

БИБЛИОТЕКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТАБЛИЦ

ВЫПУСК 11

ТАБЛИЦЫ
ОБРАТНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ
ФУНКЦИЙ

*Обработка таблиц
и перевод текста с английского*
Л. С. БАРК

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР АН СССР
МОСКВА — 1980

БИБЛИОТЕКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТАБЛИЦ

выходит под редакцией

К. А. КАРПОВА

В настоящем томе даны с 9 десятичными знаками и переменным шагом значения обратных гиперболических синусов, косинусов и тангенсов с их первыми и вторыми разностями.

Аргумент изменяется в пределах: для $\text{Arsh } x$ от 0 до 22980, для $\text{Arch } x$ от 1 до 22980 и для $\text{Arth } x$ от 0 до 1.

ОТ РЕДАКТОРА

Знакомство с табличной литературой показало, что таблицы обратных гиперболических функций Вычислительной лаборатории Гарвардского университета (США) являются одними из лучших для этих функций.

Высокая точность и достаточно мелкий шаг делают таблицы удобными для большинства практических вычислений и применений в теоретических исследованиях.

При контроле по разностям ошибок в таблицах обнаружено не было. Издание таблиц фотомеханическим способом сохраняет это их достоинство.

В нашем издании мы не помещаем библиографию, имеющуюся в оригинале, а интересующихся отсылаем к справочникам по математическим таблицам.

Н. А. Карпов

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ

Работы по вычислению и контролю настоящих таблиц были организованы и выполнены в Вычислительной лаборатории Гарвардского университета под наблюдением О.Гада. В этой работе ему помогали Т.Зингер и Р.Стронг.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие таблицы восполняют недостатки, имеющиеся в предшествующих таблицах обратных гиперболических функций.

Обратные гиперболические функции определяются равенствами*:

$$\operatorname{Arsh} x = \ln \left[x + \sqrt{x^2 + 1} \right] = \operatorname{Arcsch} \frac{1}{x}, \quad -\infty < x < \infty; \quad (1)$$

$$\operatorname{Arch} x = \pm \ln \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \right] = \operatorname{Arsch} \frac{1}{x}, \quad 1 < x < \infty; \quad (2)$$

$$\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \operatorname{Arcth} \frac{1}{x}, \quad -1 < x < 1. \quad (3)$$

В этой книге приведены с 9 десятичными знаками, первыми и вторыми разностями таблицы функций:

$$\operatorname{Arsh} x, \quad 0 \leq x < \infty;$$

$$|\operatorname{Arch} x|, \quad 1 \leq x < \infty;$$

$$\operatorname{Arth} x, \quad 0 \leq x < 1.$$

Шаг по аргументу выбран так, что в большей части таблиц квадратичная интерполяция дает 9 десятичных знаков.

Учитывая соотношения (1) – (3) и нечетность функций $\operatorname{Arsh} x$ и $\operatorname{Arth} x$ видим, что из таблиц могут быть получены значения всех шести обратных гиперболических функций.

Цифровая часть книги разделена на четыре таблицы:

таблица I содержит значения $\operatorname{Arth} x$ для $0 \leq x < 1$;

таблицы II и III содержат значения $\operatorname{Arsh} x$ для $0 \leq x < 3,5$ и $\operatorname{Arch} x$ для $1 \leq x < 3,5$;

таблица IV содержит значения $\operatorname{Arsh} x$ и $\operatorname{Arch} x$ для $3,5 \leq x \leq 22980$.

* Авторы употребляют отличные от наших обозначения для обратных гиперболических функций. В таблицах эти обозначения мы сохраняем. — *Прим. ред.*

Функции $\text{Arsh } x$ и $\text{Arch } x$ для x больших 22980 отличаются от функции $\ln 2x$ менее, чем на ошибку округления таблиц.

В табличках I – IV даны отрезки изменения независимого переменного x и соответствующие им шаги Δx для каждой из четырех таблиц.

