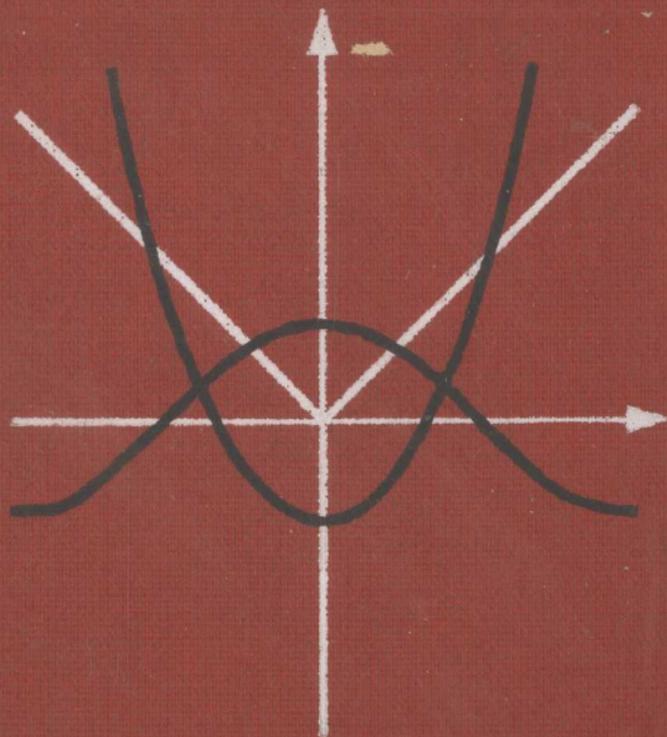


NACHSCHLAGEBUCHER FÜR GRUNDLAGENFÄCHER

MATHEMATIK



Nachschlagbücher für Grundlagenfächer

MATHEMATIK

Von Hans Simon, Kurt Stahl und Helmut Grabowski

13., völlig neubearbeitete Auflage

Mit 445 Bildern und zahlreichen Beispielen



VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG

© VEB Fachbuchverlag Leipzig 1979
13. Auflage
Lizenznummer 114-210/60/79
LSV 1017
Verlagslektor: Helga Fago
Printed in GDR
Gesamtherstellung: Offizin Andersen Nexö,
Graphischer Großbetrieb, Leipzig III/18/38
Redaktionsschluß: 15.1.1979
Bestellnummer 5464407
DDR 13,50 M

NACHSCHLAGEBÜCHER
FÜR GRUNDLAGENFÄCHER
MATHEMATIK

Aus dem Vorwort der bisherigen Auflagen

Die Fächer Mathematik, Physik und Chemie gewinnen auf allen Stufen unseres modernen Bildungswesens, in der allgemein- und berufsbildenden Schule, der Fach- und Ingenieurschule ebenso wie in jeder Form der Erwachsenenqualifizierung, wachsende Bedeutung. Ohne entsprechende Kenntnisse in diesen Fächern gibt es im Zeichen des wissenschaftlich-technischen Fortschritts kein Vorwärtskommen. Keiner, der in der Technik tätig ist, kann sich dieser Tatsache verschließen. Die Kenntnisse dürfen jedoch nicht formal erworben sein, um dann in Vergessenheit zu geraten, sie müssen jederzeit griffbereit und anwendbar sein.

Hierfür sollen die Nachschlagebücher für Grundlagenfächer zuverlässige Helfer sein. Sie sollen den Benutzer schnell und gründlich informieren. Deshalb stellen sie einerseits keine Lehrbücher dar, gehen aber andererseits über den Rahmen der Formelsammlungen hinaus. So werden z. B. in den Nachschlagebüchern die wichtigsten Gesetzmäßigkeiten und Beziehungen hergeleitet und ihre Anwendungen erläutert. Sie sind also praktische Ratgeber bei der Arbeit auf den betreffenden Gebieten. Darüber hinaus werden sie an vielen Schulen an Stelle einer Nachschrift benutzt werden können.

