К. К. Вальтух
Н. П. Дементьев
И. А. Ицкович

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИИ ПОТРЕБЛЕНИЯ

Николай Павлович Дементьев
Иосиф Александрович Ицкович

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИИ ПОТРЕБЛЕНИЯ

Утверждено к печати
Институтом экономики и организации
промышленного производства СО АН СССР

Редактор издательства *К Д Павлова*
Художественный редактор *С М Кудрявцев*
Художник *Н А Пискун*
Технический редактор *Н М Бурлаченко*
Корректоры *Н Крохотина*

Сдано в набор 20 11 85 По Форм
84×108 1/32 Бумага типограф
печать Усл печ л 8,8 У
Зака

Ордена Трудового Красн
отделение
4-я типография издательства 77, ул Ста-
ни

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ И ОРГАНИЗАЦИИ
ПРОМЫШЛЕННОГО ПРОИЗВОДСТВА

К. К. Вальту
Н. П. Дементьев
И. А. Ицкович

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИИ ПОТРЕБЛЕНИЯ

Ответственный редактор
канд. физ.-мат. наук В. И. Бусыгин

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
НОВОСИБИРСК
1986

Вальтух К. К., Дементьев Н. П., Ицкович И. А. Математический и статистический анализ функции потребления.— Новосибирск: Наука, 1986.

Монография посвящена исследованию свойств целевой функции потребления, разработанной на базе фундаментальных идей научной политической экономии и достижений математической теории функций полезности. Авторы решают ряд новых задач, связанных с ограниченностью области задания функции полезности и с учетом зависимости уровня потребления не только от текущих поступлений благ, но и от накопленного имущества.

Книга рассчитана на экономистов широкого профиля, специалистов в области экономико-математических методов, преподавателей и студентов экономических вузов.

Рецензенты *А. Е. Бахтин, Ю. Н. Гаврилец*

В $\frac{0604020102-851}{042(02)-86}$ 70—86—II

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая вниманию читателя книга содержит систематизированное изложение результатов экономико-математических исследований, связанных с построением целевой функции потребления в ее специфической форме, разработанной в Институте экономики и организации промышленного производства СО АН СССР. Исследования исходят из фундаментальных идей научной политической экономии о взаимосвязи в развитии между производством и потреблением, о полезности потребительских благ и представляют собой попытку довести эти идеи до количественного закона поведения массового потребления (структурных сдвигов в потреблении). С этой целью используется математический аппарат поверхностей безразличия, давно развиваемый в литературе применительно к проблемам поведения потребителя. Предлагаемое исследование существенно отличается от распространенной экономико-математической литературы по этому вопросу.

Во-первых, обычно в теории потребления специально подчеркивается, что выбор массового потребителя (вектор x) есть сумма результатов выбора отдельных потребителей (домашних хозяйств): $x_j = \sum_i x_j^i$ для всех j (здесь i — индекс домашнего хозяйства). Само по себе это бесспорно. Но отсюда часто делают вывод, что и теория выбора должна строиться применительно к индивидуальному потребителю. В отличие от этого мы считаем, что теория, применимая на уровне отдельного потребителя, принципиально невозможна. Функция полезности и вытекающая из нее оптимальная кривая строятся для поведения массового потребителя (достаточно крупных социальных групп, населения в целом). Но на деле и авторы, предпринимающие попытки строить индивидуальные функции полезности, затем обрабатывают с их помощью статистику поведения массового потребителя.

Во-вторых, аппарат поверхностей безразличия обычно развивают, исходя из предположения (явно сформулированного или во всяком случае фактически принятого), что потребности могут рассматриваться как практически бесконечные количественно; за этим стоит предположение об исторической неизменности потребностей (хотя допускают изменчивость системы предпочтений)[1]. Из теории о взаимосвязи между развитием производства и потребностей вытекает вывод, что потребности в каждый данный момент ограниченны, хотя бесконечно развиваются и видоизменяются во времени. Учет этого факта порождает, как будет показано, множество разнообразных следствий, находящихся в хорошем соответствии с реальными особенностями поведения массового потребителя. Одно из них — независимость структурных сдвигов в потреблении на уровне крупных агрегатов благ, удовлетворяющих различные потребности, от изменений в соотношениях цен.