I

x	Δx
0 $\leq x \leq 0,499$	0,001
0,5000 $\leq x \leq 0,7495$	0,0005
0,7500 $\leq x \leq 0,8998$	0,0002
0,9000 $\leq x \leq 0,9499$	0,0001
0,95000 $\leq x \leq 0,97495$	0,00005
0,97500 $\leq x \leq 0,98998$	0,00002
0,99000 $\leq x \leq 0,99999$	0,00001

II

x	Δx
0 $\leq x \leq 2,998$	0,002
3,000 $\leq x \leq 3,495$	0,005

III

x	Δx
1,00000 $\leq x \leq 1,00399$	0,00001
1,00400 $\leq x \leq 1,00998$	0,00002
1,01000 $\leq x \leq 1,02495$	0,00005
1,0250 $\leq x \leq 1,0499$	0,0001
1,0500 $\leq x \leq 1,1498$	0,0002
1,1500 $\leq x \leq 1,3995$	0,0005
1,400 $\leq x \leq 1,799$	0,001
1,800 $\leq x \leq 3,498$	0,002

IV

x	Δx
3,500 $\leq x \leq 6,495$	0,005
6,50 $\leq x \leq 14,99$	0,01
15,00 $\leq x \leq 34,98$	0,02
35,00 $\leq x \leq 64,95$	0,05
65,0 $\leq x \leq 149,9$	0,1
150,0 $\leq x \leq 349,8$	0,2
350,0 $\leq x \leq 649,5$	0,5
650 $\leq x \leq 1499$	1
1500 $\leq x \leq 3498$	2
3500 $\leq x \leq 6495$	5
6500 $\leq x \leq 14990$	10
15000 $\leq x \leq 22980$	20

Вычисление таблиц

Значения функции $\text{Arth } x$ были вычислены с 9 десятичными знаками посредством накопления первых разностей. Заметим, что формулу для первой разности можно записать так

$$\begin{aligned} \text{Arth}(x+h) - \text{Arth } x &= \frac{1}{2} \ln \frac{(1+x+h)(1-x)}{(1-x-h)(1+x)} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{h}{1-xh-x^2}}{1 - \frac{h}{1-xh-x^2}} = \text{Arth } \frac{h}{1-xh-x^2}. \end{aligned}$$

Обозначив в этой формуле $\frac{h}{1 - xh - x^2}$ через w , запишем ряд:

$$\text{Arth } w = w + \frac{1}{3} w^3 + \frac{1}{5} w^5 + \dots$$

Для $x < 0,995$ каждая такая разность была вычислена с точностью 10^{-14} , для больших x — с точностью $9,2 \cdot 10^{-13}$. Тогда максимальная ошибка при вычислении таблицы I не превосходила

$$4000 \cdot 10^{-14} + 500 \cdot 9,2 \cdot 10^{-13} = 5 \cdot 10^{-10}.$$

Так как значения $\text{Arth } x$ получались одно из другого, то проверка одного из них обеспечивала контроль всех предшествующих. Такой контроль, гарантирующий от систематических ошибок, был выполнен в разных точках с использованием соотношения (3). В частности, в точке $x = 0,99999$ расхождение оказалось меньшим единицы десятого десятичного знака.

Полученная таблица функции $\text{Arth } x$ дополнительно контролировалась по разностям пятого порядка, а затем была нанесена на перфокарты вместе с первыми и вторыми разностями. После округления десятого десятичного знака эти значения были отпечатаны. Авторы уверены, что ошибка в таблице I не превышает 0,6 единицы девятого десятичного знака.

Пользуясь соотношениями

$$\text{Arsh } x = \text{Arth } \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \text{Arth } u,$$

$$\text{Arch } x = \text{Arth } \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \text{Arth } u',$$

функции $\text{Arsh } x$ и $\text{Arch } x$ для малых значений x могут быть вычислены путем интерполяции в таблице I. Этот метод был использован при вычислении таблиц II и III.

Так как функции u и u' монотонные, то для интерполяции оказалось возможным использовать упомянутые перфокарты с применением автоматической вычислительной машины (ASCC). Интерполяция проводилась по формуле Ньютона—Грегори со вторыми разностями.

Таблицы функций $\text{Arsh } x$ и $\text{Arch } x$ были проконтролированы по четвертым разностям. Для $\text{Arch } x$ при x близком к единице ($x < 1,00100$) контроль велся по

третьим разностям функции $\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \text{Arch } x$.

Ошибки, возникающие из-за неточностей в u и u' , из-за неточностей значений в таблице I и из-за пренебрежения разностями высших порядков, в сумме нигде не превышают $6 \cdot 10^{-10}$. Так как суммарная ошибка всегда отрицательна, то оказалось возможным частично ее компенсировать прибавлением к вычисленным значениям некоторой постоянной величины,

С учетом ошибки округления оказалось, что значения функций в таблицах II и III точны в пределах 0,9 единицы девятого десятичного знака.

Табличные разности были вычислены до округления значений функций, а затем округлялись.