Im Band Mathematik wurde die Untergliederung weitgehend der in der Wissenschaft üblichen Systematik angepaßt, so daß es öfters vorkommt, daß Begriffe und Gesetze in einem Abschnitt verwendet werden, die erst in einem späteren erläutert und systematisch abgehandelt werden. Der Leser muß dann gegebenenfalls dort nachschlagen.

Besonderer Wert wird auf eine genaue Erklärung und Benutzung aller Begriffe, Gesetze, Symbole usw. gelegt. Hinweise auf besonders häufig vorkommende Fehler und zahlreiche Beispiele sollen der heute noch immer vorhandenen Laxheit in Ausdruck und Form mathematischer Schülerarbeiten steuern helfen.

Die Abgrenzung des dargestellten Stoffes war nicht leicht. Da die Mathematik mehr als jedes andere Wissensgebiet einen lückenlosen Aufbau erfordert, waren Stoffgebiete, die Grundlagen für andere darstellen, nicht zu entbehren. Es galt demnach, eine obere Grenze festzulegen, die sicher manchem zu eng erscheinen muß. Um aber den Charakter eines übersichtlichen Ratgebers zu wahren und den Rahmen nicht zu sprengen, konnte der Bogen nicht zu weit gespannt werden, ohne daß die Gründlichkeit der Darstellung gelitten hätte. Das aber sollte unter allen Umständen vermieden werden. So wurde im wesentlichen der Stoff

aufgenommen, der auf jeder schulischen Institution, die zum Abitur führt, vermittelt wird und auf dem dann die weiterführenden Fach- und Hochschulen aufbauen können. Möge das Buch diesem Zwecke gerecht werden!

Es war ein Hauptanliegen der Autoren, das besondere Augenmerk auf eine faßliche Darstellung des Stoffes zu richten. Dadurch sind, auch im Hinblick auf den Leserkreis, mitunter manchen in der Wissenschaft üblichen Formulierungen gewisse Grenzen gesetzt. Die Verfasser waren aber bemüht, bei der Darstellung des Stoffes und bei den verwendeten Formulierungen stets Faßlichkeit und Wissenschaftlichkeit in optimaler Weise zu verbinden.

Vorwort zur 13. Auflage

Seit dem Erscheinen der 1. Auflage dieses Nachschlagewerkes fanden zahlreiche moderne Begriffsbildungen der Mathematik, die früher der Lehre an Hochschulen und Universitäten vorbehalten waren, Eingang in den Mathematikunterricht an den allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen und erweiterten Oberschulen. Es ist das Anliegen der vorliegenden, völlig neubearbeiteten Auflage, diesen Veränderungen Rechnung zu tragen.

Dabei fanden zahlreiche Verbesserungsvorschläge, die dem Verlag und den Autoren von interessierten Lesern zuzingen, Berücksichtigung.

Allen, die auf diese Weise zur Verbesserung dieses Buches beitrugen, sei hiermit sehr herzlich gedankt. Besonderer Dank gebührt Herrn Dr. Steffen Koch, der das Manuskript begutachtete und der in vielen Gesprächen mit den Autoren Einfluß auf die nun vorliegende Fassung nahm.

Verlag und Autoren hoffen, mit dieser Neubearbeitung wiederum einem breiten Leserkreis ein wirksames Hilfsmittel beim Erarbeiten, Festigen und Auffrischen mathematischer Kenntnisse in die Hand zu geben.

