В. М. РАДЫГИН, О. В. ГОЛУБЕВА

Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ВУЗОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
Высшая
Школа

В. М. РАДЫГИН, О. В. ГОЛУБ

Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники

Допущено Министерством просвещения СССР
в качестве учебного пособия
для студентов физико-математических
факультетов педагогических институтов

Москва «Высшая школа» 1983

ББК 22.31
Р 15
УДК 517.5 + 53

Рецензенты: кафедра математического анализа Тульского пединститута (зав. кафедрой — канд. физ.-мат. наук А. С. Симонов) и д-р физ-мат. наук И. Н. Кочина (Математический институт АН СССР)

Радыгин В. М., Голубева О. В.

Р 15 Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники: Учеб. пособие для пед. вузов — М.: Высш. школа, 1983.— 160 с., ил.

25 к.

В книге рассмотрены линейные, двумерные, стационарные динамические процессы, задачи которых решаются с помощью аналитических функций. Отдельные главы посвящены разнообразным задачам подземной гидродинамики, расчету электростатических полей, электрических полей постоянного тока, постоянных магнитных и тепловых полей

Отличительная черта пособия—применение классического аппарата функций комплексного переменного к решению широкого круга задач современной техники Знакомство с задачами, изложенными в данной книге, поможет применять абстрактные математические методы к решению реальных практических задач.

Предназначается для студентов физико-математических факультетов пединститутов, студентов втузов, а также для широкого круга читателей.

$Р \dfrac{1702050000-093}{001(01)-83}$ 45—83

ББК 22.31
530.1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В процессе подготовки учителей математики и физики для общеобразовательных школ, в первую очередь сельских, необходимо уделять особое внимание использованию математических методов при решении современных физических и технических задач. Также важно показать студентам существующую тесную связь между изучаемыми ими науками, которая характерна для современной науки. С этих позиций решается поставленная в данном учебном пособии задача—показать применение функций комплексного переменного в различных областях физики и техники.

Теория аналитических функций—одна из наиболее развитых и тщательно разработанных ветвей классической математики. Развитию этой теории во многом способствовало применение аналитических функций в аэродинамике—научно-технической базе самолетостроения, а также в гидродинамике и др. Содержание задач этого пособия объединяет общая динамическая проблема линейных двумерных квазистационарных процессов.

В пособии наряду с простейшими классическими задачами рассматриваются оригинальные, новые и нетривиальные задачи. Решение этих задач должно привлечь внимание студентов к исследовательским проблемам и пробудить их творческую деятельность, которая является важным элементом высшего образования.

Данное учебное пособие предназначается для студентов педагогических вузов, специализирующихся в области математики и физики; может быть использовано для чтения спецкурсов, выполнения курсовых работ, а также как материал для спецсеминаров и самостоятельной научно-исследовательской работы.

Пособие состоит из введения и пяти глав. О. В. Голубевой написаны введение и первая глава, остальные главы—В. М. Радыгиным.

Авторы приносят благодарность рецензентам—д-ру физ.-мат. наук И. Н. Кочиной и канд. физ.-мат. наук А. С. Симонову—за критические замечания, которые использованы при доработке книги. Авторы искренне признательны проф. Д. Ф. Калиниченко за внимательный просмотр рукописи и доброжелательное к ней отношение.

ВВЕДЕНИЕ
АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ ОБОБЩЕНИЕ В ПРИМЕНЕНИИ К ДИНАМИЧЕСКИМ, КВАЗИСТАЦИОНАРНЫМ, ЛИНЕЙНЫМ ПРОЦЕССАМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Значительное количество разнообразных задач математической физики описывается векторными $\mathbf{V}$ и скалярными Φ полями, связь между которыми осуществляется линейным законом

$$\mathbf{V}_1 = (K \operatorname{grad} \Phi),$$

где K характеризует среду, в которой протекает явление. Для однородных сред K — постоянная скалярная величина, для неоднородных сред — функция координат $\mathbf{R}$, а для сред анизотропных — симметричный тензор второго ранга. Функцию Φ назовем потенциалом. Она в общем случае зависит от координат $\mathbf{R}$ и времени T. Функция $\mathbf{V}_1$ связана с $\mathbf{R}$ и T равенством $\mathbf{V}_1 = \sigma\, \mathrm{d}\mathbf{R}/\mathrm{d}T$, где σ — безразмерная величина, характеризующая процесс. В частном случае если $\mathbf{V}_1$ — скорость течения жидкости, то $\mathbf{V}_1 = \mathrm{d}\mathbf{R}/\mathrm{d}T$.

