объектов

Предназначается для студентов педагогических институтов.

Б $\frac{60602-367}{001(01)-80}$ БЗ—4—17—80 1703020000

53
ББК 22.3

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие предназначается для студентов педагогических институтов, изучающих теоретическую механику.

Учитывая, что классическая механика является общетеоретической дисциплиной, охватывающей широкий круг явлений природы, авторы ставили своей целью познакомить будущих учителей с элементами исследования различных явлений природы и развить у них навыки самостоятельного решения задач.

В соответствии с программой по курсу теоретической физики пособие разделено на семь тем.

В начале каждой темы приведены краткие теоретические сведения и основные формулы.

В подборе примеров и задач особое внимание уделено тем из них, которые непосредственно способствуют профессиональной подготовке преподавателя физики в школе.

Учитывая специфику программ по теоретической физике и астрономии для педагогических институтов, авторы уделили большое место таким вопросам, как движение в центральном поле, исследование одномерного движения точки по ее энергии и т. п.

Авторы приносят благодарность рецензентам пособия профессору А. А. Яблонскому и доценту Н. П. Петрову, а также будут признательны читателям за все замечания, направленные на улучшение книги.

Авторы

Тема I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Уравнения движения точки. Траектория точки. Скорость точки. Ускорение точки. Круговое движение точки и его кинематические характеристики. Равномерное и равнопеременное движение точки.

Основные понятия и формулы

Кинематические уравнения движения материальной точки задают ее положение в выбранной системе координат в любой момент времени. *Траекторией* точки называется геометрическое место последовательных положений точки в выбранной системе координат. Уравнения движения точки в конечном виде могут быть:

а) в векторной форме, когда задан радиус-вектор точки как функция времени

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t); \qquad (1.1.1)$$

б) в координатной форме, когда заданы декартовы координаты как функции времени

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t); \qquad (1.1.2)$$

в) в криволинейных координатах

$$q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t), \quad q_3 = q_3(t); \qquad (1.1.3)$$

г) в естественной форме задается траектория точки и закон движения точки по траектории

$$s = s(t), \qquad (1.1.4)$$

где s — дуга траектории.

Переход от уравнений (1.1.2) к уравнению (1.1.4) возможен с помощью равенства

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, \mathrm{d}t. \qquad (1.1.5)$$

Соотношения (1.1.1) и (1.1.2) представляют собой параметрические уравнения траектории, если t — параметр. Вид траектории определяет геометрический характер движения точки: *прямолинейное, круговое, плоское, пространственное.*

На основании уравнения (1.1.1)

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \tag{1.1.6}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \tag{1.1.7}$$

Разложение скорости и ускорения по осям декартовых координат и по осям естественного трехгранника определяется уравнениями

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = \frac{ds}{dt}\boldsymbol{\tau}, \tag{1.1.8}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} = \frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{\tau} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{\mathbf{n}}{\rho}. \tag{1.1.9}$$

Секторная скорость

$$\boldsymbol{\sigma} = {}^1/_2\,[\mathbf{r}, \mathbf{v}]. \tag{1.1.10}$$

Скорость и ускорение определяют в частных случаях кинематический характер движения: при $v = \dot{s} = \mathrm{const}$ движение *равномерное*, при $a_\tau = \dot{v} = \mathrm{const}$ — *равнопеременное.*

При круговом движении по окружности радиуса R дуга $s = R\varphi$ (φ — центральный угол); *угловая скорость*

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \tag{1.1.11}$$

угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{1.1.12}$$

В этом случае $v = \dfrac{ds}{dt} = R\omega$, $\quad a_\tau = R\varepsilon$, $\quad a_n = R\omega^2$.

Примеры и основные типы задач

1. Показать, что линейные функции $x = At + B$, $y = Ct + D$ (A, B, C, D — постоянные) описывают прямолинейное движение точки и траектория ее проходит через начало координат при $B = D = 0$.

2. Показать, что уравнения типа $x = f(t)$, $y = Af(t) + B$ (A, B — постоянные) описывают плоское прямолинейное движение точки.

