Б. А. СЕВАСТЬЯНОВ
В. П. ЧИСТЯКОВ
А. М. ЗУБКОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Б. А. СЕВАСТЬЯНОВ
В. П. ЧИСТЯКОВ
А. М. ЗУБКОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1980

22.171
С 28
УДК 519.2

Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., Зубков А. М. **Сборник задач по теории вероятностей.** — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980.

Входящие в сборник задачи обеспечивают упражнения по всем разделам теории вероятностей, включаемым в начальный курс. Текст задач, указания и ответы помещаются раздельно. Перед каждой темой дается перечень основных теоретических положений. Приводятся необходимые для решения задач таблицы.

С $\dfrac{20203\text{-}109}{053\,(02)\text{-}80}$ 19-80. 1702060000

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Этот сборник задач предназначен для студентов университетов и технических вузов в качестве учебного пособия по начальному курсу теории вероятностей. Для решения большей части задач не требуется знаний, выходящих за пределы обычного курса по математике для технических вузов. Лишь задачи 1.19—1.22, 2.18—2.20, 3.114—3.132, 3.147—3.160, 4.9—4.22, 4.41—4.55, 4.89—4.94, 4.101—4.115, 4.135—4.140 рассчитаны главным образом на студентов университетов.

Свободное владение понятиями и методами теории вероятностей необходимо не только математикам, но и прикладникам, потому что при решении практических задач огромную роль играет правильность выбора вероятностной модели: она должна, во-первых, отражать существенные черты исследуемого явления, а во-вторых, быть доступной для исследования. Подобрать модель и оценить это ее последнее качество, не имея представления о теории вероятностей и ее методах, невозможно.

В нашем сборнике сравнительно мало задач, сформулированных в «прикладных» терминах. Это объясняется несколькими причинами: общностью курса теории вероятностей и разнообразием узких специализаций технических вузов, ограниченностью объема книги и желанием авторов дать учащимся больше сведений о методах теории вероятностей. Как уже отмечалось, решение «прикладных» задач состоит из двух этапов: формулировки «прикладной» задачи как математической и решения этой математической задачи. Авторы считают, что прежде всего нужно ознакомить студентов со стандартными моделями теории вероятностей и научить их преодолевать трудности второго этапа; именно с таким расчетом и проводился отбор задач. Обучение способам построения математических моделей реальных явлений не следует подменять решением задач, отличающихся от простых математических задач только «прикладной» терминологией; здесь, видимо, нужно использовать те модели реальных явлений, которые на самом деле используются в областях науки и техники, близких к специализации того или иного технического вуза. Ряд задач последнего типа можно найти в сборнике задач [3] под общей редакцией А. А. Свешникова.

В нашем сборнике задачи, решение которых сводится к подстановке чисел в формулы, составляют меньшую часть. Авторы стремились подобрать задачи так, чтобы помочь учащемуся не только освоиться с основными понятиями и методами теории вероятностей, но и почувствовать взаимосвязь между понятиями, а также оценить возможности методов.

В связи с этим ряд задач имеет «теоретический» характер: в них требуется доказать справедливость того или иного утверждения или провести небольшое исследование. Как правило, такие задачи образуют довольно четко выделенные циклы, и при последовательном решении эти задачи не должны представлять больших трудностей. Трудность задач значительно понижается, если пользоваться указаниями (часть II). Для задач, номера которых отмечены звездочкой, приведены решения.

Теоретические задачи часто содержат материал, которому уделяется мало внимания в стандартных курсах теории вероятностей, но который является важным в принципиальном отношении. Особенно это относится к таким «техническим» приемам решения задач, как представление искомой случайной величины в виде суммы индикаторов, использование линейности математического ожидания, введение производящих и характеристических функций, метод моментов, рассмотрение случайных величин, мало отличающихся от заданных, но проще исследуемых, и т. п.

При составлении задачника был использован ряд отечественных и зарубежных источников (учебников, задачников, журнальных статей и т. п.), а также задачи, известные в научных и педагогических коллективах, хорошо знакомых авторам (МИАН, мех.-мат. МГУ, МФТИ, МИФИ и др.).