Введем безразмерные величины: $\mathbf{r} = \mathbf{R}/l$, $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1/V_0$, $\tau = T/T_0$, $K = K/K_0$, $\varphi = \Phi/\Phi_0$, где l — характерная длина, K_0 и Φ — характерные значения соответствующих функций, $V_0 = K_0\Phi_0/l$, $T_0 = \sigma l/V_0$. Тогда линейный закон можно записать в безразмерном виде, что важно для практических задач:

$$\mathbf{V} = (K \operatorname{grad} \varphi); \qquad (\text{B}.0.1)$$

в безразмерных величинах $\mathbf{V} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}\tau$. Из преобразования закона к безразмерному виду следует, что $K_0\Phi_0/(lV_0)$ — критерий подобия изучаемых явлений. Уравнение (В.0.1) дополняется законом сохранения массы или уравнением неразрывности, которое имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \qquad (\text{B}.0.2)$$

и соответствует стационарному процессу, когда $\mathbf{V}$ не зависит от времени τ, или квазистационарному процессу, если $\mathbf{V}$ зависит от времени τ, но удовлетворяет уравнению (В.0.2).

Задачи, описываемые уравнениями (В.0.1) и (В.0.2), являются линейными, квазистационарными или в частном случае стационарными, динамическими процессами математической физики. Рассмотренные в настоящей книге двумерные модели процессов занимают ведущее место в инженерной практике.

§ 1. Комплексный потенциал

Задачи, описываемые аналитической функцией

Рассмотрим стационарные плоско-параллельные процессы в изотропных и однородных средах ($K = K_0 = \text{const}$), т. е. процессы, для которых $\mathbf{V}$ и Φ — функции координат $\mathbf{r}$ основной плоскости (z). Безразмерные уравнения движения (B.0.1) и (B.0.2) в декартовых координатах в этом случае имеют такой вид:

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0.$$

Из последнего уравнения неразрывности следует существование функции ψ. Следовательно, процесс описывается уравнениями

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{B.1.1}$$

Так как φ и ψ удовлетворяют условиям Коши—Римана (B.1.1), то решениями рассматриваемых задач являются аналитические функции

$$W(z) = \varphi + i\psi, \tag{B.1.2}$$

где W — комплексный потенциал; ψ — функция тока; φ — потенциал. Семейства эквипотенциалей и линий тока

$$\varphi(\mathbf{r}) = \text{const}, \quad \psi(\mathbf{r}) = \text{const} \tag{B.1.3}$$

на основании равенств (B.1.1) удовлетворяют соотношению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0;$$

следовательно, они взаимно перпендикулярны. Производная от комплексного потенциала W по z имеет вид

$$W' = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = V_x - iV_y \tag{B.1.4}$$

и называется комплексной скоростью.

Функции φ и ψ в рассматриваемых задачах взаимозаменяемы. Действительно, если какая-либо задача описывается функциями φ_1, ψ_1, то, полагая $\varphi_1 = \psi_2$, $\psi_1 = -\varphi_2$, получаем, что φ_2, ψ_2 удовлетворяют условиям Коши—Римана; следовательно, найдено также решение, но уже новой задачи.

Линейность исходных уравнений (В.1.1) определяет справедливость принципа наложения потоков, который заключается в том, что сумма комплексных потенциалов W_1 и W_2 определяет комплексный потенциал новой задачи. Кроме того, так как все производные и интегралы по z от аналитической функции также аналитические функции, то это позволяет по заданному решению какой-либо задачи W_1 отыскать бесчисленное множество решений различных задач Замена в комплексном потенциале z на z_1 с помощью аналитической функции $z = f(z_1)$ представляет собой конформное преобразование задачи в основной плоскости (z) к задаче в плоскости (z_1), при котором φ и ψ переходят в φ и ψ новой задачи.

Используем рассмотренные свойства для построения основных типов процессов и решения некоторых граничных задач.

Особые точки

Аналитические функции определяются особыми точками, так как они постоянны, если отсутствуют особые точки. В задачах математической физики особые точки комплексных потенциалов являются моделями причин, вызывающих явление (источник теплоты, создающий тепловое поле; ток, идущий по проводнику, создающий электрические или магнитные поля, и т. д.) С помощью особых точек также удовлетворяются граничные условия рассматриваемых задач.

Логарифмическая особая точка комплексного потенциала, отвечающая в физических задачах источнику (или стоку), по отношению к функции φ является фундаментальным решением уравнения Лапласа, которому эта функция удовлетворяет. Особую роль играет эта точка в задачах двумерных динамических процессов, поскольку служит простейшей физической моделью их возбудителей.