3. Показать, что уравнения $x = A\sin kt + B$, $y = C\cos kt + D$, $z = Et$ (A, B, C, D, E, k — постоянные) определяют движение по винтовой линии, навитой на эллиптический цилиндр. Найти шаг винтовой линии при $A=C$, $E\neq 0$.

4. Уравнения движения точки заданы в виде $x=A+$ $+Bt^n$, $y=0$, $z=0$. Определить те значения n, при которых движение равномерное и равнопеременное.

Решение. На основании равенств (1.1.8) и (1.1.9) $v=\dot{x}=Bnt^{n-1}$, $a=\dot{v}=\ddot{x}=Bn(n-1)t^{n-2}$. Отсюда следует, что при $n=1$ движение равномерное, а при $n=2$ — равнопеременное.

5. Найти радиус кривизны траектории, если уравнения движения заданы в виде $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$.

Решение. По формулам (1.1.8) и (1.1.9) найдем: $v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2$, $a^2=\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2=\dot{v}^2+v^4/\rho^2$, откуда

$$\rho=\sqrt{v^4/(a^2-\dot{v}^2)}.$$

6. Уравнения движения в цилиндрических координатах имеют такой вид [см. формулы (1.1.3)]: $\rho=At+B$, $\varphi=Ct+D$, $z=Et+F$, где A, B, C, D, E, F — постоянные. Найти траекторию, скорость, ускорение и секторную скорость точки в трех случаях: а) $A=0$; б) $C=0$; в) $E=$ $=F=B=D=0$.

Решение. Запишем уравнение движения в векторной форме, используя цилиндрические координаты и их единичные векторы $\boldsymbol{\rho}^0$, $\boldsymbol{\varphi}^0$, $\mathbf{k}$. Имеем $\mathbf{r}=\rho\boldsymbol{\rho}^0+z\mathbf{k}$. Так как $\dot{\boldsymbol{\rho}}^0=\dot{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^0$, $\dot{\boldsymbol{\varphi}}^0=-\dot{\varphi}\boldsymbol{\rho}^0$, то

$$\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}=\dot{\rho}\boldsymbol{\rho}^0+\rho\dot{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^0+\dot{z}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{a}=\dot{\mathbf{v}}=\left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2\right)\boldsymbol{\rho}^0+\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\varphi}\right)\boldsymbol{\varphi}^0+\ddot{z}\mathbf{k}.$$

Случай а). Исключая время из уравнений движения, найдем траекторию: $(\varphi-D)/C=(z-F)/E$. Траектория — винтовая линия с шагом $h=2\pi E/C$. Скорость, ускорение и секторная скорость определяются так:

$$\mathbf{v}=BC\boldsymbol{\varphi}^0+E\mathbf{k},\quad \mathbf{a}=-BC^2\boldsymbol{\rho}^0,$$

$$\boldsymbol{\sigma}=\frac{1}{2}\mathbf{r}\times\mathbf{v}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\boldsymbol{\rho}^0 & \boldsymbol{\varphi}^0 & \mathbf{k}\\ B & 0 & Et+F\\ 0 & BC & E\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}[B^2C\mathbf{k}-BC(Et+F)\boldsymbol{\rho}^0-BE\boldsymbol{\varphi}^0].$$

Отсюда очевидно, что секторная скорость в процессе движения изменяется по модулю и направлению.

Случай б). Траектория является прямой, уравнение которой $E(\rho - B) - A(z - F) = 0$. Скорость, ускорение и секторная скорость таковы:

$$\mathbf{v} = A\boldsymbol{\rho}^0 + E\mathbf{k}, \quad a = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} = (AF - EB)\,\boldsymbol{\varphi}^0.$$

Случай в). Уравнение траектории $\rho = (A/C)\varphi$ определяет архимедову спираль, следовательно, точка движется равномерно со скоростью A по прямой, которая в свою очередь вращается с постоянной скоростью C. Скорость, ускорение и секторная скорость определяются соответственно равенствами:

$$\mathbf{v} = A\boldsymbol{\rho}^0 + ACt\boldsymbol{\varphi}^0, \quad \mathbf{a} = -AC^2t\boldsymbol{\rho}^0 + 2AC\boldsymbol{\varphi}^0, \quad \sigma = {}^1/_2 A^2 C t^2\,\mathbf{k}.$$

Из последнего равенства следует, что секторная скорость изменяется по модулю, сохраняя свое направление (это обстоятельство является следствием плоской траектории).

