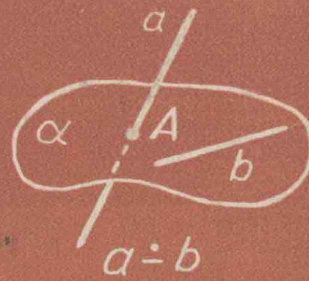
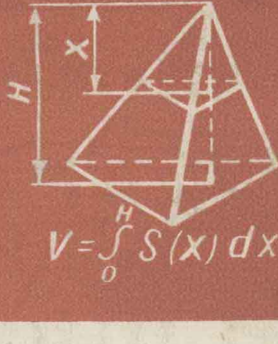
В. М. КЛОПСКИЙ
З. А. СКОПЕЦ
М. И. ЯГОДОВСКИЙ




# ГЕОМЕТРИЯ

## 9·10



В. М. КЛОПСКИЙ,
З. А. СКОПЕЦ,
М. И. ЯГОДОВСКИЙ

# ГЕОМЕТРИЯ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
для 9 и 10 классов
средней школы

ПОД РЕДАКЦИЕЙ З. А. СКОПЕЦА

*Утверждено*
*Министерством просвещения СССР*

Издание 5-е

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1979

513(075)
К 50

В настоящем издании объединены учебные пособия по геометрии для IX и X классов. Основной материал предыдущих изданий не изменился. Единственное исключение — раздел «Задачи на повторение по курсу IX класса», в котором в связи с удалением нескольких задач незначительно изменилась нумерация. Некоторые сокращения проведены в разделах «Приложения».

Для удобства читателя в этой книге сохранена нумерация параграфов и рисунков, приведенная в пособиях для IX и X классов предыдущих изданий.

К $\frac{60601-103}{103(02)-79}$ инф. письмо

# IX класс

## ГЛАВА I

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТЕРЕОМЕТРИИ. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Курс геометрии включает планиметрию и стереометрию. На уроках геометрии в VI—VIII классах вы занимались преимущественно планиметрией. Объектами изучения в планиметрии являются фигуры, лежащие в одной и той же плоскости, например угол, треугольник, параллелограмм, окружность. Все точки каждой из этих фигур принадлежат плоскости. Поэтому такие фигуры называются плоскими.

В стереометрии изучаются фигуры, расположенные в пространстве. Они могут быть неплоскими (примерами таких фигур служат призма, пирамида, цилиндр, сфера) или плоскими. Поэтому сведения из планиметрии применяются и в стереометрии.

Изучая стереометрию, мы продолжим начатое в восьмилетней школе знакомство с аксиоматическим методом построения геометрии, с отображениями фигур, с операциями над векторами и применением векторов при доказательстве теорем и решении задач.

### § 1. О ЛОГИЧЕСКОМ СТРОЕНИИ КУРСА СТЕРЕОМЕТРИИ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТЕРЕОМЕТРИИ

Систематический курс стереометрии строится по той же схеме, что и курс планиметрии:

1. Перечисляются основные понятия, которым не дают определений.

2. Формулируются аксиомы, в которых выражены свойства основных понятий.

3. С помощью основных понятий формулируются определения других геометрических понятий.

4. На основе определений и аксиом доказываются теоремы.

Школьный курс стереометрии не полностью следует такой схеме. Чтобы упростить изложение, доказательства некоторых теорем опускаются. В других случаях теоремы формулируются в виде задач.

Основных понятий в стереометрии четыре: **точка, прямая, плоскость** и **расстояние**. Понятие «множество» также является основным (неопределяемым), причем не только в геометрии, но и во всех других разделах математики. Всякое множество точек

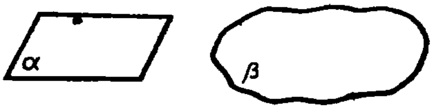



Рис. 1

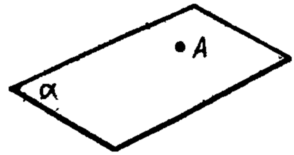



Рис. 2

в геометрии называют **фигурой**. Примерами фигур служат прямая и плоскость.

На рисунках плоскость будем изображать в виде параллелограмма или какой-нибудь другой плоской фигуры (рис. 1). Плоскости обозначают обычно буквами греческого алфавита: $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и т. п. Для точек и прямых сохраним обозначения, принятые в планиметрии: точки $A$, $B$, $C$, ...; прямые $a$, $b$, $c$, ..., а также $(AB)$, $(AC)$ и т. п.

Если точка $A$ принадлежит плоскости $\alpha$ ($A \in \alpha$, рис. 2), то говорят: «Плоскость $\alpha$ проходит (или проведена) через точку $A$». Такие же термины применяются и по отношению к прямой $a$, которой принадлежит точка $A$.

Множество $U$ всех рассматриваемых в стереометрии точек называют **пространством**. Любая фигура $\Phi$ является подмножеством пространства: $\Phi \subset U$.