В-третьих, обычно функции полезности с использованием аппарата поверхностей безразличия строятся так, что при этом не учитывается накопленное потребительское имущество. Отсюда неточное представление о роли бюджетного ограничения в формировании структуры потребления: дело изображается так, что от бюджетного ограничения непосредственно зависит структура потребления в целом, по всему объему входящих в потребление благ, тогда как на деле от него зависит только текущее поступление благ в потребление (применительно к товарам среднего и длительного сроков службы — возмещение той части накопленного имущества, которая выбывает в соответствующем году из потребления, и прирост имущества). При таком изображении возни-

---

[1] В чисто теоретическом плане необходимость учета ограниченности потребностей в каждый данный момент при их развитии во времени признают многие авторы. Х. Хаутекер еще в 1961 г. указывал, что недостатком теории поведения потребителя является то обстоятельство, что идея поверхностей безразличия не соединена в ней с понятием о насыщении потребностей. Однако это замечание не было реализовано в дальнейших исследованиях.

кают трудности в объяснении повышенно
спроса на потребительские блага среднего и длитель
сроков службы. Излагаемая ниже целевая функция потребления с самого начала строится как функция от всего объема благ, используемых в потреблении.

Книга открывается кратким резюме результатов, известных в литературе и так или иначе используемых в настоящей книге. Всегда предполагается, что область выбора (область определения функции) ограничена не только снизу, но и сверху. Тем самым в исследование вводится понятие об ограниченности потребности в каждый данный момент времени. В гл. 1 исследуются свойства кривых Энгеля, играющих важную роль при построении оптимальной траектории роста потребления. Затем среди функций полезности выделяется одна, по-видимому наиболее простая, свойства которой специально изучаются в гл. 2. Функция порождает специфическую оптимальную траекторию роста потребления, которую предлагается рассматривать как *закон поведения* массового потребителя. После математического исследования этого закона он подвергается статистической проверке в гл. 3.

Авторы будут благодарны читателям за критические замечания, которые просим присылать по адресу: 630090, Новосибирск, проспект Академика Лаврентьева, 17, ИЭиОПП СО АН СССР.

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе изучаются сепарабельные функции полезности, т. е. функции многих переменных вида

$$u = \sum_{j=1}^{n} f_j(v_j),$$

где n — количество потребностей; v_j — абсолютный уровень удовлетворения потребности j, $j = 1, \ldots, n$. Каждая величина имеет свои границы изменения: $v_j^{\min} < v_j \leqslant v_j^{\max}$. Будем считать, что $0 \leqslant v_j^{\min} < v_j^{\max} < \infty$, $j = 1, \ldots, n$. Различаются потребности в некоторых условиях жизни как таковых (пища, одежда, жилище и т. п.) и потребности в конкретных благах, создающих эти условия (см. об этом подробнее [10, с. 99—101, 116—117]). По отношению к любому конкретному виду благ верно, что потребность в нем, даже если она была строго положительной величиной, может отпасть (это благо может быть полностью вытеснено из потребления другими), и тогда следовало бы записать: $v_i^{\min} \geqslant 0$. Но по отношению к крупным агрегатам благ, предназначенных для создания тех или иных условий жизни (пищевые продукты, гардероб, жилые помещения и т. п.), достаточно справедлива запись $v_j^{\min} > 0$.

Некоторое огрубление действительности возникает при такой записи, когда речь идет о вновь возникающих потребностях. Без этого огрубления невозможно существование некоторых предложенных в литературе функций потребления.

Функции f_j рассматриваются как непрерывные.

В действительности потребление некоторых благ изменяется принципиально дискретно (жилые дома, больницы, театры, домашнее оборудование и т. п.). Но когда рассматривается потребление крупных агрегатов благ в масштабах общества в целом или крупных социальных групп, можно без грубой ошибки принять функции $f_j(v_j)$ непрерывными.

В связи с этим надо, строго говоря, различать потребности и блага, их удовлетворяющие. При этом обычно каждое благо служит удовлетворению многих потребностей, а каждая потребность удовлетворяется набором разнообразных благ, т. е. $N_j = N_j(v)$, где j — индекс потребностей; N_j — абсолютный уровень удовлетворения потребности j; v — вектор всех благ, используемых в потреблении, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$. Но обычно принимают с некоторой условностью, что множество индексов благ $\{i\}$ без пересечений разбивается на подмножества R_j благ, удовлетворяющих различные потребности j. Мы также принимаем это предположение.