Verlag und Autoren

Inhaltsverzeichnis

Symbole	27
---------------	----

LOGIK – MENGENLEHRE

1.	Einiges aus der Logik	33
1.1.	Vorbemerkungen	33
1.2.	Aussagen	35
1.3.	Aussagenfunktionen	35
1.3.1.	Verknüpfungen von Aussagen	35
1.3.2.	Die klassischen zweiwertigen Aussagenfunktionen	36
1.3.3.	Extensionale Aussagenfunktionen und Wahrheitsfunktionen	39
1.4.	Variablen, Terme, Aussageformen	39
1.4.1.	Variablen	39
1.4.2.	Terme	40
1.4.3.	Aussageformen	40
1.5.	„Für alle“ und „Es gibt“	42
1.6.	Logische Identitäten; Wertverlaufsgleichheit	45
1.7.	Folgerungsrelation	47
1.8.	Schlußregeln	49
1.9.	Direkte und indirekte Beweise	52
1.10.	Beweisverfahren der vollständigen Induktion	55
2.	Mengen	57
2.1.	Allgemeines	57
2.2.	Mengen; Elementbeziehung	57
2.3.	Mengenbildungsprinzip und Extensionalitätsprinzip	60
2.4.	Operationen mit Mengen	61
2.5.	Beziehung des Enthaltenseins	66
2.6.	Potenzmengen	68
3.	Abbildungen	70
3.1.	Begriff der Abbildung	70
3.1.1.	Geordnetes Paar; geordnetes n -Tupel	70
3.1.2.	Produktmenge (kartesisches Produkt)	71
3.1.3.	Abbildungen	72
3.2.	Inverse Abbildungen	74
3.3.	Funktionen	75

3.3.1.	Begriff der Funktion	75
3.3.2.	Eineindeutige Funktionen	76
3.3.3.	Zueinander inverse Funktionen	77
3.4.	Verkettung von Abbildungen	77
3.5.	Relationen	78
3.5.1.	Der Relationsbegriff	78
3.5.2.	Eigenschaften von Relationen	79
3.5.3.	Ordnungsrelationen	82
3.5.4.	Äquivalenzrelationen	83
3.6.	Operationen	85
3.6.1.	Der Operationsbegriff	85
3.6.2.	Eigenschaften von Operationen	86
3.7.	Strukturen	88
3.8.	Isomorphe Abbildungen	88
3.9.	Mächtigkeit von Mengen	89

ARITHMETIK – ALGEBRA

4.	Der Bereich der natürlichen Zahlen	92
4.1.	Grundlegende Begriffe	92
4.1.1.	Begriff der Zahl, Darstellung von Zahlen	92
4.1.2.	Variablen, Terme, Aussageformen	92
4.1.3.	Zahlenmengen und Zahlenbereiche	94
4.2.	Definition der natürlichen Zahlen	95
4.2.1.	Genetische Definition der Menge der natürlichen Zahlen	95
4.2.2.	Axiomatische Definition	96
4.2.2.1.	Definitionen, Axiome und Theoreme	96
4.2.2.2.	Die Axiome von PEANO	96
4.3.	Vollständige Induktion	97
4.3.1.	Definitionen durch vollständige Induktion	97
4.3.2.	Beweise durch vollständige Induktion	100
4.4.	Rechenoperationen mit natürlichen Zahlen	102
4.4.1.	Erklärung der vier Grundrechenoperationen	102
4.4.2.	Einige technische Vereinbarungen	104
4.4.3.	Rechengesetze	105
4.4.4.	Besonderheiten der Zahl Null	107
4.5.	Ordnungsrelationen im Bereich der natürlichen Zahlen	107
4.6.	Teilbarkeit im Bereich der natürlichen Zahlen	109
4.6.1.	Teiler, Vielfache	109
4.6.2.	Primzahlen, zusammengesetzte Zahlen	110
4.6.3.	Zerlegung in Primfaktoren	111
4.6.4.	Anzahl der Teiler einer Zahl	111
4.6.5.	Teilbarkeitsregeln	112
4.6.6.	Division mit Rest, Kongruenz, Rest-Proben	113
4.6.7.	Gemeinsame Teiler und Vielfache	114
4.6.7.1.	Gemeinsame Teiler und Vielfache von zwei Zahlen	114