Для $x \geq 3,5$ (таблица IV) $\text{Arsh } x$ и $\text{Arch } x$ удобно вычислять с помощью рядов:

$$\text{Arsh } x = \ln 2x + \frac{1}{2 \cdot 2x^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4x^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6x^6} - \dots,$$

$$\text{Arch } x = \ln 2x - \frac{1}{2 \cdot 2x^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4x^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6x^6} - \dots$$

(сохранялись члены, содержащие x^{-12}).

Функция $\ln 2x$ считалась по ряду:

$$\ln 2(x+h) = \ln 2x + \frac{h}{x} - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{x} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{x} \right)^3 - \frac{1}{4} \left(\frac{h}{x} \right)^4 + \dots$$

Вычислительная ошибка нигде не превышает величины $4 \cdot 10^{-10}$ и авторы полагают, что значения функций в таблице IV (учитывается ошибка округления) имеют точность в пределах 0,9 единицы девятого десятичного знака. Контроль табличных значений проводился до округления по разностям пятого порядка.

Интерполяция

В большинстве случаев интерполяция в этих таблицах может быть выполнена с помощью формулы Ньютона—Грегори

$$f(x) = f_0 + p\Delta f_0 + R_1 = f_0 + p\Delta f_0 + \frac{p(p-1)}{2} \Delta^2 f_0 + R_2,$$

где $f_0 = f(x_0)$, h — шаг таблиц, $p = \frac{x - x_0}{h}$, а R_1, R_2 — соответственно остаточные члены формул линейной и квадратичной интерполяции.

В таблице I ошибка в значениях функции $\text{Arth } x$ нигде не превышает $6 \cdot 10^{-10}$. Приближенно верхние пределы для R_1 и R_2 будут:

x меньше, чем	R_1	R_2
0,99500	$3 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-10}$
0,99600	$4 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-9}$
0,99700	$7 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-9}$
0,99800	$2 \cdot 10^{-6}$	$8 \cdot 10^{-9}$
0,99900	$7 \cdot 10^{-6}$	$7 \cdot 10^{-8}$

При x близких к единице, интерполяция не дает точности в 9 знаков. Если же такая точность потребуется, то функция $\text{Arth } x$ может быть вычислена по соотношению (3) или же из равенства

$$\text{Arth } x = \text{Arsh } x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

с последующей интерполяцией в таблице IV.

В таблице II значения $\text{Arsh } x$ даны с точностью 0,9 единицы девятого десятичного знака. Верхние пределы R_1 и R_2 приближенно равны $2 \cdot 10^{-7}$ и $5 \cdot 10^{-10}$.

В таблице III значения функции $\text{Arch } x$ даны с точностью 0,9 единицы девятого десятичного знака. Приближенные значения верхних пределов R_1 и R_2 приведены ниже.

x больше, чем	R_1	R_2
1,00130	$1 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-10}$
1,00100	$2 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-9}$
1,00040	$5 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-8}$
1,00015	$2 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-7}$
1,00005	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-6}$

При $x < 1,00005$ интерполировать в таблице III не рекомендуется, а поэтому разности не приводятся. В этом случае функция $\text{Arch } x$ может быть вычислена по соотношению (2) или по соотношению

$$\text{Arch } x = \text{Arth } \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$$

с интерполяцией в таблице IV.

В таблице IV значения функций даны с ошибкой не превосходящей 0,9 единицы девятого десятичного знака. Верхние пределы величин R_1 и R_2 соответственно равны $3 \cdot 10^{-7}$ и $5 \cdot 10^{-10}$.

Если $x > 22980$, то функции $\text{Arsh } x$ и $\text{Arch } x$ приближенно равны $\ln 2x$; при этом ошибка будет меньше, чем $5 \cdot 10^{-10}$.

Ради удобства в таблицах II, III и IV вместо Δ^2 напечатано $-\Delta^2$.

БИБЛИОТЕКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТАБЛИЦ

ВЫШЛИ:

Выпуск 1. Таблицы круговых и гиперболических синусов и косинусов в радианной мере угла. М., Вычислительный центр АН СССР, 1958 г.

Выпуск 2. Таблицы вероятностных функций, том I

$$H'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \text{ и } H(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

М., Вычислительный центр АН СССР, 1958 г.

Выпуск 3. Таблицы вероятностных функций, том II

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ и } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^x e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha.$$

М., Вычислительный центр АН СССР, 1959 г.

Выпуск 4. Таблицы функций Бесселя дробного индекса, том I, $J_\nu(x)$. М., Вычислительный центр АН СССР, 1959 г.