Относительно функции $f_j(v_j)$, $j = 1, \ldots, n$, примем следующие условия:

H0. $\lim\limits_{v_j \to v_j^{\min}} f_j(v_j) = -\infty, \quad j = 1, \ldots, n.$

H1. $f_j'(v_j) > 0, \ v_j \in (v_j^{\min}, v_j^{\max}), \quad j = 1, \ldots, n.$

H2. $f_j''(v_j) < 0, \quad v_j \in (v_j^{\min}, v_j^{\max}), \quad j = 1, \ldots, n.$

H3. $\lim\limits_{v_j \to v_j^{\min}} f_j'(v_j) = +\infty, \quad j = 1, \ldots, n.$

H4. $f_j'(v_j^{\max}) = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$

Обсудим эти условия. Обозначим буквой G область задания функций полезности:

$$G = (v_1^{\min}, v_1^{\max}] \times \ldots \times (v_n^{\min}, v_n^{\max}].$$

Из содержательных соображений [10], связанных главным образом с дополнительностью благ, мы хотим исключить следующий случай: для некоторого $v \in G$ существует последовательность v^s, $s = 1, 2, \ldots$, такая, что $u(v^s) = u(v)$ и $v_j^s \to v_j^{\min}$ при $s \to \infty$ для некоторого j. Покажем, что этот случай невозможен тогда и только тогда, когда имеет место условие H0.

Необходимость. Так как $f_j(v_j)$ монотонно возрастает, то предел этой функции при $v_j \to v_j^{\min}$ всегда существует (возможно, он равен $-\infty$). Предположим, что для некоторого j_1 $\lim\limits_{v_j \to v_j^{\min}} f_j(v_j) = a > -\infty$. Для каждого $j \neq j_1$ выберем $\bar{v}_j \in (v_j^{\min}, v_j^{\max})$. Зафиксируем некоторый $j_2 \neq j_1$. Пусть $\varepsilon \in \left(0, \min\left(f_{j_2}\left(v_{j_2}^{\max}\right) - f_{j_2}\left(\bar{v}_{j_2}\right), f_{j_1}\left(v_j^{\max}\right) - a\right)\right)$. Обозначим через $\bar{v}_{j_1}$ такое число, что $f_{j_1}\left(\bar{v}_{j_1}\right) = a + \varepsilon$. Ясно, что $\bar{v}_{j_1} \in \left(v_{j_1}^{\min}, v_{j_1}^{\max}\right)$. Тогда $\bar{v} \in G$, $\bar{v} = (\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$. Пусть $\left\{v_{j_1}^s\right\}_{s=0}^{\infty}$ — произвольная строго убывающая последовательность, причем $v_{j_1}^0 = \bar{v}_{j_1}$. Рассмотрим последовательность векторов $\bar{v}^s$ такую, что $\bar{v}_{j_1}^s = v_{j_1}^s$, $\bar{v}_j^{s'} = \bar{x}_j$ для $j \neq j_1, j_2$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} f_j\left(\bar{v}_j^s\right) = \sum\limits_{j=1}^{n} f_j\left(\bar{v}_j\right)$. Из последнего соотношения $\bar{v}_{j_2}^s$ определяется однозначно. Последовательность $\bar{v}^s$ сходится к точке v^*, у которой $v_j^* = \bar{v}_j$, $j = j_1, j_2$; $v_{j_1}^* = v_{j_1}^{\min}$; $v_{j_2}^*$— такое число, что $f_{j_2}\left(v_{j_2}^*\right) = f_{j_2}\left(\bar{v}_{j_2}\right) + \varepsilon$. Необходимость доказана.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $v \in G$ — некоторая точка. Определим $\tilde{v} > v^{\min}$ как точку, для которой $\tilde{v}_j$ определяются из уравнения $\sum\limits_{i \neq j} f_i\left(v_i^{\max}\right) + f_j(v_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(v_i)$. Покажем, что для любой точки $\bar{v}$, для которой $u(v) = u(\bar{v})$, справедливо $\bar{v} \geqslant \tilde{v}$. Действительно, зафиксируем индекс j. Тогда из $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i\left(\bar{v}_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(v_i)$ следует: $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x_i) \leqslant \leqslant \sum\limits_{i \neq j} f_i\left(v_i^{\max}\right) + f_j\left(\bar{v}_j\right)$. Из определения $\tilde{v}_j$ вытекает, что $f_j(\bar{v}_j) \geqslant f_j(\tilde{v}_j)$. В силу монотонности f_j имеем $\bar{v}_j \geqslant \tilde{v}_j$. Достаточность доказана.