Авторы

Глава 1
ПРОСТЕЙШИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СХЕМЫ

Математические модели случайных явлений, рассматриваемые в теории вероятностей, основываются на понятии *вероятностного пространства*, т. е. тройки $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, где $\Omega=\{\omega\}$ — непустое множество, элементы ω которого интерпретируются как взаимно исключающие исходы изучаемого случайного явления; $\mathcal{A}$ — набор подмножеств множества Ω, называемых *событиями* (предполагается, что множество $\mathcal{A}$ содержит Ω и замкнуто относительно взятия противоположного события и суммы событий в не более чем счетном числе, т. е. $\mathcal{A}$ является σ-алгеброй); вероятность P — функция, определенная на событиях $A \in \mathcal{A}$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1. $\mathsf{P}(A) \geqslant 0$ при любом $A \in \mathcal{A}$.
2. $\mathsf{P}(\Omega)=1$. (1.1)
3. $\mathsf{P}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n)$, если $A_iA_j=\varnothing$ при любых $i \neq j$. Здесь символ $\varnothing$ обозначает пустое множество (или невозможное событие).

Определение операций над событиями, определение алгебры и σ-алгебры событий можно найти в учебниках по теории вероятностей (см., например, [4], [2], [12]). В этой главе рассматриваются два простейших класса вероятностных пространств.

Пусть $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s\}$. В σ-алгебру событий $\mathcal{A}$ включаются все 2^s подмножеств $A=\{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\}$ множества Ω. В классическом определении вероятности полагают все $\mathsf{P}(\omega_i)=1/s$, поэтому вероятность $\mathsf{P}(A)$ события $A=\{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\}$ равна отношению числа элементарных событий *) ω_i, входящих в A, к общему числу элементарных событий в Ω:

$$\mathsf{P}(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{k}{s}. \tag{1.2}$$

Классическое определение вероятности является хорошей математической моделью тех случайных явлений, для которых исходы опыта в каком-либо смысле симметричны, и поэтому представляется естественным предположение об их равновозможности.

Дадим описание двух часто встречающихся вероятностных схем, в которых детализируется общее классическое определение. Обозначим через $\mathcal{N}$ множество из N чисел: $\mathcal{N}=\{1, 2, \ldots, N\}$; пусть $\omega=(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ — упорядоченный набор из n элементов множества $\mathcal{N}$. Вероятностную схему, в которой

$$\Omega=\{\omega=(i_1, i_2, \ldots, i_n): i_k\in\mathcal{N}, k=1, 2, \ldots, n\} \tag{1.3}$$

и все элементарные события ω равновероятны, называют схемой *случайного выбора с возвращением.*

Схемой *случайного выбора без возвращения* называют вероятностную схему, в которой

$$\Omega=\{\omega=(i_1, i_2, \ldots, i_n): \quad i_k\in\mathcal{N}, \quad k=1, 2, \ldots, n, \\ \text{среди } i_1, \ldots, i_n \text{ нет одинаковых}\} \tag{1.4}$$

и элементарные события ω равновероятны.

При вычислении вероятности по формуле (1.2) часто оказываются полезными различные комбинаторные формулы. Приведем основные из них. Пусть дано множество $\mathcal{N}$ из N элементов: $\mathcal{N}=\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$. Подмножества множества $\mathcal{N}$ называют *сочетаниями*. Число сочетаний, которые можно образовать из N элементов $\mathcal{N}$, выбирая различными способами подмножества по n элементов, обозначают C_N^n или $\binom{N}{n}$. Справедливы формулы:

$$C_N^n=\frac{N^{[n]}}{n!}, \qquad C_N^n=\frac{N!}{n!\,(N-n)!}, \qquad C_N^n=C_N^{N-n},$$

где $n!=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$ и

$$N^{[n]}=N(N-1)\ldots(N-n+1). \tag{1.5}$$

*) Здесь и ниже число элементов любого конечного множества M будем обозначать $|M|$.