### Задачи

**1°**[1]. Перечислите основные понятия курса планиметрии.

**2°**. Укажите, какие из приведенных ниже математических предложений являются аксиомами, теоремами или определениями курса планиметрии:

1) к данной прямой через данную точку можно провести только один перпендикуляр;
2) расстояние от $A$ до $B$ равно расстоянию от $B$ до $A$;
3) длина ломаной больше расстояния между ее концами;
4) пересечение двух фигур есть фигура, состоящая из всех точек, которые принадлежат каждой из данных фигур;
5) перемещение — это отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояния;
6) через любую точку можно провести прямую, параллельную данной прямой;
7) параллельный перенос есть перемещение;
8) через любые три точки, не принадлежащие одной прямой, можно провести одну и только одну окружность;
9) конгруэнтные многоугольники имеют равные площади;
10) поворот на 180° вокруг центра $O$ есть центральная симметрия с центром $O$.

[1] Знак «°» над номером задачи означает, что она рекомендуется для устного решения.

## § 2. АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ

В аксиомах стереометрии выражены основные свойства неопределяемых понятий: точки, прямой, плоскости и расстояния. В отвлеченной форме аксиомы стереометрии отражают свойства реального пространства. Именно это лежит в основе применения стереометрии к практике.

Первые пять аксиом связаны с понятием принадлежности.

Аксиома 1. ***Существует хотя бы одна прямая и хотя бы одна плоскость. Каждая прямая и каждая плоскость есть не совпадающее с пространством непустое множество точек.***

Из аксиомы 1 следует, что для любой плоскости $\alpha$ существует не принадлежащая ей точка $A$ (рис. 3). В этом случае говорят, что точка $A$ взята вне плоскости $\alpha$, и записывают: $A \notin \alpha$.

Точно так же верно утверждение, что для любой прямой существует точка, не принадлежащая этой прямой.

Аксиома 2. ***Через любые две различные точки проходит одна и только одна прямая.***

Согласно аксиоме 2 прямые $a$ и $b$, имеющие две различные общие точки, совпадают: $a = b$.

Аксиома 3. ***Прямая, проходящая через две различные точки плоскости, лежит в этой плоскости.***

Аксиома 3 позволяет объяснить смысл практического способа проверки того, является ли поверхность какого-либо предмета плоской. К поверхности в различных ее точках прикладывают ребро хорошо выверенной линейки и смотрят, нет ли просветов между линейкой и поверхностью.

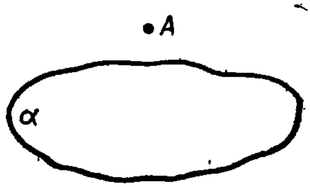



Рис. 3

Слова «прямая $a$ лежит в плоскости $\alpha$» (рис. 4) означают на языке теории множеств, что прямая $a$ является подмножеством плоскости $\alpha$, то есть $a \subset \alpha$. Иначе говорят: «Прямая $a$ содержится в плоскости $\alpha$», а также «Плоскость $\alpha$ проходит (или проведена) через прямую $a$».

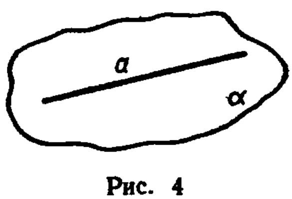



Рис. 4

Прямая и плоскость могут иметь единственную общую точку. Докажем это.

Пусть дана плоскость $\alpha$ (рис. 5). По аксиоме 1 существуют точка $A$, принадлежащая плоскости $\alpha$, и точка $B$, не принадлежащая этой плоскости. Через $A$ и $B$ проведем прямую $a$ (аксиома 2). Предположим, что прямая $a$ имеет с плоскостью $\alpha$ еще одну общую точку, отличную от $A$. Тогда, согласно аксиоме 3, $a \subset \alpha$ и точка $B$ также принадлежит плоскости $\alpha$. Но

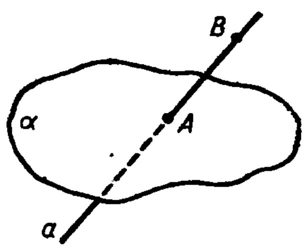



Рис. 5

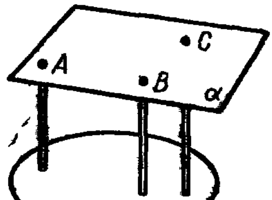



Рис. 6

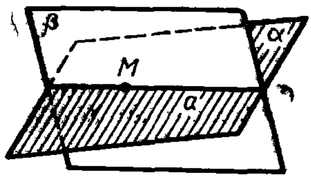



Рис. 7

это противоречит выбору точки $B$. Следовательно, наше предположение неверно, и $a \cap \alpha = A$.

Если пересечением прямой и плоскости служит точка, то говорят, что прямая *пересекает* плоскость в этой точке.

Аксиома 4. ***Через три точки, не принадлежащие одной прямой, проходит одна и только одна плоскость.***

Эту аксиому можно иллюстрировать с помощью модели, состоящей из концов трех заостренных стержней и листка картона (рис. 6).