4.6.7.2.	Gemeinsame Teiler und Vielfache beliebig vieler Zahlen	117
4.7.	Zahlensymbole, Ziffernsysteme	118
4.7.1.	Grundbegriffe	118
4.7.2.	Das römische Additionssystem	118
4.7.3.	Positionssysteme	119
4.7.3.1.	Das dekadische oder dezimale Positionssystem	119
4.7.3.2.	Das duale oder dyadische oder binäre Positionssystem	120
4.7.3.3.	Weitere Positionssysteme	121
5.	Erweiterung von Zahlenbereichen	122
5.1.	Grundgedanken	122
5.1.1.	Notwendigkeit der Erweiterung von Zahlenbereichen	122
5.1.2.	Prinzipien der Erweiterung von Zahlenbereichen	122
5.2.	Erweiterung des Bereiches N der natürlichen Zahlen zum Bereich G der ganzen Zahlen	123
5.2.1.	Ziel der Bereichserweiterung	123
5.2.2.	Die Menge der ganzen Zahlen	123
5.2.3.	Rechenoperationen mit ganzen Zahlen	125
5.2.4.	Ordnungsrelationen zwischen ganzen Zahlen	128
5.2.5.	Einbettung von N in G	129
5.2.6.	Eigenschaften des Bereiches der ganzen Zahlen	130
5.3.	Überblick über die Erweiterung von Zahlenbereichen	131
5.3.1.	Von den natürlichen Zahlen zu den rationalen Zahlen	131
5.3.2.	Von den rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen	132
5.3.3.	Von den reellen Zahlen zu den komplexen Zahlen	132
6.	Der Bereich der gebrochenen Zahlen	133
6.1.	Erweiterung des Bereiches N der natürlichen Zahlen zum Bereich R^* der gebrochenen Zahlen	133
6.1.1.	Ziel der Bereichserweiterung	133
6.1.2.	Die Menge der gebrochenen Zahlen	133
6.1.3.	Gemeine Brüche als Darstellungsform gebrochener Zahlen	134
6.1.4.	Einige Bezeichnungen	135
6.1.5.	Erweitern und Kürzen	135
6.1.6.	Gleichnamige Brüche	136
6.1.7.	Veranschaulichung gebrochener Zahlen	137
6.1.8.	Reziproke	137
6.1.9.	Erklärung der vier Grundrechenoperationen	138
6.1.10.	Erklärung der Ordnungsrelation	139
6.1.11.	Der Bereich R^* der gebrochenen Zahlen als Erweiterung des Bereiches N der natürlichen Zahlen	140
6.2.	Darstellung gebrochener Zahlen	141
6.2.1.	Überblick	141
6.2.2.	Dezimale Positionsdarstellung gebrochener Zahlen	142
6.2.3.	Konvertierung	143

6.2.3.1.	Konvertierung vom gemeinen Bruch zum Dezimalbruch	144
6.2.3.2.	Konvertierung vom Dezimalbruch zum gemeinen Bruch	145
6.3.	Praktische Durchführung der vier Grundrechenoperationen mit gebrochenen Zahlen	146
6.3.1.	Addition und Subtraktion	146
6.3.1.1.	Addition und Subtraktion gemeiner Brüche	146
6.3.1.2.	Addition und Subtraktion gemischter Brüche	146
6.3.1.3.	Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen	147
6.3.2.	Multiplikation	147
6.3.2.1.	Multiplikation gemeiner Brüche	147
6.3.2.2.	Multiplikation gemischter Brüche	148
6.3.2.3.	Multiplikation von Dezimalbrüchen	148
6.3.3.	Division	149
6.3.3.1.	Division gemeiner Brüche	149
6.3.3.2.	Division gemischter Brüche	149
6.3.3.3.	Division von Dezimalbrüchen	149
6.4.	Runden von Zahlen	150
6.4.1.	Einführung	150
6.4.2.	Rundungsregeln für alle Ziffern außer 5	151
6.4.3.	Rundungsregeln für 5	151
6.4.4.	Einige allgemeine Bemerkungen zum Runden	152
6.5.	Einheiten physikalischer Größen	154
6.6.	Proportionen	155
6.6.1.	Vergleichen von Zahlen	155
6.6.2.	Verhältnis, Verhältniskette und Proportion	156
6.6.2.1.	Einführung	156
6.6.2.2.	Grundlegende Eigenschaften der Proportion	156
6.6.3.	Proportionalität	158
6.6.3.1.	Einführung	158
6.6.3.2.	Proportionalitätsfaktor	158
6.6.4.	Produktgleichheit	159
6.6.4.1.	Einführung	159
6.6.4.2.	Konstantes Produkt	159
6.6.4.3.	Produktgleichheit und Proportionalität	160
6.6.5.	Praktische Anwendungen	161
6.7.	Prozentrechnung	162
6.7.1.	Prozentbegriff	162
6.7.2.	Grundaufgaben der Prozentrechnung	163
6.7.3.	Schwierigere Prozentaufgaben	165
6.7.3.1.	Vermehrter oder verminderter Grundwert	165
6.7.3.2.	Prozentaufgaben ohne Proportionalität zwischen Prozentwert und Prozentsatz	165
6.7.4.	Einfache Zinsrechnung	166
6.7.4.1.	Begriffsbestimmung	166
6.7.4.2.	Grundformeln der einfachen Zinsrechnung	166