7. Определить уравнения движения точки, если ускорение ее задано в виде $a_x = f(t)$, $a_y = a_z = 0$ и $x = x_0$, $y_0 = z_0 = 0$, $v_{x0} = v_0$, $v_{y0} = v_{z0} = 0$ при $t = 0$.

Решение. Проинтегрируем по t функцию a_x. Имеем

$$v_x = \int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t + v_0, \quad x = \int_0^t\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t + v_0 t + x_0.$$

8. Определить уравнения движения точки, если она движется по эллипсу и ее секторная скорость относительно центра эллипса постоянна.

Решение. Траектория точки определяется уравнением $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Секторная скорость (так как движение плоское) $\sigma = (1/2)(x\dot{y} - y\dot{x}) = \sigma_0$. Из этих равенств найдем:

$$x\dot{x}/a^2 + y\dot{y}/b^2 = 0, \quad x\dot{y} - y\dot{x} = 2\sigma.$$

Отсюда

$$\dot{x} = -\frac{2\sigma_0}{b^2}\,y, \quad \dot{y} = \frac{2\sigma_0}{a^2}\,x,$$

$$\ddot{x} = -\frac{2\sigma_0}{b^2}\dot{y} = -\frac{4\sigma_0^2}{a^2 b^2}x, \quad \ddot{y} = \frac{2\sigma_0}{a^2}\dot{x} = -\frac{4\sigma_0^2}{a^2 b^2}y.$$

Интегрируя эти равенства, определим уравнения движения:

$$x = A\sin\left(\frac{2\sigma_0}{ab}t + \varepsilon_1\right), \quad y = B\sin\left(\frac{2\sigma_0}{ab}t + \varepsilon_2\right),$$

где постоянные A, B, ε_1, ε_2 находятся из начальных условий.

9. Точка M обода колеса вращается вокруг оси C по закону $s = At^2 + Bt + C$. Центр C колеса движется со скоростью, проекции которой на оси Ox, Oy заданы: $v_{xC} = A_1\cos\omega t$, $v_{yC} = A_1\sin\omega t$. Составить уравнения движения произвольной точки обода колеса M, удаленной от C на расстояние R (рис. 1.1.1 *а, б*).

Решение. Из рис. (1.1.1) следует:

$$x_M = x_C + x'_{1M} = x_C + R\cos\varphi, \quad y_M = y_C + y_{1M} = y_C + R\sin\varphi,$$

где

$$\varphi = \int_0^t \Omega\,dt = \int_0^t \frac{\dot{s}}{R}\,dt = \frac{1}{R}(At^2 + Bt) + \varphi_0,$$

$$x_C = \int_0^t v_{xC}\,dt + x_{CO} = \frac{A_1}{\omega}\sin\omega t + x_{CO},$$

$$y_C = \int_0^t v_{yC}\,dt + y_{CO} = -\frac{A_1}{\omega}\cos\omega t + \frac{A_1}{\omega} + y_{CO}.$$

В частном случае при $A_1 = A = 0$, что соответствует неподвижному центру колеса C и его равномерному вращению, уравнения движения точки M имеют такой вид:

$$x_{1M} = R\cos\left(\frac{Bt}{R} + \varphi_0\right), \quad y_{1M} = R\sin\left(\frac{Bt}{R} + \varphi_0\right).$$

10. Найти траекторию и уравнения годографов векторов скорости и ускорения точки M, лежащей на середине шатуна кривошипно-шатунного механизма (рис. 1.1.2 *а, б, в, г*), если $OA=AB=l$, $\dot{\varphi}=\omega=\mathrm{const}$, $\varphi=\omega t$.