Плоскость, проходящую через точки $A$, $B$, $C$, не принадлежащие одной прямой, будем обозначать символом $(ABC)$.

Аксиома 4 позволяет утверждать, что плоскости $\alpha$ и $\beta$ совпадают ($\alpha = \beta$), если они имеют три общие точки, не принадлежащие одной прямой.

Аксиома 5. ***Если две различные плоскости имеют общую точку, то их пересечение есть прямая.***

Две плоскости, пересечением которых является прямая ($\alpha \cap \beta = a$, рис. 7), называются *пересекающимися плоскостями*.

Моделью, иллюстрирующей аксиому 5, может служить пересечение поверхностей двух смежных стен классной комнаты.

В следующих трех аксиомах выражены свойства основного понятия «расстояние».

Аксиома 6. ***Для любых двух точек A и B имеется неотрицательная величина, называемая расстоянием от A до B. Расстояние |AB| равно нулю в том и только в том случае, если точки A и B совпадают.***

Аксиома 7. ***Расстояние от точки A до точки B равно расстоянию от точки B до точки A:***

$$|AB| = |BA|.$$

Аксиома 8. ***Для любых трех точек A, B, C расстояние от A до C не больше суммы расстояний от A до B и от B до C:***

$$|AC| \leqslant |AB| + |BC|.$$

Прежде чем сформулировать последнюю аксиому, напомним, что в планиметрии, помимо аксиом принадлежности и расстояния, были приняты аксиомы еще трех групп: порядка, подвижности плоскости и параллельных прямых[1].

---

[1] См. «Приложения», с. 193, 194.

Аксиома 9. ***Для каждой плоскости выполняются известные из планиметрии аксиомы порядка, подвижности плоскости и параллельных прямых.***

Из принятых выше аксиом вытекает, что в каждой плоскости можно применять теоремы планиметрии. Например, в каждой плоскости выполняется теорема Пифагора; сумма углов любого треугольника равна 180°

**Задачи**

3. Прочитайте записи и сделайте схематические рисунки:

1) $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$, $C \in (AB)$;

2) $A \in \alpha$, $a \subset \alpha$, $A \notin a$;

3) $a \cap \alpha = A$, $b \cap \alpha = A$;

4) $a \cap b = A$, $a \not\subset \alpha$, $b \not\subset \alpha$;

5) $\alpha \cap \beta = a$, $b \cap a = A$, $b \subset \beta$;

6) $\{A, B, C\} \subset \alpha$, $C \notin (AB)$, $\{A, C\} \subset \beta$, $\beta \neq \alpha$.

4. Запишите символически: 1) точка $A$ принадлежит плоскости $\alpha$, но не принадлежит плоскости $\beta$; 2) прямая $a$ проходит через точку $M$, не принадлежащую плоскости $\alpha$, причем $a$ не лежит в плоскости $\alpha$; 3) прямые $a$ и $b$ проходят через точку $M$, принадлежащую плоскости $\alpha$, причем $a$ лежит в плоскости $\alpha$, $b$ не лежит в этой плоскости; 4) прямая $a$ и плоскость $\alpha$ пересекаются в точке $M$, плоскость $\alpha$ пересекается с плоскостью $\beta$ по прямой $b$, причем $b$ не проходит через точку $M$.

5°. Вместо многоточия поставьте «необходимо», или «достаточно», или «необходимо и достаточно»[1]:

1) Для совпадения двух прямых . . ., чтобы они имели общую точку.

2) Для совпадения двух плоскостей . . ., чтобы они имели три общие точки, не принадлежащие прямой.

3) Для того чтобы плоскости $\alpha$ и $\beta$ пересекались, . . ., чтобы они имели общую точку.

4) Для того чтобы плоскость $\alpha$ содержала прямую $a$, . . ., чтобы $a$ и $\alpha$ имели две различные общие точки.

6°. 1) Верно ли утверждение, что через данную точку и любую точку данной прямой можно провести единственную прямую?

2) В треугольнике $ABC$ построена точка пересечения высот. Верно ли утверждение, что через эту точку и точку $A$ можно провести единственную прямую?

7°. Даны плоскость $\alpha$ и прямоугольник $ABCD$. Может ли плоскости $\alpha$ принадлежать: 1) только одна вершина прямоугольника; 2) только две его вершины; 3) только три вершины?

8°. Две вершины треугольника принадлежат плоскости. Принадлежит ли ей третья вершина, если известно, что данная

---

[1] О необходимом, достаточном, необходимом и достаточном условиях см. с. 196.

плоскости принадлежит: 1) центр вписанной в треугольник окружности; 2) центр описанной около него окружности?

9°. Объясните, почему любой стол, имеющий три ножки, обязательно устойчив, а по отношению к столу с четырьмя ножками этого утверждать нельзя.

10°. Каждая ли точка дуги окружности принадлежит плоскости, если известно, что этой плоскости принадлежат: 1) две различные точки дуги; 2) три различные точки дуги?