Упорядоченные цепочки $a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_n}$, образованные из различных элементов $\mathcal{N}$, называют *размещениями*. Число размещений, образованных выбором различных упорядоченных цепочек длины n из N элементов $\mathcal{N}$, обозначают A_N^n. Для A_N^n имеем формулу $A_N^n = N^{[n]}$. Частный случай размещений при $n = N$ называют *перестановками*. Число различных перестановок, образованных из N элементов, равно $N!$

Часто оказывается полезной следующая классическая формула, известная как уточненная формула Стирлинга (см. [11], стр. 67, (9.8)):

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \qquad \frac{12n}{12n+1} < \theta_n < 1. \tag{1.6}$$

В формулировках некоторых задач используется выражение: «целое число a сравнимо с целым числом b по модулю m» (m — целое), или в символической записи

$$a \equiv b \pmod{m}. \tag{1.7}$$

Сравнение (1.7) эквивалентно утверждению: *существует такое целое число t, что $a-b=tm$* (т. е. a и b при делении на m дают одинаковые остатки). В частности, запись $a \equiv 0 \pmod{m}$ означает, что a делится без остатка на m.

Целую часть действительного числа x (наименьшее целое число, не превосходящее x) будем обозначать $[x]$ (не путать с $a^{[x]}$, где x — целое число, см. (1.5)).

Рассмотрим второй класс общих вероятностных пространств. Пусть Ω — ограниченное множество n-мерного евклидова пространства. Будем предполагать, что Ω имеет объем. Рассмотрим систему $\mathcal{A}$ подмножеств Ω, имеющих объем. Для любого $A \in \mathcal{A}$ положим

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}, \tag{1.8}$$

где $\mu(C)$ — объем множества C. Если под объемом множества понимать его меру Лебега, то система $\mathcal{A}$ — это σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств, и тогда функция $\mathsf{P}(A)$, определенная формулой (1.8), является вероятностью. Отметим, что система $\mathcal{A}$, в частности, содержит все подмножества Ω, измеримые по Жордану, т. е. обычные квадрируемые или кубируемые фигуры, которые изучаются в любом курсе математического анализа. В большинстве задач рассматривается именно этот частный случай. Определение вероятности (1.8) называют *геометрическим определением вероятности.*

Приведем формулы, которые часто используются при решении задач. Для любых событий $A_1, A_2, \ldots$ имеем

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}, \qquad \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}. \tag{1.9}$$

При любых A и B верна формула

$$\mathsf{P}(A+B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB), \tag{1.10}$$

в частности, при $AB = \varnothing$ имеем

$$\mathsf{P}(A+B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B). \tag{1.11}$$

Вероятность суммы произвольных n событий находится по формуле

$$\mathsf{P}(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(A_k) - \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant n} \mathsf{P}(A_{k_1} A_{k_2}) + \\ + \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 < k_3 \leqslant n} \mathsf{P}(A_{k_1} A_{k_2} A_{k_3}) - \\ - \ldots + (-1)^{n-1} \mathsf{P}(A_1 A_2 \ldots A_n) = \\ = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l-1} \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_l \leqslant n} \mathsf{P}(A_{k_1} \ldots A_{k_l}). \tag{1.12}$$

Во всех задачах § 1 данной главы предполагается, что элементарные события равновероятны; слова «случайно», «случайно выбирается» нужно понимать как предположение о равновероятности элементарных событий. В § 2 выражение «точка равномерно распределена на множестве Ω» означает, что вероятности нужно вычислять по формуле (1.8).

§ 1. Классическое определение вероятности

1.1. Из ящика, содержащего три билета с номерами 1, 2, 3, вынимают по одному все билеты. Предполагается, что все последовательности номеров билетов имеют одинаковые вероятности. Найти вероятность того, что хотя бы у одного билета порядковый номер совпадает с собственным.

1.2. Колода из 36 карт хорошо перемешана (т. е. все возможные расположения карт равновероятны). Найти вероятности событий:

$A = \{$четыре туза расположены рядом$\}$,
$B = \{$места расположения тузов образуют арифметическую прогрессию с шагом 7$\}$.

1.3. На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трехтомник А. С. Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания слева направо (но не обязательно рядом).

1.4. Брошено три монеты. Предполагая, что элементарные события равновероятны, найти вероятности событий:

$A = \{$первая монета выпала «гербом» вверх$\}$,
$B = \{$выпало ровно два «герба»$\}$,
$C = \{$выпало не больше двух «гербов»$\}$.