Условие Н1 (положительность первых производных) гарантирует монотонное возрастание функции полезности: если даны два набора благ $v^1 = \left(v_1^1, v_2^1, \ldots, v_n^1\right)$, $v^2 = \left(v_1^2, v_2^2, \ldots, v_n^2\right)$, причем $v_j^1 \leqslant v_j^2$ для всех j, и, кроме того, хотя бы одна компонента, например $v_i^1 < v_i^2$, то $u(v^1) < u(v^2)$,— чем больше набор благ, тем выше его полезность.

Условие Н2 (отрицательность вторых производных) означает строгую вогнутость функции полезности: если имеется два набора благ из области задания $v^1 \in G$,

$v^2 \in G$, то для всякой точки отрезка, соединяющего эти точки, не совпадающей с его концами, имеет место неравенство

$$u(\alpha v^1 + (1-\alpha)v^2) > \alpha u(v^1) + (1-\alpha)u(v^2), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Из последнего неравенства вытекает, в частности, что строго вогнутая функция не может принимать тождественное значение на прямолинейном отрезке.

Поясним условие H2 геометрически. Пусть c — некоторое число. *Поверхностью безразличия* называется множество $S(c)$ тех точек v из области G функции полезности u, для которых $u(v) = c$, т. е.

$$S(c) = \{v \in G | u(v) = c\}.$$

Может случиться, что функция $u(v)$ не принимает значения c, в этом случае $S(c)$ — пустое множество. Легко видеть, что две поверхности безразличия, соответствующие разным значениям c, не имеют общих точек, т. е. $S(c_1) \cap S(c_2) = \varnothing$, если $c_1 \neq c_2$, иначе нужно было бы допустить существование такой общей точки v, что $u(v) = c_1$ и $u(v) = c_2$, что противоречило бы однозначности функции u.

Таким образом, вся n-мерная область $G \backslash v^{\max}$ заполнена однопараметрическим семейством $(n-1)$-мерных гиперповерхностей (поверхностей безразличия). Ясно, что

$$G = \bigcup_c S(c).$$

Условия H1—H4 относятся к свойствам производных первого и второго порядка. Значения функции полезности в той или иной точке как число (величины c) в общем случае рассматриваются просто как ранги соответствующих векторов в системе предпочтений. В дальнейшем для специальных сепарабельных функций, заданных в ограниченной области, вводится числовая функция, имеющая смысл степени удовлетворения перспективных потребностей.

Введем множество

$$B(c) = \{v \in G | u(v) > c\}$$

для всякого вещественного числа c. Множество $B(c)$ может оказаться пустым. Границей множества $B(c)$ служат поверхность безразличия $S(c)$ и часть границы области G.

Условие Н2 состоит в том, что множество $B(c)$ является выпуклым, а $S(c)$ не содержит отрезков прямых (на отрезках строго вогнутая функция не может быть постоянной).

С понятием поверхности безразличия связано понятие нормы замещения. Пусть $v \in S(c)$ при некотором c, т. е. $u(v)=c$, или, подробнее, $\sum_{j=1}^{n} f_j(v_j)=c$. Вычисляя дифференциал функции u вдоль данной поверхности безразличия, получим $\sum_{j=1}^{n} f'_j(v_j)\,dv_j=0$. Будем считать теперь все $dv_j=0$, кроме двух: dv_k и dv_i; тогда $f'_k(v_k)\,dv_k+f'_i(v_i)\,dv_i=0$, откуда $dv_k/dv_i=-f'_i(v_i)/f'_k(v_k)$. Последнее выражение называется *нормой замещения* продукта k продуктом i. Норма замещения отрицательна. Смысл нормы замещения таков: все точки поверхности безразличия $S(c)$ имеют для массового потребителя одинаковую полезность; при увеличении объема потребления блага i на величину dv_i потребление блага k может быть сокращено на величину нормы замещения, умноженной на dv_i, без общего изменения полезности набора благ.