11°. Как можно проверить качество изготовления линейки, имея хорошо обработанную плоскую плиту? На каком теоретическом положении основана эта проверка?

12°. Могут ли две различные плоскости иметь две различные общие прямые?

13*. Дано: $a \cap b = C, b \cap c = A, c \cap a = B, A \neq B, A_1 \in a, B_1 \in b, C_1 \in (A_1B_1)$. Доказать: $C_1 \in (ABC)$.

14. Дано: $\alpha \cap \beta = m, a \subset \alpha, b \subset \beta, a \cap b = A$. Доказать: $A \in m$.

15. Даны точки $A$, $B$, $C$, причем $A \notin (BC)$. Докажите, что $|AB| + |BC| > |AC|$.

## § 3. СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ

1. Следствие 1. *Через прямую и не принадлежащую ей точку можно провести одну и только одну плоскость.*

Доказательство. Пусть даны прямая $a$ и не принадлежащая ей точка $M$ (рис. 8, $a$). На данной прямой выберем две различные точки $B$ и $C$. Согласно аксиоме 4, через точки $M$, $B$ и $C$ проходит плоскость $\alpha$, причем прямая $a$ лежит в этой плоскости (аксиома 3). Итак, доказано существование плоскости, проходящей через $a$ и $M$. Единственность такой плоскости следует из аксиомы 4. Действительно, любая плоскость, содержащая прямую $a$ и точку $M$, проходит через точки $B$, $C$, $M$. Но через эти точки нельзя провести две различные плоскости. ■[1]

Две прямые называют *пересекающимися*, если они имеют единственную общую точку ($a \cap b = O$; рис. 8, б).

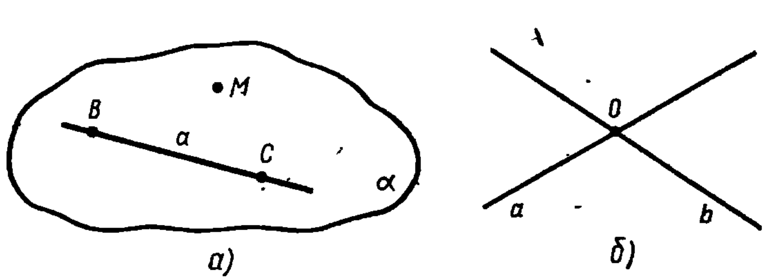



Рис. 8

[1] Знак ■ заменяет слова «доказательство закончено».

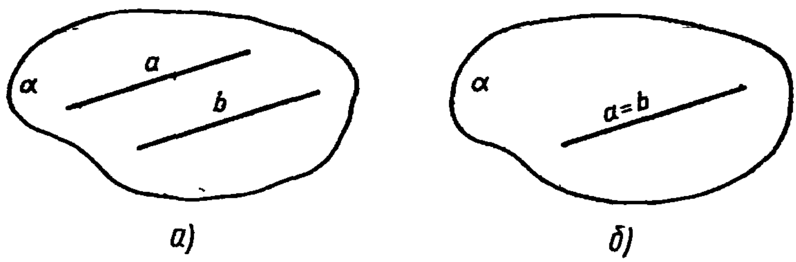



Рис. 9

Следствие 2. *Через две пересекающиеся прямые можно провести одну и только одну плоскость.* (Докажите самостоятельно.)

Определение параллельных прямых, известное из планиметрии, сохраняется и в стереометрии: **две прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не имеют общей точки или совпадают** (рис. 9, *а* и *б*).

Следствие 3. *Через две различные параллельные прямые можно провести только одну плоскость.*

Существование одной такой плоскости следует из определения параллельных прямых, поэтому оно особо не оговаривается в формулировке следствия. Докажите, что не существует другой плоскости, проходящей через обе данные прямые.

**2.** Пусть дана плоскость $\alpha$. Рассмотрим множество всех точек пространства, не принадлежащих $\alpha$. Плоскость $\alpha$ разбивает это множество на два непустых подмножества, которые называются **открытыми полупространствами** с границей $\alpha$. Принимаем без доказательства следующие свойства открытых полупространств (рис. 10, *а*, *б*):

1. *Отрезок, соединяющий любые две точки открытого полупространства, не пересекает его границы.*

2. *Отрезок, соединяющий любые две точки различных открытых полупространств с общей границей, пересекает эту границу.*

Если точки $A$ и $B$ принадлежат открытому полупространству с границей $\alpha$, то говорят, что $A$ и $B$ расположены по одну сторону от плоскости $\alpha$ (рис. 10, *а*). Если же $A$ и $B$ принадлежат различным

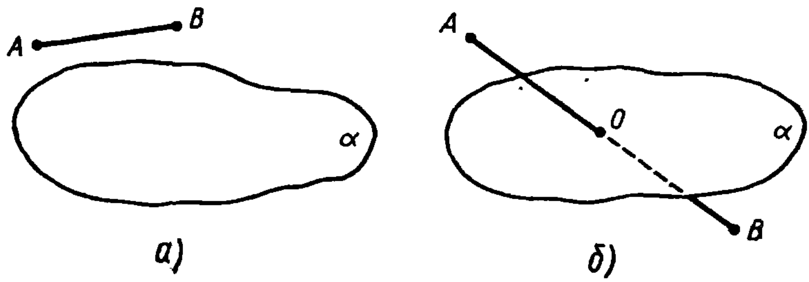



Рис. 10

открытым полупространствам с общей границей $\alpha$, то $A$ и $B$ расположены по разные стороны от $\alpha$ (рис. 10, *б*).