7.	Der Bereich der rationalen Zahlen	167
7.1.	Erweiterung des Bereiches R^* der gebrochenen Zahlen zum Bereich R der rationalen Zahlen	167
7.1.1.	Ziel der Bereichserweiterung	167
7.1.2.	Die Menge der rationalen Zahlen	167
7.1.3.	Darstellung rationaler Zahlen, Bezeichnungen	168
7.1.4.	Erklärung der Rechenoperationen mit rationalen Zahlen	169
7.1.5.	Erklärung der Ordnungsrelation	170
7.1.6.	Der Bereich R der rationalen Zahlen als Erweiterung des Bereiches R^* der gebrochenen Zahlen	171
7.2.	Struktur des Körpers R der rationalen Zahlen	171
7.2.1.	Grundrechenoperationen – Algebraische Struktur	171
7.2.1.1.	Gesetze der Addition und Subtraktion	171
7.2.1.2.	Gesetze der Multiplikation und Division	173
7.2.1.3.	Zusammenhänge zwischen den Operationen 1. und 2. Stufe	174
7.2.2.	Ordnungsrelationen – Ordnungstheoretische Struktur	175
7.3.	Rechnen mit Beträgen rationaler Zahlen	177
7.3.1.	Definition des Betrages einer rationalen Zahl	177
7.3.2.	Grundlegende Eigenschaften der Beträge rationaler Zahlen	177
7.3.3.	Auflösen von Beträgen durch Fallunterscheidungen	178
7.3.4.	Hinweise	179
7.4.	Potenzieren im Körper der rationalen Zahlen	179
7.4.1.	Potenzen mit natürlichen Zahlen als Exponenten	179
7.4.1.1.	Einführung des Potenzbegriffes	179
7.4.1.2.	Produktdarstellung von Potenzen	180
7.4.1.3.	Positive und negative Basen – gerade und ungerade Exponenten	180
7.4.1.4.	Rechengesetze für Potenzen	180
7.4.2.	Potenzen mit ganzen Zahlen als Exponenten	182
7.4.2.1.	Erweiterung des Potenzbegriffes	182
7.4.2.2.	Verallgemeinerung der Rechengesetze für Potenzen	183
7.4.3.	Einige Anwendungen	183
7.4.3.1.	Schreibweise ohne Bruchstrich	183
7.4.3.2.	Schreibweise mit abgetrennten Zehnerpotenzen	184
7.5.	Rechnen mit rationalen Termen	185
7.5.1.	Übersicht	185
7.5.2.	Nur additive Verknüpfungen	185
7.5.2.1.	Einige Fachbezeichnungen	185
7.5.2.2.	Zusammenfassen von Gliedern	185
7.5.2.3.	Additions- und Subtraktionsklammern	186
7.5.3.	Nur multiplikative Verknüpfungen	188
7.5.3.1.	Zusammenfassen	188
7.5.3.2.	Multiplikations- und Divisionsklammern	189
7.5.4.	Kopplung additiver und multiplikativer Verknüpfungen	190