Решение. Из рис. 1.1.2 следует, что точка M имеет координаты: $x=(3/2)\,l\cos\omega t$, $y=(1/2)\,l\sin\omega t$. Откуда

$$v_x=-(3/2)\,l\omega\sin\omega t,\quad v_y=(1/2)\,l\omega\cos\omega t,$$

$$a_x=-(3/2)\,l\omega^2\cos\omega t,\quad a_y=-(1/2)\,l\omega^2\sin\omega t.$$

Уравнения траектории и годографов векторов скорости и ускорения получаем, исключая время t из последних уравнений. Это эллипсы, уравнения которых имеют следующий вид:

$$\frac{x^2}{(3l/2)^2}+\frac{y^2}{(l/2)^2}=1,$$

$$\frac{v_x^2}{(3l\omega/2)^2}+\frac{v_y^2}{(l\omega/2)^2}=1,$$

$$\frac{a_x^2}{(3l\omega^2/2)^2}+\frac{a_y^2}{(l\omega^2/2)^2}=1.$$

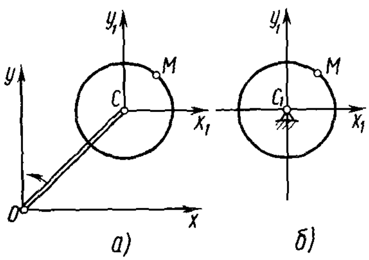

Рис. 1.1 1

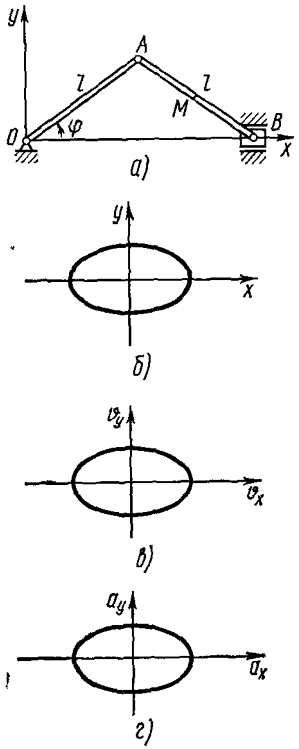

Рис. 1.1.2

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Самолет летит на высоте $h=4000$ м над Землей с горизонтальной скоростью $v_0=500$ м/с На каком расстоянии x, измеряемом по горизонтальной прямой от данной точки B (рис 1 1 3), должен быть сброшен с самолета без начальной относительной скорости груз для того, чтобы он упал в эту точку? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Движение снаряда в вертикальной плоскости описывается уравнениями $x=300t$, $y=400t-5t^2$ (x, y — в м; t — в с). Найти скорость и ускорение в начальный момент, высоту и дальность обстрела, радиус кривизны траектории в начальной и наивысшей точках.

3. Из орудия, ось которого образует угол 30° с горизонтом, выпущен со скоростью 500 м/с снаряд. Предполагая, что снаряд имеет только ускорение свободного падения $g=9{,}81$ м/с², найти годограф скорости снаряда и скорость точки, вычерчивающей годограф.

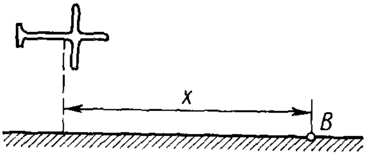

Рис. 1 1 3

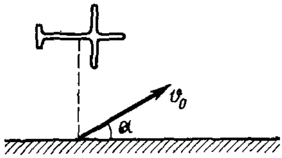

Рис. 1.1.4

4. Самолет летит над Землей на высоте h с гориознтальной скоростью v_1 Из орудия произведен выстрел по самолету в тот момент, когда самолет находился на одной вертикали с орудием (рис 1.1 4) Найти: а) какому условию должна удовлетворять начальная скорость v_0 снаряда для того, чтобы он мог попасть в самолет; б) под каким углом α к горизонту должен быть сделан выстрел. Сопротивлением воздуха пренебречь

5. Определить угол наклона ствола орудия к горизонту, если цель обнаружена на расстоянии 32 км, а начальная скорость снаряда $v_0=600$ м/с. Сопротивлением воздуха пренебречь

6. Определить скорость и ускорение точки, находящейся на поверхности Земли в Ленинграде, принимая во внимание только вращение Земли вокруг своей оси (широта Ленинграда 60°, радиус Земли 6370 км).