Объединение открытого полупространства и его границы называют **замкнутым полупространством** (или просто полупространством).

Полупространство является выпуклой фигурой[1].

**Задачи**

**16°.** Сколько различных плоскостей можно провести:
1) через одну точку; 2) через две различные точки; 3) через три различные точки; 4) через четыре точки, никакие три из которых не принадлежат одной прямой?

**17.** Дано: $a \cap b = A$, $a \subset \alpha$. Верно ли утверждение, что: 1) $A \in \alpha$; 2) $b \subset \alpha$?

**18°.** 1) Даны четыре точки, не принадлежащие одной плоскости. Докажите, что никакие три из них не принадлежат одной прямой.

2) Верно ли обратное утверждение?

**19°.** Из четырех точек никакие три не принадлежат окружности. Принадлежат ли все четыре точки одной плоскости?

**20.** Даны две несовпадающие параллельные прямые. Докажите, что все прямые, пересекающие обе данные прямые, лежат в одной плоскости.

**21°.** Даны две пересекающиеся прямые. Верно ли утверждение, что любая прямая, пересекающая обе данные прямые, лежит с ними в одной плоскости?

**22°.** Может ли пересечение сторон угла с плоскостью быть одной точкой, двумя различными точками, тремя различными точками?

**23.** Дано множество лучей, имеющих общее начало. Никакие три из них не лежат в одной плоскости. Сколько различных плоскостей можно провести так, чтобы в каждой плоскости лежало по два из данных лучей, если всего лучей: 1) три, 2) четыре, 3) $n$?

**24.** Три различные плоскости имеют общую точку. Верно ли утверждение, что эти плоскости имеют общую прямую? Сколько различных прямых может получиться при попарном пересечении этих плоскостей?

**25.** 1) Даны отрезки $AB$, $BC$, $CD$, $DA$, причем $(AC) \cap (BD) = M$. Докажите, что данные отрезки лежат в одной плоскости.

2°) Столяр с помощью двух нитей проверяет, будет ли устойчиво стоять на полу изготовленный стол, имеющий четыре ножки. Как нужно натянуть нити?

---

[1] Определение выпуклой фигуры, известное из планиметрии, распространяется и на пространственные фигуры: фигура называется выпуклой, если она содержит отрезок, соединяющий любые две ее точки.

26°. 1) $P_1$ и $P_2$ — различные полупространства с общей границей $\alpha$. Найдите: а) $P_1 \cap P_2$; б) $P_1 \cup P_2$.

2) Охарактеризуйте взаимное расположение полупространств $P$ и $Q$ и их границ $\alpha$ и $\beta$, если: а) $P \cap Q = \alpha$; б) $P \cup Q = P \cap Q$.

## § 4. ПРОВЕДЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРЯМОЙ, ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ДАННОЙ ПРЯМОЙ

Геометрические построения на плоскости выполняют при помощи чертежных инструментов — циркуля, линейки, угольника.

Мы не располагаем инструментами для проведения в пространстве прямой или плоскости. Поэтому в стереометрии термин «провести плоскость (прямую)» употребляют в смысле «доказать существование плоскости (прямой)», удовлетворяющей поставленным условиям. Например, в предыдущем параграфе (следствие 1) говорится о проведении плоскости через прямую и точку вне ее. Это означает, что существует плоскость, проходящая через данные прямую и точку.

Доказательство теорем и решение многих задач сопровождается схематическими рисунками фигур, причем их выполнение не проводится по строго сформулированным правилам: достаточно, чтобы чертеж вызывал желаемое представление об изображаемой фигуре. Иной подход к выполнению чертежей в стереометрии будет рассмотрен в § 5, 12 и 13.

**Задача.** Через данную точку $M$ провести прямую, параллельную данной прямой $a$.

Решение. Возможны два случая.

а) Пусть $M \notin a$ (рис. 11, *а*). Согласно определению параллельных прямых, данная и искомая прямые должны лежать в одной плоскости.

1. Проведем плоскость $\alpha$ через точку $M$ и прямую $a$ (§ 3, следствие 1).

2. В плоскости $\alpha$ проведем через $M$ прямую $b$, параллельную $a$ (это выполнимо на основании аксиомы 9); $b$ — искомая прямая.

Задача имеет единственное решение. Докажем это.