При $v_i=v_i^{\max}$ имеем $f'_i(v_i^{\max})=0$; по мере приближения к точке $v_i^{\max}$ норма замещения приближается к нулю, т. е. ради увеличения на единицу потребления блага i можно поступиться все меньшим количеством блага k; потребитель не заинтересован увеличить потребление блага i сверх $v_i^{\max}$ — в этом смысл условия Н4.

Таким образом, верхняя граница потребления блага i, в которой $f'_i(v_i^{\max})=0$, является естественной границей объема потребления блага i (в данный момент времени). Если по каким-либо причинам область задания функции искусственно ограничена числом v_i^*, где еще $f'_i(v_i^*)>0$, то массовый потребитель будет пытаться (при определенных условиях) увеличить потребление блага i сверх v_i^*.

При приближении v_i к $v_i^{\min}$ норма замещения стремится к минус бесконечности; это означает, что вблизи точки $v_i^{\min}$ массовый потребитель готов поступиться потреблением достаточно большого количества блага k для увеличения потребления блага i на единицу, и тем больше, чем ближе v_i к $v_i^{\min}$, сохраняя при этом тот же общий уровень полезности набора благ в целом. В этом смысл условия Н3.

Таким образом, условия Н3 и Н4 естественным образом согласованы с промежутком изменения функций $f_j(v_j)$, $j = 1, \ldots, n$.

1. Максимизация функции полезности при заданных ценах и бюджетной сумме

Функция $u(v_1, \ldots, v_n)$ выражает полезность набора $(v_1, \ldots, v_n)$ потребительских благ. Принимается, что массовый потребитель стремится максимизировать функцию полезности, т. е. использовать в потреблении такой вектор v благ, при котором значение $u(v)$ было бы наибольшим. Однако это происходит при ограниченной (в каждый данный момент времени) покупательной способности потребителя, которая, в свою очередь, определяется производительной силой труда. Примем самое простое ограничение, линейное, т. е. будем считать, что в каждый данный отрезок времени t максимум $u(v(t))$ отыскивается при ограничении

$$\sum_{j=1}^{n} p_j(t)\left(\delta_j^t + \Delta_j^t\right) v_j(t-1) = b(t). \qquad (B.1)$$

Здесь $p_j(t)$ — коэффициент полных затрат ограничивающего ресурса (рабочей силы, если речь идет о производстве потребительских благ; денег, если рассматривается процесс в том виде, в каком он выступает на рынке);

$v_j(t-1)$ — количество благ вида j, находившееся в потреблении в отрезок времени $(t-1)$;

δ_j^{t-1} — коэффициент выбытия благ вида j из потребления за отрезок времени $(t-1)$; $\delta_j^{t-1} = 1$ для благ одноразового пользования, а если единицей измерения времени избран, как обычно, год, то для всех благ, полностью потребляемых в течение года (так называемые блага кратковременного пользования); $0 < \delta_j^{t-1}$ для благ многоразового пользования (благ длительного и среднего сроков службы);

Δ_j^t — темп прироста потребления благ вида j в году t;

$b(t)$ — величина ограничивающего ресурса.

Если речь идет о производстве, то $b(t)$ — полные трудовые затраты общества на выпуск потребительских благ в году t. Очевидно, что в этом случае в выражении (В.1) не может быть речи о неравенстве (т. е. о постановке знака $\leqslant$ между левой и правой частью). В случае, если речь идет о рынке товаров и услуг, ограничивающий ресурс $b(t)$ часто трактуют как денежный доход потребителей за период времени t, и тогда ставят знак неравенства $\leqslant$. Но трактовка эта неточна; потребитель может расходовать ранее накопленные деньги или, напротив, продолжать их накапливать. Правильнее трактовать $b(t)$ как суммарный расход, бюджетную сумму и ставить знак равенства. При этом сохраняет силу задача распределения общего ресурса $b(t)$ между покупками благ различного назначения.