1.5. Из множества всех последовательностей длины n, состоящих из цифр 0, 1, 2, случайно выбирается одна. Найти вероятности событий:

$A = \{$последовательность начинается с 0$\}$,
$B = \{$последовательность содержит ровно $m+2$ нуля, причем 2 из них находятся на концах последовательности$\}$,
$C = \{$последовательность содержит ровно m единиц$\}$,
$D = \{$в последовательности ровно m_0 нулей, m_1 единиц, m_2 двоек$\}$.

1.6. Из 28 костей домино случайно выбираются две. Найти вероятность P_2 того, что из них можно составить «цепочку» согласно правилам игры.

1.7. В записанном телефонном номере 135—3.—.. три последние цифры стерлись. В предположении, что все комбинации трех стершихся цифр равновероятны, найти вероятности событий:

$A = \{$стерлись различные цифры, отличные от 1, 3, 5$\}$,
$B = \{$стерлись одинаковые цифры$\}$,
$C = \{$две из стершихся цифр совпадают$\}$.

1.8. Какова вероятность того, что четырехзначный номер случайно взятого автомобиля в большом городе: а) имеет все цифры разные? б) имеет только две одинаковые цифры? в) имеет две пары одинаковых цифр? г) имеет только три одинаковые цифры? д) имеет все цифры одинаковые?

1.9. Найти вероятность p_N того, что случайно взятое натуральное число из множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ делится на фиксированное натуральное число k. Найти $\lim\limits_{N \to \infty} p_N$.

1.10. Из чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$ случайно выбирается число a. Найти вероятность p_N того, что: а) число a не делится ни на a_1, ни на a_2, где a_1 и a_2 — фиксированные натуральные взаимно простые числа; б) число a не делится ни на какое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$, где числа a_i — натуральные и попарно взаимно простые. Найти $\lim\limits_{N \to \infty} p_N$ в случаях а) и б).

1.11. Из множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ случайно выбирается число a. Найти $\lim\limits_{N \to \infty} p_N$, где p_N — вероятность того, что a^2-1 делится на 10.

1.12. Из множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ случайно выбирается число a. Найти вероятность p_N того, что a при делении на целое число $r \geqslant 1$ дает остаток q. Найти $\lim\limits_{N \to \infty} p_N$.

1.13. Целое число ξ случайно выбирается из множества $\{0, 1, 2, \ldots, 10^n-1\}$. Найти вероятность того, что в десятичной записи это число k-значно, т. е. представимо в виде $\xi = \xi_k \cdot 10^{k-1} + \xi_{k-1} \cdot 10^{k-2} + \ldots$ $\ldots + \xi_2 \cdot 10 + \xi_1$, где $0 \leqslant \xi_i \leqslant 9$ при всех $i = 1, \ldots, k$ и $\xi_k > 0$ $(k \geqslant 1)$.

1.14. По схеме случайного выбора с возвращением из множества натуральных чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$ выбираются числа ξ и η. Найти вероятность q_N того, что ξ и η взаимно просты. Найти $\lim\limits_{N \to \infty} q_N$, используя известное равенство $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1.15. По схеме случайного выбора с возвращением из множества целых чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$ выбираются числа ξ и η. Обозначим p_N вероятность события $\xi^2 + \eta^2 \leqslant N^2$. Найти $\lim\limits_{N \to \infty} p_N$.

1.16. По схеме случайного выбора с возвращением из множества целых чисел $\{0, 1, 2, \ldots, 10^n-1\}$ выбираются числа ξ и η. Обозначим p_m вероятность того, что сумма $\xi+\eta$ будет m-значным натуральным числом в десятичной записи. Найти вероятности p_{n-k+1}, $k=0, 1, \ldots, n$, и $q_k=\lim_{n\to\infty} p_{n-k+1}$, $k=0, 1, 2, \ldots$

1.17. По схеме случайного выбора с возвращением из множества целых чисел $\{0, 1, 2, \ldots, 10^n-1\}$ выбираются числа ξ и η. Обозначим p_m вероятность того, что произведение $\xi\eta$ будет m-значным натуральным числом в десятичной записи. Найти $q_k=\lim_{n\to\infty} p_{2n-k}$, $k=0, 1, 2, \ldots$

1.18. Показать, что в задачах 1.14—1.17 предельные вероятности останутся теми же самыми, если числа ξ и η выбираются из того же самого множества по схеме случайного выбора без возвращения.