Выпуск 5. Таблицы функций Бесселя дробного индекса, том II, $I_\nu(x)$. М., Вычислительный центр АН СССР, 1959 г.

Выпуск 6. Таблицы круговых и гиперболических тангенсов и котангенсов в радианной мере угла. М., Вычислительный центр АН СССР, 1959 г.

Выпуск 7. Таблицы натуральных логарифмов, том I. Логарифмы чисел от 0 до 5. М., Вычислительный центр АН СССР, 1960 г.

Выпуск 8. Таблицы натуральных логарифмов, том II. Логарифмы чисел от 5 до 10. М., Вычислительный центр АН СССР, 1960 г.

Выпуск 9. Многозначные таблицы элементарных функций ($\sin x$, $\cos x$, e^x и e^{-x}). М., Вычислительный центр АН СССР, 1960 г.

Выпуск 10. Таблицы $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$. М., Вычислительный центр АН СССР, 1960 г.

Выпуск 11. Таблицы обратных гиперболических функций. М., Вычислительный центр АН СССР, 1960 г.

ГОТОВЯТСЯ К ПЕЧАТИ:

1. Таблицы двадцатизначных десятичных логарифмов чисел, том I. Логарифмы чисел от 10000 до 55000.

2. Таблицы двадцатизначных десятичных логарифмов чисел, том II. Логарифмы чисел от 55000 до 100000.

Книги продаются в магазинах "Академкнига"

Заказы направлять по адресу: Москва — центр, Б. Черкасский пер.,
дом 2/10, Контора "Академкнига"

TABLES OF INVERSE HYPERBOLIC FUNCTIONS

BY
THE STAFF OF THE COMPUTATION LABORATORY



CAMBRIDGE, MASSACHUSETTS
HARVARD UNIVERSITY PRESS

1949

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
От редактора	V
Из предисловия	VI
Введение	VII
Таблица I. $\operatorname{Arth} x; 0 \leq x < 1$	1
Таблица II. $\operatorname{Arsh} x; 0 \leq x < 3,5$	49
Таблица III. $\operatorname{Arch} x; 1 \leq x < 3,5$	67
Таблица IV. $\operatorname{Arsh} x, \operatorname{Arch} x; 3,5 \leq x \leq 22980$	105

Таблицы обратных гиперболических функций

* * *

Утверждено к печати Ученым советом
Вычислительного центра АН СССР

Редактор *М.В.Яковкин*
Технический редактор *А.И.Коркина*
Корректурa автора

Т-03683. Подписано в печать 3/IV-60 г.
Формат бумаги $84 \times 108 \frac{1}{16}$ Уч.-изд. л. 28,24
Усл.-печ. л. 30,75 . Тираж 2000. Заказ 4
Цена 17 руб. 15 коп.

Отпечатано на ротaпpинтaх
в Вычислительном центре АН СССР
Москва, В-312, 1-й Академический проезд, дом 28

Таблица I

Обратный гиперболический тангенс

$\text{Ar th } x$

и его первые и вторые разности для

$0.000 \leq x \leq 0.499$	$\Delta x = 0.001$
$0.5000 \leq x \leq 0.7495$	$\Delta x = 0.0005$
$0.7500 \leq x \leq 0.8998$	$\Delta x = 0.0002$
$0.9000 \leq x \leq 0.9499$	$\Delta x = 0.0001$
$0.95000 \leq x \leq 0.97495$	$\Delta x = 0.00005$
$0.97500 \leq x \leq 0.98998$	$\Delta x = 0.00002$
$0.99000 \leq x \leq 0.99999$	$\Delta x = 0.00001$