Текущие поступления благ вида j

$$x_j(t) = \left(\delta_j^{t-1} + \Delta_j^t\right) v_j(t-1).$$

При этом, если $\delta_j^{t-1} = 1$, то, как легко увидеть, $v_j(t) = x_j(t)$. Обычно в литературе не проводится различие между $v_j(t)$ и $x_j(t)$ $(v_j(t) = x_j(t))$. Это означает, что авторы отвлекаются от особенностей благ среднего и длительного сроков службы (от возможности $0 < \delta_j^t < 1$). Общая теория должна принимать эти особенности во внимание (см. ниже). Излагая здесь (во введении и гл. 1) вопрос так, как это обычно делается в литературе, мы примем $\delta_j^{t-1} = 1$ для всех j. При этом вместо v будем употреблять x (вектор текущих поступлений). Будем также интерпретировать p_j как цены. При этом обычно отвлекаются от агрегатного характера величин x_j. Если принять во внимание, что они включают множество видов товаров, то станет ясно, что само получение агрегата x_j подразумевает использование цен:

$$x_j = \sum_{i \in R_j} p_i x_i,$$

где R_j — есть множество i таких, что блага с индексами i служат удовлетворению потребности j.

Итак, отыскивается

$$\max \left\{ u(x) \mid x \in G,\ \sum_{j=1}^{n} p_j x_j = b \right\}. \tag{В.2}$$

Линейное ограничение $\sum_{j=1}^{n} p_j x_j = b$ обычно называется бюджетным ограничением.

Будем искать решение задачи (В.2) внутри области G и покажем, что такое решение существует. Заметим, что поскольку всякое x_j изменяется в области $(x_j^{\min}, x_j^{\max}]$, то должно иметь место неравенство

$$b^{\min} = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j^{\min} < b \leqslant \sum_{j=1}^{n} p_j x_j^{\max} = b^{\max},$$

которое гарантирует существование общих точек области G и гиперплоскости $\sum_{j=1}^{n} p_j x_j = b$.

Приступим к решению задачи (В.2), которая есть задача на условный экстремум.

Напишем функцию Лагранжа:

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) + \lambda \left(b - \sum_{j=1}^{n} p_j x_j\right).$$

Число λ — множитель Лагранжа. Приравняем нулю производные от функции L по всем x_j и λ, получим $(n+1)$ уравнений

$$f_j'(x_j) - \lambda p_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n; \tag{В.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j = b \tag{В.4}$$

относительно $(n+1)$ неизвестных $x_1, \ldots, x_n, \lambda$.

При изменении x_j от $x_j^{\min}$ до $x_j^{\max}$ функция $f_j'(x_j)$ строго убывает от $+\infty$ до 0. Поэтому уравнение $f_j'(x_j) = \lambda p_j$, зависящее от параметра $\lambda \in [0, \infty)$, однозначно разрешимо относительно x_j. Другими словами, может быть определена функция $\omega_j(\lambda)$ такая, что $f_j'(\omega_j(\lambda)) = \lambda p_j$. При возрастании λ от 0 до $+\infty$ функция $\omega_j(\lambda)$ убывает от $x_j^{\max}$ до $x_j^{\min}$. Подставляя найденные зависимости x_j от λ в бюджетное ограничение (В.4), получим уравнение относительно λ:

$$W(\lambda) \equiv \sum_{j=1}^{n} p_j \omega_j(\lambda) = b.$$

При возрастании λ на $[0, \infty)$ непрерывная функция $W(\lambda)$ строго убывает и пробегает значения от $\sum_{j=1}^{n} p_j x_j^{\max}$ до $\sum_{j=1}^{n} p_j x_j^{\min}$. Рассмотрим два случая:

а) $b \in (b^{\min}, b^{\max})$. По непрерывности найдется $\bar{\lambda} > 0$ такое, что $W(\bar{\lambda}) = \sum_{j=1}^{n} p_j \omega_j(\bar{\lambda}) = b$. Это $\bar{\lambda}$ единственно, так как $W(\lambda)$ строго убывает. Так как $\bar{\lambda} > 0$, то $\bar{x}_j = \omega_j(\bar{\lambda}) \in (x_j^{\min}, x_j^{\max})$;

б) $b = b^{\max}$. В этом случае $\bar{\lambda} = 0$, $\bar{x}_j = \omega_j(0) = x_j^{\max}$.