1.19*. По схеме случайного выбора с возвращением из множества натуральных чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$, $N \geqslant 3$, выбираются числа X и Y. Что больше:

$$P_2=\mathsf{P}\{X^2-Y^2 \text{ делится на } 2\}$$

или

$$P_3=\mathsf{P}\{X^2-Y^2 \text{ делится на } 3\}?$$

1.20. По схеме случайного выбора с возвращением из множества натуральных чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$, $N \geqslant 6$, выбираются числа X и Y. Показать, что

$$\mathsf{P}\{X^4-Y^4\equiv 0 \pmod 2\} < \mathsf{P}\{X^4-Y^4\equiv 0 \pmod 3\} < \mathsf{P}\{X^4-Y^4\equiv 0 \pmod 5\}.$$

1.21. По схеме случайного выбора с возвращением из множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ выбираются числа X и Y. Используя *малую* теорему Ферма (*если p — простое число и целое число a не делится на p, то $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$*), найти вероятность $Q_N(p)$ того, что число $X^{p-1}-Y^{p-1}$ делится на простое число p. Найти $\lim_{N\to\infty} Q_N(p)=Q(p)$, $\lim_{p,\,N\to\infty} Q_N(p)=Q$.

1.22*. По схеме случайного выбора с возвращением из множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ выбираются числа X и Y. Показать, что при $N\geqslant 4$

$$\mathsf{P}\{X^3+Y^3\equiv 0 \pmod 3\} < \mathsf{P}\{X^3+Y^3\equiv 0 \pmod 7\}.$$

1.23. Из совокупности всех подмножеств множества $S=\{1, 2, \ldots, N\}$ по схеме выбора с возвращением выбираются множества A_1, A_2. Найти вероятность того, что $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

1.24. Из совокупности всех подмножеств множества $S = \{1, 2, \ldots, N\}$ по схеме выбора с возвращением выбираются подмножества $A_1, A_2, \ldots, A_r$. Найти вероятность того, что множества $A_1, A_2, \ldots, A_r$ попарно не пересекаются.

1.25*. В урне содержится $(2n+1)^2$ карточек, на каждой из которых написана упорядоченная пара целых чисел (x, y) (x и y принимают значения от $-n$ до n, каждая пара чисел написана ровно на одной карточке). Из урны по схеме выбора без возвращения извлекаются три карточки: (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), (ξ_3, η_3). Рассмотрим эти пары как координаты случайных точек Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3 плоскости в декартовой системе координат. Найти вероятность p_n того, что Ξ_1 симметрична Ξ_2 относительно Ξ_3.

1.26. Брошено 10 игральных костей. Предполагается, что все комбинации выпавших очков равновероятны. Найти вероятности событий:

а) не выпало ни одной «6»;

б) выпало ровно три «6»;

в) выпала хотя бы одна «6».

1.27. Некоторые москвичи шестизначный номер трамвайного, троллейбусного или автобусного билета считают «счастливым», если сумма первых его трех цифр совпадает с суммой последних трех цифр. Найти вероятность получить «счастливый» билет.

1.28 (см. 1.27). Вычислить вероятность появления хотя бы одного счастливого билета в случае, когда покупается подряд n билетов, $1 < n < 9$.

1.29. Из 30 чисел (1, 2, ..., 29, 30) случайно отбирается 10 различных чисел. Найти вероятности событий:

$A = \{$все числа нечетные$\}$,

$B = \{$ровно 5 чисел делится на 3$\}$,

$C = \{$5 чисел четных и 5 нечетных, причем ровно одно число делится на 10$\}$.

1.30. Из урны, содержащей M_1 шаров с номером 1, M_2 шаров с номером 2, ..., M_N шаров с номером N, случайно без возвращения выбирается n шаров. Найти вероятности событий:

1) появилось m_1 шаров с номером 1, m_2 шаров с номером 2, ..., m_N шаров с номером N;

2) каждый из N номеров появился хотя бы один раз.

1.31. Из множества чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$ по схеме выбор без возвращения выбираются числа ξ_1 и ξ_2. Найти $\mathsf{P}\{\xi_2 > \xi_1\}$. При выборе трех чисел найти вероятность того, что второе число лежит между первым и третьим.