Искомая прямая $b$ должна лежать в той единственной плоскости $\alpha$, которая проходит через прямую $a$ и точку $M$. В плоскости $\alpha$ существует единственная прямая, параллельная $a$ и проходящая через $M$ (это известно из планиметрии).

б) Пусть $M \in a$ (рис. 11, *б*). В этом случае единственной прямой, проходящей через $M$ и параллельной $a$, служит данная прямая $a$.

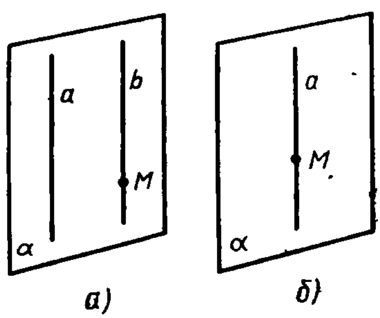



Рис. 11

Мы доказали, что в пространстве *через данную точку можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной прямой.*

**Задачи**

27. Даны прямая $a$ и точка $M$. Через данную точку проведите прямую, пересекающую данную прямую под прямым углом. Сколько решений имеет задача, если: 1) $M \notin a$; 2) $M \in a$?

28. Дано: $a \cap \alpha = M$, $N \notin a$. Проведите линию пересечения плоскости $\alpha$ с плоскостью, проходящей через $a$ и $N$.

29. В плоскости $\alpha$ даны прямая $a$ и точка $M$. Через точку $N \notin \alpha$ проведите плоскость $\beta$ так, чтобы линия пересечения плоскостей $\alpha$ и $\beta$ проходила через $M$ и была перпендикулярна к $a$.

## § 5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЯ МНОГОГРАННИКА[1]

Простейшим многогранником служит треугольная пирамида (рис. 12). Она имеет всего четыре грани. Поэтому мы будем ее кратко именовать *тетраэдром* (четырехгранником). Если пересечением многогранника и плоскости является многоугольник, то этот многоугольник называют *сечением многогранника* данной плоскостью.

**Задача.** На ребрах $AB$, $AD$, $CD$ тетраэдра $ABCD$ выбраны соответственно точки $M$, $N$, $P$ так, что прямые $NP$ и $AC$ не параллельны (рис. 13). Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через данные точки.

Решение. Плоскость, проходящую через точки $M$, $N$, $P$, обозначим $\alpha$. Плоскость $\alpha$ имеет с плоскостью $DAC$ общие точки $N$ и $P$, поэтому пересечение плоскостей $DAC$ и $\alpha$ есть прямая $NP$ (аксиома 5). Отрезок $NP$ — пересечение грани $DAC$ и плоскости $\alpha$. Аналогично построим отрезок $NM$.

Точка $M$ принадлежит плоскости $\alpha$ и плоскости $ABC$; для построения линии пересечения этих плоскостей достаточно найти еще одну их общую точку. Такой точкой является точка $K$ пе-

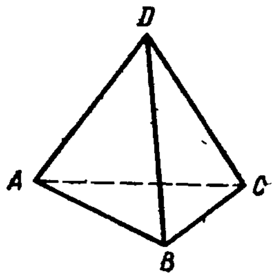


Рис. 12

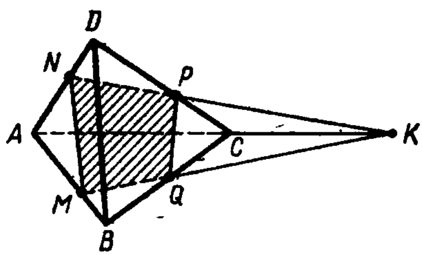


Рис. 13

[1] Понятия «многогранник», «пирамида», «параллелепипед» и т. п. будут определены в X классе. Сейчас мы основываемся на сведениях из восьмилетней школы.

ресечения прямых $NP$ и $AC$ ($K \in \alpha$ и $K \in (ABC)$). Построив прямую $MK$, получим точку $Q$ на ребре $BC$. Отрезки $MQ$ и $QP$ — остальные стороны искомого сечения.

Символическая запись построения:

1) $\alpha = (MNP)$; 2) $[NP] = \alpha \cap \triangle ADC$, $[NM] = \alpha \cap \triangle ADB$; 3) $(NP) \cap (AC) = K$; 4) $(KM) \cap [BC] = Q$; 5) $[MQ] = \alpha \cap \triangle ABC$, $[QP] = \alpha \cap \triangle BDC$.

Четырехугольник $MNPQ$ — искомое сечение.

Замечание. Чертеж к этой задаче имеет существенные отличия от иллюстративных чертежей, применявшихся в предыдущем параграфе. Именно: на рисунке 13 точки $K$ и $D$, отрезки $MQ$, $QP$ и другие выбирались не произвольно, а занимали вполне определенное положение на изображении тетраэдра. Кроме того, построения теперь выполнялись чертежными инструментами. Рассмотренные построения являются примерами так называемых построений на проекционном чертеже. Подробнее о них вы узнаете позднее, при изучении § 12, 13.