x	$\tanh^{-1}x$	Δ	Δ^2
0.000	0.00000 0000	100 0000	2
0.001	0.00100 0000	100 0002	4
0.002	0.00200 0002	100 0006	6
0.003	0.00300 0009	100 0012	8
0.004	0.00400 0021	100 0020	10
0.005	0.00500 0041	100 0030	12
0.006	0.00600 0072	100 0042	14
0.007	0.00700 0114	100 0056	16
0.008	0.00800 0170	100 0072	18
0.009	0.00900 0243	100 0090	20
0.010	0.01000 0333	100 0110	22
0.011	0.01100 0443	100 0132	24
0.012	0.01200 0576	100 0156	26
0.013	0.01300 0732	100 0182	28
0.014	0.01400 0914	100 0210	30
0.015	0.01500 1125	100 0240	32
0.016	0.01600 1365	100 0272	34
0.017	0.01700 1637	100 0306	36
0.018	0.01800 1944	100 0342	38
0.019	0.01900 2286	100 0380	40
0.020	0.02000 2667	100 0421	42
0.021	0.02100 3087	100 0463	44
0.022	0.02200 3550	100 0507	46
0.023	0.02300 4056	100 0553	48
0.024	0.02400 4609	100 0601	50
0.025	0.02500 5210	100 0651	52
0.026	0.02600 5861	100 0703	54
0.027	0.02700 6563	100 0757	56
0.028	0.02800 7320	100 0813	58
0.029	0.02900 8133	100 0871	60
0.030	0.03000 9004	100 0931	62
0.031	0.03100 9936	100 0993	64
0.032	0.03201 0929	100 1057	66
0.033	0.03301 1986	100 1124	68
0.034	0.03401 3110	100 1192	70
0.035	0.03501 4302	100 1262	72
0.036	0.03601 5564	100 1334	74
0.037	0.03701 6898	100 1408	76
0.038	0.03801 8306	100 1485	78
0.039	0.03901 9791	100 1563	80
0.040	0.04002 1353	100 1643	82
0.041	0.04102 2996	100 1725	84
0.042	0.04202 4722	100 1810	86
0.043	0.04302 6531	100 1896	88
0.044	0.04402 8427	100 1984	90
0.045	0.04503 0411	100 2075	92
0.046	0.04603 2486	100 2167	94
0.047	0.04703 4653	100 2261	96
0.048	0.04803 6915	100 2358	98
0.049	0.04903 9272	100 2456	101

x	$\tanh^{-1}x$	Δ	Δ^2
0.050	0.05004 1729	100 2557	103
0.051	0.05104 4286	100 2659	105
0.052	0.05204 6946	100 2764	107
0.053	0.05304 9709	100 2871	109
0.054	0.05405 2580	100 2979	111
0.055	0.05505 5559	100 3090	113
0.056	0.05605 8649	100 3203	115
0.057	0.05706 1852	100 3317	117
0.058	0.05806 5169	100 3434	119
0.059	0.05906 8603	100 3553	121
0.060	0.06007 2156	100 3674	123
0.061	0.06107 5830	100 3797	125
0.062	0.06207 9626	100 3922	127
0.063	0.06308 3548	100 4049	129
0.064	0.06408 7597	100 4178	131
0.065	0.06509 1774	100 4309	133
0.066	0.06609 6083	100 4442	135
0.067	0.06710 0525	100 4577	137
0.068	0.06810 5102	100 4714	139
0.069	0.06910 9817	100 4854	141
0.070	0.07011 4671	100 4995	143
0.071	0.07111 9666	100 5139	146
0.072	0.07212 4804	100 5284	148
0.073	0.07313 0089	100 5432	150
0.074	0.07413 5520	100 5581	152
0.075	0.07514 1102	100 5733	154
0.076	0.07614 6835	100 5887	156
0.077	0.07715 2721	100 6043	158
0.078	0.07815 8764	100 6201	160
0.079	0.07916 4965	100 6361	162
0.080	0.08017 1325	100 6523	164
0.081	0.08117 7848	100 6687	166
0.082	0.08218 4534	100 6853	168
0.083	0.08319 1387	100 7021	170
0.084	0.08419 8409	100 7192	172
0.085	0.08520 5600	100 7364	175
0.086	0.08621 2965	100 7539	177
0.087	0.08722 0503	100 7715	179
0.088	0.08822 8219	100 7894	181
0.089	0.08923 6113	100 8075	183
0.090	0.09024 4188	100 8258	185
0.091	0.09125 2446	100 8443	187
0.092	0.09226 0889	100 8630	189
0.093	0.09326 9519	100 8819	191
0.094	0.09427 8338	100 9011	193
0.095	0.09528 7349	100 9204	196
0.096	0.09629 6554	100 9400	198
0.097	0.09730 5953	100 9598	200
0.098	0.09831 5551	100 9797	202
0.099	0.09932 5348	100 9999	204