1.32. Из множества чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$ по схеме выбора без возвращения отобрано n различных чисел. Расположим их в порядке возрастания: $z_{(1)} < z_{(2)} < \ldots$ $\ldots < z_{(n)}$. Найти вероятность того, что $z_{(m)} \leqslant M < z_{(m+1)}$; вычислить ее предел при $N, M \to \infty$, $M/N \to \alpha \in [0, 1]$.

1.33. Из множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ случайно без возвращения выбирается $k+1$ чисел: $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$. Первые k чисел, расположенные в порядке возрастания, обозначим $x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(k)}$. Найти

$$\mathsf{P}\{x_{(l)} < x_{k+1} < x_{(l+1)}\}.$$

1.34. Десять рукописей разложены по 30 папкам (на одну рукопись 3 папки). Найти вероятность того, что в случайно выбранных 6 папках не содержится целиком ни одной рукописи.

1.35. За круглый стол рассаживаются в случайном порядке $2n$ гостей. Какова вероятность того, что гостей можно разбить на n непересекающихся пар так, чтобы каждая пара состояла из сидящих рядом мужчины и женщины?

1.36. Участник лотереи «Спортлото-6» на первой карточке отметил номера (4, 12, 20, 31, 32, 33), а на второй — (4, 12, 20, 41, 42, 43). Найти вероятность того, что участник получит ровно два минимальных выигрыша.

1.37. *Равновероятной схемой размещения частиц по ячейкам* называют схему размещения, в которой номера ячеек, последовательно занимаемых частицами, получают посредством случайного выбора с возвращением.

Обозначим $\mu_r = \mu_r(n, N)$ число ячеек, содержащих ровно по r частиц после размещения n частиц по N ячейкам. Найти вероятности следующих событий:

1) $\mu_0(n, N) > 0$ (при $n = N$);

2) $\mu_0(n, N) = 0$ (при $n = N+1$);

3) $\mu_0(n, N) = 1$ (при $n = N+1$);

4) найдется ячейка, содержащая хотя бы две частицы (при любых соотношениях между n и N).

1.38. (См. 1.37). Найти $\mathsf{P}\{\mu_0(n, N)=0\}$ при произвольных n, N.

1.39. По N различимым ячейкам размещается случайно n неразличимых частиц. (Элементарными событиями являются наборы чисел $(r_1, r_2, \ldots, r_N)$, где r_k — число частиц в k-й ячейке, $k=1, 2, \ldots, N$.) Найти вероятности событий:

1) $\mu_0(n, N)>0$; 2) $\mu_0(n, N)=1$.

1.40. В первом ряду кинотеатра, состоящем из N кресел, сидит n человек. Предполагая, что все возможные размещения этих n человек в первом ряду равновероятны, найти вероятности следующих событий:

а) $A_{n,N}=\{$никакие 2 человека не сидят рядом$\}$;

б) $B_{n,N}=\{$каждый из n человек имеет ровно одного соседа$\}$;

в) $C_{n,N}=\{$из любых двух кресел, расположенных симметрично относительно середины ряда, хотя бы одно свободно$\}$.

1.41. В зале кинотеатра в первых двух рядах, каждый из которых состоит из N кресел, сидит n человек. Найти вероятности следующих событий:

а) в первом ряду никакие 2 человека не сидят рядом;

б) во втором ряду каждый человек имеет ровно одного соседа;

в) в первом ряду из любых двух кресел, расположенных симметрично относительно середины ряда, хотя бы одно свободно.

1.42. Из всех отображений множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в себя случайно выбирается отображение. Найти вероятности событий:

а) выбранное отображение каждый из n элементов переводит в 1;

б) элемент i имеет ровно k прообразов;

в) элемент i переводится в j;

г) выбранное отображение элементы $i_1, i_2, \ldots, i_k$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n)$ переводит в элементы $j_1, j_2, \ldots$ $\ldots, j_k$ соответственно.

1.43. Из множества всех подстановок *) степени n случайно выбирается одна. Если элементы $i_1, i_2, \ldots, i_k$ различны и выбранная подстановка переводит i_1 в i_2, i_2 в i_3, $\ldots$, i_{k-1} в i_k и i_k в i_1 $(i_1 \to i_2 \to i_3 \to \ldots \to$

*) *Подстановкой степени* n называется взаимно однозначное отображение множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ на себя.