7.5.4.1.	Grundregel	190
7.5.4.2.	Klammern	190
7.5.4.3.	Multiplikation zweier Terme	191
7.5.4.4.	Division zweier Terme (Partialdivision)	191
7.5.5.	Potenzieren von Binomen	193
7.5.5.1.	Binomische Grundformeln	193
7.5.5.2.	Binomischer Lehrsatz	194
7.5.6.	Faktorenzerlegung von ganzrationalen Termen	195
7.5.6.1.	Einführung	195
7.5.6.2.	Ausheben (Ausklammern) gemeinsamer Faktoren	195
7.5.6.3.	Verwendung der binomischen Grundformeln	196
7.5.6.4.	Abtrennen eines Faktors bei Potenzbinomen	196
7.5.6.5.	Zerlegen quadratischer Terme in Linearfaktoren	197
7.5.6.6.	Anwendungen: g. g. T. und k. g. V. von ganzrationalen Termen	197
7.5.7.	Rechnen mit gebrochenrationalen Termen	198
7.5.7.1.	Erweitern und Kürzen	198
7.5.7.2.	Additive Verknüpfung von gebrochenen Termen	199
7.5.7.3.	Multiplikative Verknüpfung von gebrochenen Termen ..	200
8.	Der Bereich der reellen Zahlen	202
8.1.	Erweiterung des Bereiches R der rationalen Zahlen zum Bereich P der reellen Zahlen	202
8.1.1.	Einige Unzulänglichkeiten des Bereiches R der rationalen Zahlen – Ziel der Bereichserweiterung	202
8.1.2.	Die Menge der reellen Zahlen	202
8.1.3.	Rationale und irrationale, algebraische und transzen- dente reelle Zahlen	204
8.1.4.	Darstellung reeller Zahlen	205
8.2.	Potenzieren und Radizieren im Körper P der reellen Zahlen	206
8.2.1.	Potenzen mit reellen Basen und ganzzahligen Expo- nenten	206
8.2.2.	Begriff der Wurzel im Körper der reellen Zahlen	206
8.2.3.	Gerade und ungerade natürliche Zahlen > 0 als Wurzel- exponenten	208
8.2.3.1.	Ungerade natürliche Zahlen als Wurzelexponenten	208
8.2.3.2.	Gerade natürliche Zahlen > 0 als Wurzelexponenten ..	209
8.2.4.	Wurzeln als Potenzen mit gebrochenen Exponenten (2. Erweiterung des Potenzbegriffes)	210
8.2.5.	Rechnen mit Wurzeln	210
8.2.5.1.	Die Wurzelgesetze	210
8.2.5.2.	Umformen von Wurzelausdrücken	211
8.2.6.	Potenz- und Wurzeltafeln	212
8.2.6.1.	Einfaches Ablesen	213
8.2.6.2.	Lineares Interpolieren	213

8.2.6.3.	Reduzieren größerer und kleinerer Zahlen auf die Tabellenwerte	214
8.3.	Logarithmieren im Körper P der reellen Zahlen	215
8.3.1.	Begriff des Logarithmus im Körper der reellen Zahlen	215
8.3.2.	Allgemeine Eigenschaften der Logarithmen	216
8.3.3.	Logarithmensysteme	217
8.3.3.1.	Übersicht	217
8.3.3.2.	Die vier Logarithmengesetze	217
8.3.3.3.	Zusammenhang zwischen Logarithmen verschiedener Systeme	219
8.3.4.	Das dekadische Logarithmensystem	220
8.3.4.1.	Kennzahl und Mantisse	220
8.3.4.2.	Dekadische Logarithmentafeln	222
8.3.4.3.	Berechnungen mit Hilfe dekadischer Logarithmen	223
8.4.	Der Rechenstab	225
8.4.1.	Aufbau des Stabes	225
8.4.2.	A- und B-Skale	226
8.4.3.	C- und D-Skale	228
8.4.4.	CI-Skale	229
8.4.5.	Quadrate und Quadratwurzeln	231
8.4.6.	Marken π , C , C_1 und der Läufer mit Nebenstrichen	232
9.	Der Bereich der komplexen Zahlen	236
9.1.	Erweiterung des Bereiches P der reellen Zahlen zum Bereich K der komplexen Zahlen	236
9.1.1.	Ziel der Bereichserweiterung	236
9.1.2.	Die Menge der komplexen Zahlen	237
9.1.3.	Erklärung der vier Grundrechenoperationen	237
9.1.4.	Der Bereich K der komplexen Zahlen als Erweiterung des Bereiches P der reellen Zahlen	237
9.2.	Darstellung komplexer Zahlen	237
9.2.1.	Die imaginäre Einheit	237
9.2.2.	Reelle, imaginäre und komplexe Zahlen und ihre arithmetische Darstellung	238
9.2.3.	Grafische Darstellung komplexer Zahlen	238
9.2.4.	Kenellysche und goniometrische Darstellung komplexer Zahlen	239
9.3.	Rechnen mit komplexen Zahlen	240
9.3.1.	Gleichheit	240
9.3.2.	Konjugiert komplexe Zahlen	241
9.3.3.	Entgegengesetzte komplexe Zahlen	241
9.3.4.	Addition und Subtraktion komplexer Zahlen	241
9.3.5.	Multiplikation komplexer Zahlen	242
9.3.6.	Division komplexer Zahlen	243
9.3.7.	Potenzen mit ganzzahligen Exponenten	244