### Задачи

**30°.** Каждое из ребер тетраэдра $ABCD$ (рис. 12) равно $a$. Найдите: 1) сумму длин всех его ребер; 2) сумму площадей всех его граней.

**31.** Даны тетраэдр $ABCD$ и точки $M$ и $N$, $M \in [DC]$, $N \in [AB]$. Постройте линию пересечения плоскостей $ABM$ и $DCN$.

**32.** 1) Постройте сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через вершину $B$ и середины ребер $AD$ и $CD$.

2) Найдите площадь сечения, если каждое ребро тетраэдра равно $a$.

**33.** 1) Постройте сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через ребро $DC$ и точку пересечения медиан грани $ACB$.

2) Найдите площадь сечения, если каждое ребро тетраэдра равно $a$.

**34.** Плоскость $\alpha$ задана тремя различными точками, принадлежащими соответственно ребрам $DA$, $DB$, $DC$ тетраэдра $ABCD$. Постройте точку пересечения плоскости $\alpha$ с прямой, проведенной через вершину $D$ и точку пересечения медиан грани $ABC$.

**35.** Дан тетраэдр $ABCD$. Постройте его сечение плоскостью, проходящей через медиану $DD_1$ грани $DBC$ и точку $M$, которая принадлежит грани $ADC$, но не принадлежит ни одному из ребер тетраэдра.

## § 6. СКРЕЩИВАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ. ПРИЗНАК СКРЕЩИВАЮЩИХСЯ ПРЯМЫХ

Мы уже знаем, что две прямые $a$ и $b$ в пространстве могут быть пересекающимися или параллельными (в частном случае совпадающими). Оказывается, возможен еще один характерный

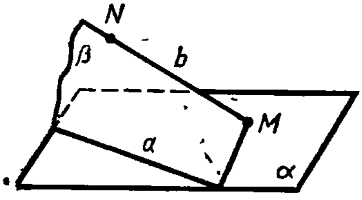


Рис. 14

для стереометрии случай взаимного расположения двух прямых в пространстве.

Определение. **Две прямые называются скрещивающимися, если они не пересекаются и не параллельны.**

Докажем существование скрещивающихся прямых.

В плоскости $\alpha$ проведем прямую $a$ и выберем в этой плоскости точку $M$, не принадлежащую $a$ (рис. 14). Через точку $M$ и произвольную точку $N$, взятую вне плоскости $\alpha$, проведем прямую $b$. Докажем, что прямые $a$ и $b$ скрещиваются.

Применим способ рассуждения «от противного». Предположим, что прямые $a$ и $b$ пересекаются или параллельны. Тогда обе они лежат в некоторой плоскости $\beta$ (рис. 14). Плоскости $\beta$ и $\alpha$ совпадают (обе они проходят через прямую $a$ и точку $M$ вне ее). Но $\beta$ проходит и через точку $N$, не принадлежащую $\alpha$, поэтому $\beta$ не может совпасть с $\alpha$. Получено противоречие, т. е. наше предположение неверно. Следовательно, прямые $a$ и $b$ скрещиваются. ■

Доказан признак скрещивающихся прямых.

Теорема. ***Если одна из двух прямых лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то данные прямые скрещиваются.***

Для обозначения скрещивающихся прямых $a$ и $b$ будем применять запись $a \dot{-} b$. Обратите внимание: через скрещивающиеся прямые нельзя провести плоскость.

## Задачи

**36°.** 1) Укажите на модели куба несколько пар его ребер, лежащих на скрещивающихся прямых.

2) Укажите модели скрещивающихся прямых, пользуясь предметами классной обстановки.

**37.** Через данную точку проведите прямую, скрещивающуюся с данной прямой.

**38.** Верны ли высказывания: 1°) «Если две прямые в пространстве не имеют общей точки, то они параллельны»?

2) $(a \dot{-} b,\ b \dot{-} c) \Rightarrow (a \dot{-} c)$?

**39°.** Известно, что $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $\alpha \cap \beta = m$. Возможны ли какие-либо случаи взаимного расположения прямых $AB$ и $m$, кроме случая, изображенного на рисунке 15?

**40°.** Назовите два ребра тетраэдра $ABCD$ (рис. 12), лежащие на скрещивающихся прямых. Сколько таких пар ребер имеет тетраэдр?

**41°.** Даны прямая $m$ и две принадлежащие ей точки $A$ и $B$. Через точки $A$ и $B$ проведены соответственно прямые $a$ и $b$, пер-

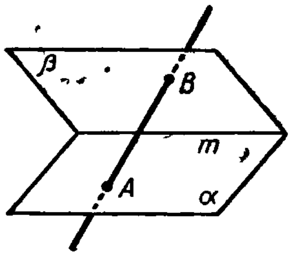



Рис. 15

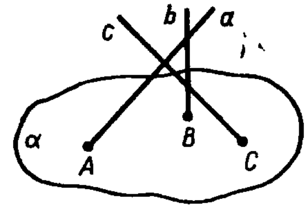



Рис. 16

пендикулярные прямой $m$. Каким может быть взаимное расположение прямых $a$ и $b$?