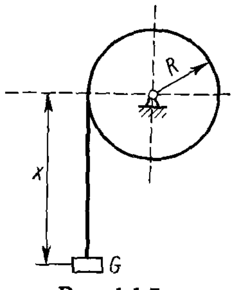

Рис. 1.1.5

7. Вал радиуса $R=10$ см приводится во вращение гирей G, подвешенной к нему на нити (рис. 1.1.5). Движение гири определяется уравнением $x=100t^2$, где x — расстояние гири от места схода нити с поверхности вала, см; t — время, с Определить угловую скорость и угловое ускорение вала, а также полное ускорение точки на поверхности вала в момент t.

8. Вал радиуса R приводится во вращение гирей G, подвешенной к нему на нити (рис 1.1 5). Гиря движется с постоянным ускорением $\ddot{x}=a=\text{const}$ Определить ускорение точек, лежащих на поверхности вала, через пройденный гирей путь.

9. Определить уравнение движения и траекторию точки обода колеса радиуса $R=1$ м, движущегося по прямолинейному пути с постоянной скоростью 20 м/с. Принять, что колесо катится без скольжения; за начало координат взять положение точки на пути, который принять за ось Ox.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как записываются кинематические уравнения движения точки? 2. Какие существуют формы задания уравнений движения? 3. Что называется траекторией точки? Как находится ее уравнение? 4. Какое движение называется плоским, прямолинейным, круговым? 5. Каков механический смысл годографа радиус-вектора? 6. Как определяют скорость и ускорение точки и их проекции на оси декартовой системы координат? 7. Как определяются проекции скорости и ускорения на оси естественного трехгранника? 8. Как направлена скорость по отношению к годографу радиус-вектора? Как направлено ускорение по отношению к годографу вектора скорости? 9. Каков физический смысл касательного и нормального ускорений? 10. Какое движение называется равномерным? равнопеременным? 11. Что называется угловой скоростью и угловым ускорением при круговом движении точки?

2. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ, СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТОЧЕК НЕСВОБОДНОЙ СИСТЕМЫ

Свободные и несвободные механические системы. Классификация связей. Геометрические связи. Ограничения, налагаемые геометрическими связями на скорости и ускорения точек системы, и вариации координат. Число степеней свободы системы. Обобщенные координаты, обобщенные скорости.

Основные понятия и формулы

Механические системы из n точек, на положения которых наложены ограничения, называются *несвободными* (или связанными). Ограничения, наложенные на положения точек системы, называются *геометрическими связями*. Уравнения геометрических связей (если они неосвобождающие) имеют вид

$$f_\alpha(x_1, y_1, z_1, \ldots, z_n t) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, a, \quad a < 3n. \quad (1.2.1)$$

В уравнения кинематических связей входят скорости точек системы, например

$$\varphi_\beta(x_1, \ldots, \dot{x}_1, \ldots, \dot{z}_n, t) = 0, \quad \beta = 1, \ldots, b. \quad (1.2.2)$$

Геометрические связи накладывают ограничения на скорости и ускорения точек системы. Эти ограничения имеют следующий вид:

$$\frac{df_\alpha}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{grad}_\nu f_\alpha \cdot \mathbf{v}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0, \quad (1.2.3)$$

$$\frac{d^2 f_\alpha}{dt^2} = \sum_{\nu=1}^{n} \operatorname{grad}_\nu f_\alpha \cdot \mathbf{a}_\nu + C_\alpha = 0, \qquad (1.2.4)$$

где C_α не зависят от ускорения.

Вариации координат точек этой системы δx_ν, δy_ν, δz_ν ($\nu = 1, \ldots, n$) связаны соотношениями

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu} \delta x_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_\nu} \delta y_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\nu} \delta z_\nu \right) = 0. \qquad (1.2.5)$$

Число независимых вариаций координат точек системы

$$S = 3n - a \qquad (1.2.6)$$

определяет *число степеней свободы* системы.