Итак, решение (В.3), (В.4) существует и единственно для $b \in (b^{\min}, b^{\max}]$.

Уравнения $f_j'(x_j) = \lambda p_j$ имеют простой геометрический смысл. Разыскивая максимум $u(x)$ при бюджетном ограничении, мы должны найти ту поверхность безразличия $S(c)$, которая имеет общие точки с плоскостью $\sum_{j=1}^{n} p_j x_j = b$ при максимально возможном значении числа c. При этом поверхность безразличия $S(c)$ и плоскость имеют только одну общую точку (мы уже показали, что $S(c)$ не содержит отрезков прямых): но тогда плоскость является касательной к поверхности $S(c)$, а потому перпендикуляр к плоскости — вектор $(p_1, \ldots, p_n)$ и нормаль к поверхности в точке касания — вектор $\operatorname{grad} u(x) = (f_1'(x_1), f_2'(x_2), \ldots, f_n'(x_n))$ лежат на одном луче, а это означает пропорциональность компонент этих векторов $f_j'(x_j) = \lambda p_j$, $j = 1, \ldots, n$, где λ — коэффициент пропорциональности.

Числу λ можно придать экономический смысл. Будем рассматривать решение экстремальной задачи как функцию от b: $x_j = x_j(b)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, тогда $u(x_1(b), \ldots, x_n(b)) = u(b)$. Производная $du/db = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{dx_j}{db}$. Но в оптимальной точке $\frac{\partial u}{\partial x_j} = \lambda p_j$, поэтому $du/db = \lambda \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{dx_j}{db}$. Вместе с тем в оптимальной точке $\sum_{j=1}^{n} p_j x_j(b) = b$, поэтому $\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{dx_j}{db} = 1$, тогда $du/db = \lambda$. Мы получили хорошо известный результат: множитель Лагранжа есть производная от оптимального значения целевой функции по параметру b, стоящему в правой части ограничения. Параметр λ положителен — это видно из равенства $f_j'(x_j) = \lambda p_j$, а поэтому $\frac{du}{db} \geqslant 0$ — увеличивая величину b, можно только увеличить значение целевой функции [1].

2. Зависимость оптимального значения u от цены p_k

Будем считать решение экстремальной задачи зависящим от цены при фиксированных остальных параметрах: $x_j = x_j(p_k)$, $u = u(x_1(p_k), x_2(p_k), \ldots, x_n(p_k)) = u(p_k)$. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial p_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial p_k} = \sum_{j=1}^{n} f_j'(x_j) \frac{\partial x_j}{\partial p_k} = \lambda \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j}{\partial p_k}.$$

Вместе с тем $\sum\limits_{j=1}^{n} p_j x_j(p_k) = b$. Дифференцируя по p_k, получим $\sum\limits_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j}{\partial p_k} + x_k(p_k) = 0$. Объединяя результаты дифференцирования, получаем $\frac{\partial u}{\partial p_k} = \lambda \sum\limits_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j}{\partial p_k} = -\lambda x_k(p_k)$.

Но мы видели, что $\lambda = \frac{\partial u}{\partial b}$, поэтому $\frac{\partial u}{\partial p_k} = -x_k \frac{\partial u}{\partial b}$. Равенства

$$x_k(p, b) = -\frac{\partial u}{\partial p_k}(p, b) \Big/ \frac{\partial u}{\partial b}(p, b)$$

называются иногда соотношениями Роя [55].

Пока p_k и b изменялись независимо. Теперь будем рассуждать следующим образом. При увеличении цены p_k на dp_k суммарная покупательная способность b упадет. Чтобы потребитель мог приобрести тот же набор услуг, что и до повышения цены p_k, ему следует уве-

---

[1] Параметр λ ясно интерпретируется, если b рассматривается как суммарное рабочее время, расходуемое обществом на производство потребительских благ и услуг. Если принять еще, что рабочее время, расходуемое на создание продуктов остальных назначений (на накопление, оборону и т. п.), дано, то λ есть предельная полезность нерабочего времени общества. Подробнее об этом см. [44, с. 323—330].