9.4.	Gleichungen in K	245
9.4.1.	Grundsätzliches	245
9.4.2.	Potenzgleichungen in K	246
10.	Gleichungen	248
10.1.	Allgemeines	248
10.2.	Einteilung der Gleichungen	253
10.3.	Geschlossen auflösbare algebraische Gleichungen	254
10.3.1.	Lineare Gleichungen in einer Variablen	254
10.3.2.	Quadratische Gleichungen in einer Variablen	257
10.3.2.1.	Lösungsformel für quadratische Gleichungen	257
10.3.2.2.	Sonderfälle	262
10.3.2.3.	VIETAScher Satz	263
10.3.2.4.	Gleichungen, die sich auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen	265
10.3.2.5.	Zeichnerische Auflösung der quadratischen Gleichung ..	267
10.3.3.	Wurzelgleichungen	271
10.4.	Geschlossen auflösbare transzendente Gleichungen	272
10.4.1.	Exponentialgleichungen	272
10.4.2.	Logarithmische Gleichungen	274
10.4.3.	Goniometrische Gleichungen	274
10.4.3.1.	Grundform der goniometrischen Gleichungen	275
10.4.3.2.	Einfache goniometrische Gleichungen in einer Variablen	275
10.4.3.3.	Einfache goniometrische Gleichungssysteme in zwei Variablen	276
10.5.	Näherungsverfahren	278
10.5.1.	Prinzipien und Hilfsmittel	278
10.5.2.	Grafische Näherungsverfahren	279
10.5.2.1.	Nullstellenverfahren	279
10.5.2.2.	Schnittstellenverfahren	281
10.5.3.	Numerische Näherungsverfahren	282
10.5.3.1.	Verfahren der fortgesetzten Unterteilung	283
10.5.3.2.	Verfahren der linearen Interpolation (regula falsi)	284
10.5.3.3.	Verfahren der quadratischen Interpolation	286
10.6.	Gleichungssysteme	287
10.6.1.	Zwei lineare Gleichungen in zwei Variablen	288
10.6.1.1.	Allgemeines	288
10.6.1.2.	Rechnerische Auflösung	289
10.6.1.3.	Zeichnerische Auflösung	291
10.6.1.4.	Existenz und Eindeutigkeit der Lösung	292
10.6.2.	Lineare Gleichungen in mehr als zwei Variablen	294
10.6.3.	Gleichungssysteme höheren Grades in zwei Variablen ..	295
10.6.3.1.	Rechnerische Auflösung	295
10.6.3.2.	Zeichnerische Auflösung	297