Обобщенные координаты представляют собой независимые параметры $q_1, \ldots, q_S$, через которые выражаются координаты точек системы x_1, y_1, $z_1, \ldots, z_n$, и уравнения связей обращаются в тождества. Число обобщенных координат равно числу степеней свободы системы. Производная по времени от обобщенной координаты $\dot{q}_k$ ($k = 1, \ldots, S$) называется *обобщенной скоростью*. Скорость $\mathbf{v}_\nu$ точки ν системы ($\nu = 1, \ldots, n$) связана с обобщенными скоростями соотношениями

$$\mathbf{v}_\nu = \dot{\mathbf{r}}_\nu = \sum_{k=1}^{S} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}. \qquad (1.2.7)$$

Примеры и основные типы задач

1. Найти число степеней свободы и обобщенные координаты механической системы, которая состоит из грузов m_1, m_2, расположенных на стержне. Грузы связаны между собой и неподвижной точкой O пружинами (рис. 1.2.1). Система моделируется двумя материальными точками (грузы m_1 и m_2), стержень — прямой, которая может вращаться вокруг точки O в плоскости xOy без трения. Записать уравнения связей и уравнения, которые накладывают ограничения на скорости и ускорения точек системы.

Решение. Выберем $\delta\varphi$, $\delta\xi_1$, $\delta\xi_2$ в качестве независимых виртуальных перемещений этой системы. Число степеней свободы $S=3$; обобщенные координаты $q_1=\varphi$, $q_2=\xi_1$, $q_3=\xi_2$. Точки системы находятся на одной прямой, проходящей через начало координат. Эта прямая представляет собой связь, наложенную на систему, поэтому уравнение связи

$$f_1 = x_1(y_2-y_1) - y_2(x_2-x_1) = 0.$$

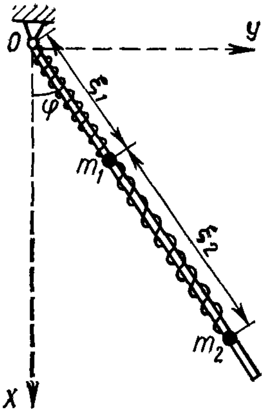

Рис. 1.2.1

Ограничения на скорости и ускорения системы имеют такой вид:

$$\frac{df_1}{dt} = v_{1x}(y_2-y_1) - v_{1y}(x_2-x_1) + x_1(v_{2y}-v_{1y}) - y_1(v_{2x} - v_{1x}) = 0,$$

$$\frac{d^2 f_1}{dt^2} = a_{1x}(y_2-y_1) - a_{1y}(x_2 - x_1) + x_1(a_{2y}-a_{1y}) - y_1(a_{2x}-a_{1x}) + 2v_{1x}(v_{2y}-v_{1y}) - 2v_{1y}(v_{2x}-v_{1x}) = 0.$$

2. В механизме, который рассмотрен в предыдущей задаче (рис. 1.2.1), движение грузов m_1, m_2 по стержню определяется соответственно уравнениями $\xi_1 = A\sin(\omega_1 t+\alpha_0)$, $\xi_2 = B\sin(\omega_2 t+\beta_0)$. Определить число степеней свободы системы и указать обобщенные координаты.

Решение. В этом случае $\delta\varphi$ — независимое виртуальное перемещение, следовательно, $S=1$ и $q=\varphi$.

3. В механизме, изображенном на рис. 1.2.1, вращение стержня определяется законом $\varphi=\Omega t+\varphi_0$. Найти число степеней свободы механической системы и указать обобщенные координаты.

Решение. Независимыми виртуальными перемещениями являются $\delta\xi_1$, $\delta\xi_2$. Следовательно, $S=2$ и обобщенные координаты $q_1=\xi_1$, $q_2=\xi_2$.

4. Движение механизма, изображенного на рис. 1.2.1, задано уравнениями $\xi_1 = A\sin(\omega_1 t+\alpha_0)$, $\xi_2 = B\sin(\omega_2 t+\beta_0)$, $\varphi=\Omega t$. Определить число степеней свободы системы.

Решение. Все звенья механизма не могут совершать независимые перемещения, следовательно, система не имеет степеней свободы.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Определить число степеней свободы системы, состоящей из грузов m_1 и m_2, которые моделируются материальными точками. Точка m_1 движется в плоскости xOy по прямой, которая наклонена к горизонту под углом α (рис. 1.2.2), и удерживается пружиной. Точка m_2 скреплена с точкой m_1 невесомым стержнем и может двигаться в плоскости xOy. Закон движения точки m_1 выражается функциями $x_1=[A+B\sin\omega t]\cos\alpha$, $y_1=[A+B\sin\omega t]\sin\alpha$, точка m_2 — функциями $x_2=x_1+l\sin\Omega t$, $y_2=y_1+l\cos\Omega t$.