x	$\tanh^{-1}x$	Δ	Δ^2
0.100	0.10033 5347	101 0203	206
0.101	0.10134 5551	101 0410	208
0.102	0.10235 5960	101 0618	210
0.103	0.10336 6578	101 0828	213
0.104	0.10437 7406	101 1041	215
0.105	0.10538 8447	101 1256	217
0.106	0.10639 9703	101 1472	219
0.107	0.10741 1175	101 1691	221
0.108	0.10842 2867	101 1913	223
0.109	0.10943 4779	101 2136	225
0.110	0.11044 6915	101 2361	228
0.111	0.11145 9277	101 2589	230
0.112	0.11247 1865	101 2819	232
0.113	0.11348 4684	101 3050	234
0.114	0.11449 7734	101 3285	236
0.115	0.11551 1019	101 3521	238
0.116	0.11652 4540	101 3759	241
0.117	0.11753 8299	101 4000	243
0.118	0.11855 2298	101 4242	245
0.119	0.11956 6541	101 4487	247
0.120	0.12058 1028	101 4734	249
0.121	0.12159 5762	101 4984	251
0.122	0.12261 0746	101 5235	254
0.123	0.12362 5981	101 5489	256
0.124	0.12464 1469	101 5744	258
0.125	0.12565 7214	101 6002	260
0.126	0.12667 3216	101 6263	262
0.127	0.12768 9479	101 6525	265
0.128	0.12870 6004	101 6790	267
0.129	0.12972 2793	101 7056	269
0.130	0.13073 9850	101 7325	271
0.131	0.13175 7175	101 7597	273
0.132	0.13277 4772	101 7870	276
0.133	0.13379 2642	101 8146	278
0.134	0.13481 0787	101 8424	280
0.135	0.13582 9211	101 8704	282
0.136	0.13684 7915	101 8986	285
0.137	0.13786 6901	101 9271	287
0.138	0.13888 6172	101 9557	289
0.139	0.13990 5729	101 9847	291
0.140	0.14092 5576	102 0138	294
0.141	0.14194 5713	102 0431	296
0.142	0.14296 6145	102 0727	298
0.143	0.14398 6872	102 1025	300
0.144	0.14500 7897	102 1326	303
0.145	0.14602 9223	102 1628	305
0.146	0.14705 0851	102 1933	307
0.147	0.14807 2784	102 2240	309
0.148	0.14909 5025	102 2550	312
0.149	0.15011 7574	102 2861	314

x	$\tanh^{-1}x$	Δ	Δ^2
0.150	0.15114 0436	102 3175	316
0.151	0.15216 3611	102 3492	319
0.152	0.15318 7103	102 3810	321
0.153	0.15421 0913	102 4131	323
0.154	0.15523 5044	102 4454	325
0.155	0.15625 9498	102 4780	328
0.156	0.15728 4277	102 5107	330
0.157	0.15830 9385	102 5437	332
0.158	0.15933 4822	102 5770	335
0.159	0.16036 0592	102 6104	337
0.160	0.16138 6696	102 6441	339
0.161	0.16241 3138	102 6781	342
0.162	0.16343 9918	102 7123	344
0.163	0.16446 7041	102 7467	346
0.164	0.16549 4508	102 7813	349
0.165	0.16652 2321	102 8162	351
0.166	0.16755 0482	102 8513	353
0.167	0.16857 8995	102 8866	356
0.168	0.16960 7861	102 9222	358
0.169	0.17063 7083	102 9580	361
0.170	0.17166 6663	102 9941	363
0.171	0.17269 6604	103 0304	365
0.172	0.17372 6908	103 0669	368
0.173	0.17475 7577	103 1037	370
0.174	0.17578 8613	103 1407	372
0.175	0.17682 0020	103 1779	375
0.176	0.17785 1799	103 2154	377
0.177	0.17888 3953	103 2531	380
0.178	0.17991 6485	103 2911	382
0.179	0.18094 9396	103 3293	385
0.180	0.18198 2689	103 3678	387
0.181	0.18301 6366	103 4065	389
0.182	0.18405 0431	103 4454	392
0.183	0.18508 4885	103 4846	394
0.184	0.18611 9730	103 5240	397
0.185	0.18715 4970	103 5637	399
0.186	0.18819 0607	103 6036	402
0.187	0.18922 6643	103 6437	404
0.188	0.19026 3080	103 6841	407
0.189	0.19129 9921	103 7248	409
0.190	0.19233 7169	103 7657	411
0.191	0.19337 4826	103 8068	414
0.192	0.19441 2895	103 8482	416
0.193	0.19545 1377	103 8899	419
0.194	0.19649 0276	103 9318	421
0.195	0.19752 9593	103 9739	424
0.196	0.19856 9333	104 0163	426
0.197	0.19960 9496	104 0590	429
0.198	0.20065 0085	104 1019	431
0.199	0.20169 1104	104 1450	434