**42.** Дано: $a \dot{-} b$, $\{A_1, A_2\} \subset a$, $\{B_1, B_2\} \subset b$.
Доказать: $(A_1B_1) \dot{-} (A_2B_2)$, $(A_1B_2) \dot{-} (A_2B_1)$.

**43.** Прямые $a$, $b$, $c$ пересекают плоскость $\alpha$ в точках $A$, $B$, $C$, причем $A \notin (BC)$ (рис. 16). Могут ли данные прямые быть попарно пересекающимися?

## § 7. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ. ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Нам уже известны два случая взаимного расположения прямой и плоскости: 1) прямая лежит в плоскости, если две различные точки этой прямой принадлежат плоскости (§ 2, аксиома 3); 2) прямая и плоскость пересекаются, если они имеют единственную общую точку (§ 2).

Докажем, что возможен и третий случай: прямая $a$ и плоскость $\alpha$ не имеют общей точки ($a \cap \alpha = \varnothing$).

Пусть даны плоскость $\alpha$ и не принадлежащая ей точка $M$ (рис. 17). Проведем в плоскости $\alpha$ произвольную прямую $b$. Через точку $M$ проведем прямую $a$, параллельную $b$.

Предположим, что $a$ и $\alpha$ имеют общую точку $N$ (рис. 18). Прямые $a$ и $b$ параллельны и различны, поэтому прямая $b$ не может проходить через точку $N$, принадлежащую $a$. Тогда по признаку скрещивающихся прямых (§ 6) прямые $a$ и $b$ скрещиваются.

Пришли к противоречию: прямые $a$ и $b$ одновременно скрещиваются и параллельны. Следовательно, прямая $a$ и плоскость $\alpha$ не имеют общей точки.

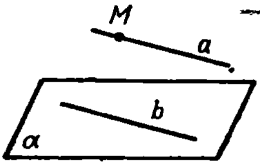



Рис. 17

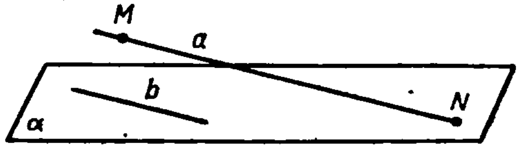



Рис. 18

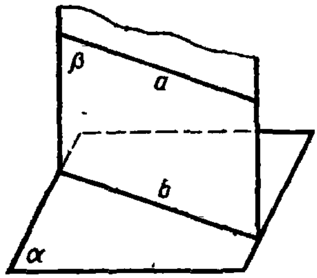



Рис. 19

Итак, возможны только три случая: 1) $a \subset \alpha$; 2) $a \cap \alpha = A$; 3) $a \cap \alpha = \varnothing$. Объединим первый и третий случаи в один, как это было сделано при рассмотрении взаимного расположения двух прямых.

Определение. **Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общей точки или прямая лежит в плоскости.**

Обозначение параллельности прямой и плоскости: $a \parallel \alpha$ или $\alpha \parallel a$.

Имеет место следующий признак параллельности прямой и плоскости.

2. Теорема. ***Если прямая параллельна какой-либо прямой, лежащей в плоскости, то данные прямая и плоскость параллельны.***

При доказательстве следует рассмотреть два случая: 1) прямая $a$ не лежит в плоскости $\alpha$; 2) прямая $a$ лежит в этой плоскости.

Истинность теоремы для первого случая доказывают рассуждения, проведенные выше.

Если $a \subset \alpha$, то $a \parallel \alpha$ согласно определению параллельности прямой и плоскости. ■

3. Теорема (обратная). ***Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.***

Дано: $a \parallel \alpha$, $a \subset \beta$, $\beta \cap \alpha = b$. Доказать: $b \parallel a$.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $a \not\subset \alpha$ (рис. 19). Во-первых, прямые $b$ и $a$ лежат в плоскости $\beta$; во-вторых, прямая $a$ не может пересекать прямую $b$, так как иначе $a$ пересекла бы плоскость $\alpha$. Следовательно, $b \parallel a$. Истинность теоремы для случая $a \subset \alpha$ очевидна. ■

## Задачи

**44°.** Является ли сформулированное в теореме 2 условие параллельности прямой и плоскости только достаточным или также и необходимым?

**45°.** Прямая $a$ параллельна линии пересечения плоскостей $\alpha$ и $\beta$. Каково взаимное расположение $a$ и $\alpha$, $a$ и $\beta$?

**46°.** Сторона $AB$ треугольника $ABC$ лежит в плоскости $\alpha$. Как расположена относительно этой плоскости прямая $MN$, проходящая через середины сторон $AC$ и $BC$?

**47°.** Через сторону $AB$ правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена плоскость $\alpha$. Как расположена по отношению к этой плоскости прямая: 1) $CF$, 2) $CD$, 3) $DF$, 4) $DE$?