10.7.	Textaufgaben	298
10.7.1.	Arbeitsschritte für das Auflösen von Textaufgaben durch Ansetzen von Gleichungen	298
10.7.2.	Erkennen und Darstellen von Gleichheitsbeziehungen . .	299
10.7.3.	Sprachliche Darstellung von Termen und Gleichungen . .	299
10.7.4.	Mathematische Darstellung sprachlich gegebener Größen und Beziehungen	300
10.7.5.	Beispiele	300
11.	Ungleichungen	307
11.1.	Allgemeines	307
11.2.	Äquivalente Ungleichungen	308
11.3.	Intervalle	310
11.4.	Auflösen von Ungleichungen durch Umformungen	310
11.4.1.	Lineare Ungleichungen in einer Variablen	310
11.4.2.	Quadratische Ungleichungen in einer Variablen	312
11.4.2.1.	Reinquadratische Ungleichungen	312
11.4.2.2.	Quadratische Ungleichungen in Normalform	312
11.4.2.3.	Quadratische Ungleichungen in allgemeiner Form	312
11.4.3.	Bruchungleichungen	313
11.4.4.	Wurzelungleichungen	314
11.4.5.	Goniometrische Ungleichungen	315
11.4.6.	Betragsungleichungen	316
11.4.7.	Ungleichungen in zwei Variablen	318
11.5.	Abschätzungen	320
11.5.1.	Dreiecksungleichung	321
11.5.2.	Arithmetische und geometrische Mittel	322
11.5.3.	BERNOULLISCHE Ungleichung	322
11.5.4.	CAUCHY-SCHWARZSCHE Ungleichung	322
11.5.5.	Einige weitere Abschätzungen	323
12.	Determinanten	324
12.1.	Determinanten zweiter Ordnung	324
12.1.1.	Allgemeines	324
12.1.2.	Eigenschaften von Determinanten zweiter Ordnung . . .	325
12.1.3.	Regel von CRAMER	328
12.2.	Determinanten dritter Ordnung	332
12.2.1.	Allgemeines	332
12.2.2.	Auflösung eines Systems von drei linearen Gleichungen in drei Variablen	334
12.3.	Entwicklung einer Determinante nach den Elementen irgendeiner Reihe	336
12.4.	Determinanten n -ter Ordnung	340
13.	Vektoralgebra	344
13.1.	Allgemeines	344

13.2.	Translationen	346
13.2.1.	Begriff der Translation	346
13.2.2.	Nacheinanderausführen von Translationen	347
13.2.3.	Subtraktion von Translationen	350
13.2.4.	Multiplikation einer Translation mit einer reellen Zahl	352
13.2.5.	Ortsverschiebungen	356
13.3.	Der Begriff des Vektorraumes	357
13.4.	Lineare Abhängigkeit, Begriff der Basis	361
13.5.	Vektoren in Koordinatensystemen	367
13.6.	Einfache Vektorgleichungen	372
13.7.	Das Skalarprodukt zweier Vektoren	373
13.7.1.	Winkel zwischen zwei Vektoren	374
13.7.2.	Definition des skalaren Produktes zweier Vektoren	374
13.7.3.	Auftreten des skalaren Produktes in der Mechanik	375
13.7.4.	Rechengesetze für das skalare Produkt	375
13.7.5.	Anwendungen	379
13.7.6.	Unmöglichkeit der Umkehrung der skalaren Multi- plikation	381
13.8.	Vektorprodukt	382
13.8.1.	Definition des Vektorproduktes	382
13.8.2.	Moment einer Kraft	383
13.8.3.	Rechengesetze für das Vektorprodukt	384
13.8.4.	Vektorprodukt in Komponentendarstellung	386
13.8.5.	Anwendungen	387
13.8.6.	Unmöglichkeit der Umkehrung des Vektorproduktes ...	389
13.8.7.	Zusammenfassende Übersicht zum Skalarprodukt und zum Vektorprodukt	390

FUNKTIONENLEHRE – INFINITESIMAL – RECHNUNG

14.	Darstellung und Eigenschaften von Funktionen	391
14.1.	Historische Bemerkungen zum Funktionsbegriff	391
14.2.	Darstellung von Funktionen	392
14.2.1.	Übersicht über die verschiedenen Arten der Dar- stellung	392
14.2.2.	Explizite und implizite Formen von Funktions- gleichungen	392
14.2.3.	Grafische Darstellung von Funktionen	393
14.2.4.	Doppelleitern	395
14.2.5.	Beispiele für die Darstellung von Funktionen	395
14.3.	Funktionen mit besonderen Eigenschaften	398
14.3.1.	Beschränkte Funktionen	398
14.3.2.	Gerade und ungerade Funktionen	399