2. Трубка закреплена в точке O и может вращаться в плоскости xOy. Внутри трубки расположен шарик, соединенный с точкой O пружиной. Шарик моделируется точкой. Найти число сте-

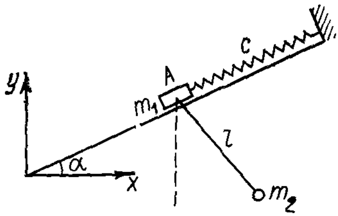

Рис. 1.2.2

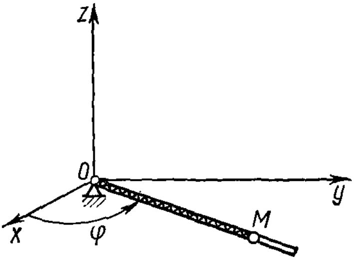

Рис. 1.2.3

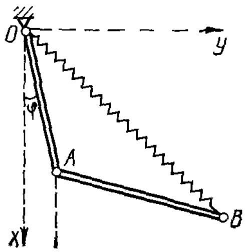

Рис. 1.2.5

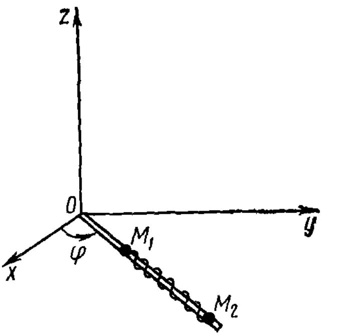

Рис. 1.2.4

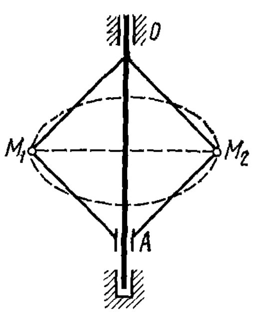

Рис. 1.2.6

пеней свободы этой системы, записать уравнение связи, указать обобщенные координаты и ограничения, наложенные на скорость и ускорение (рис 1.2 3).

3. На стержне, вращающемся вокруг точки O в горизонтальной плоскости xOy, движутся две точки M_1 и M_2, которые соединены пружиной Определить число их степеней свободы, предполагая, что *величина угла* φ *изменяется по закону* $\varphi=\omega t$ (рис. 1.2.4).

4. Стержень OA (рис. 1 2 5) свободно вращается вокруг точки O. К концу A прикреплен стержень AB, который свободно вращается вокруг точки A; точки O и B соединены пружиной Определить число степеней свободы материальной системы, предполагая, что точка B совершает гармонические колебания вдоль пружины OB по закону $OB=a+b\sin\omega t$.

5. Определить число степеней свободы и указать обобщенные координаты центробежного регулятора (рис. 1 2 6), два груза которого M_1, M_2 моделируются материальными точками. Муфта A скользит вдоль оси вращения OA. Угловая скорость вращения регулятора вокруг OA постоянна и равна ω

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какой вид имеют уравнения геометрических и кинематических, *стационарных и нестационарных* связей? 2. Каков вид уравнений, представляющих собой ограничения на скорость и ускорения точек системы с геометрическими стационарными и нестационарными связями? 3. Что такое обобщенные координаты и как они связаны с числом степеней свободы системы? 4. Что называется обобщенными скоростями системы? Как скорость точек системы связана с обобщенными скоростями?

3. КИНЕМАТИКА ПРОСТЕЙШИХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Число степеней свободы неизменяемой среды или абсолютно твердого тела при произвольном движении. Теорема Грасгофа. Простейшие случаи движения твердого тела: поступательное и вращение вокруг неподвижной оси и вокруг точки. Теоремы Даламбера и Шаля. Углы Эйлера. Кинематические уравнения Эйлера.

Основные понятия и формулы

Абсолютно твердое тело представляет собой частный случай механической системы с геометрическими связями, которые выражаются условиями неизменности расстояния между произвольными его точками. Ограничения, налагаемые связями на скорости точек твердого тела, приводятся к теореме Грасгофа о равенстве проекций скоростей двух произвольных точек на прямую, их соединяющую. Основными типами простейших движений