Запишем комплексный потенциал источника в виде

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_0) = \frac{Q}{2\pi} (\ln r + i\Theta) = \varphi + i\psi, \qquad (В.1.5)$$

где z_0—точка расположения источника и $z - z_0 =$

$= r \exp(i\Theta)$. Составляющие вектора $\mathbf{V}$ в полярных координатах r, Θ определяются равенствами

$$V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi r}, \quad V_\Theta = \frac{\partial \varphi}{r\, \partial \Theta} = 0.$$

Из приведенных формул следует, что линиями тока являются лучи $\Theta = \text{const}$, выходящие из точки z_0. Вдоль них от точки z_0 направлен вектор $\mathbf{V}$. Эквипотенциали

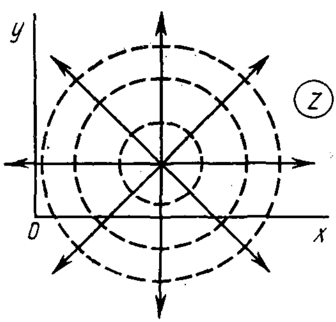

Рис. В.1

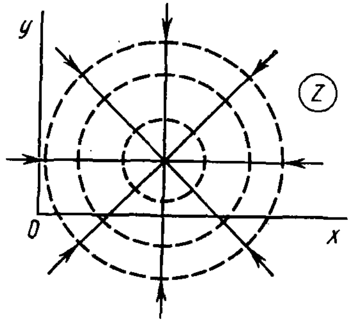

Рис. В.1.2

представляют собой концентрические окружности ($r = \text{const}$). Расход вектора $\mathbf{V}$ через произвольную окружность с центром в точке z_0

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{V}_r r \, d\Theta = \int_0^{2\pi} \frac{Q}{2\pi r} r \, d\Theta = Q.$$

Величину Q, не зависящую от r, называют мощностью источника. На рис. В.1.1 изображены линии тока (сплошные прямые), эквипотенциали (пунктирные окружности); стрелками указаны направления вектора $\mathbf{V}$ для источника.

Комплексный потенциал

$$W(z) = -\frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_0) = -\frac{Q}{2\pi} (\ln r + i\Theta) = \varphi + i\psi \tag{В.1.6}$$

отвечает стоку, расположенному в точке z_0, мощность которого Q. Линии тока, эквипотенциали и направление вектора $\mathbf{V}$ этого процесса изображены на рис. В.1.2.

С помощью комплексного потенциала источника (или стока) и результатов предыдущего пункта можно построить комплексные потенциалы с различными особыми точками, которые используются в физических задачах. Именно: поменяв местами φ и ψ, что соответствует умножению равенств (B.1.6) или (B.1.5) на i, получаем комплексный потенциал течения, называемого вихрем:

$$W(z) = \pm \frac{\Gamma i}{2\pi} \ln (z - z_0) = \pm \frac{\Gamma}{2\pi} (-\Theta + i \ln r) = \varphi + i\psi. \tag{B.1.7}$$

Составляющие вектора **V** этого течения таковы: $V_r = 0$, $V_\Theta = \pm \Gamma/(2\pi r)$. Линии тока (сплошные), эквипотенциали (пунктирные) и направления вектров **V** при знаке минус в формуле (B.1.7) изображены на рис. B.1.3. Этот вихрь называют положительным. Циркуляция **V** по окружности произвольного радиуса r с центром в особой точке z_0 имеет вид

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{V}_\Theta r \, d\Theta = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma}{2\pi r} r \, d\Theta = \Gamma.$$

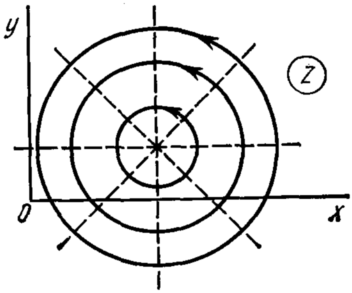

Рис. B.1.3

Величину Γ называют напряжением вихря. Из сравнения формул (B.1.5) и (B.1.7) очевидно, что вихрь можно рассматривать как источник с мнимым расходом.

Используя принцип наложения процессов, найдем комплексный потенциал W как сумму формул (B.1.5) и (B.1.7):

$$W(z) = \frac{\Theta + i\Gamma}{2\pi} \ln (z - z_0). \tag{B.1.8}$$

Отсюда

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} (Q \ln r - \Gamma\Theta), \quad \psi = \frac{Q\Theta + \Gamma \ln r}{2\pi},$$

$$V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{r}, \quad V_\Theta = \frac{\partial \varphi}{r \, \partial \Theta} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r}.$$

В этом случае $V_r/V_\Theta = Q/\Gamma$, следовательно, линии тока этого течения направлены под постоянным углом к лучам r, выходящим из особой точки, которую называют *вихреисточником*.

Линии тока (сплошные), эквипотенциали (пунктирные) и направление вектора **V** показаны на рис. В.1.4.

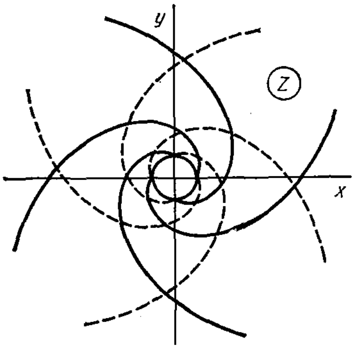

Рис. В.1.4

Комплексные потенциалы (В.1.5)—(В.1.7) описываются логарифмическими особыми точками. При $z \to z_0$ $\ln(z-z_0)$ стремится к минус бесконечности и к плюс бесконечности при $z \to \infty$. Отсюда следует, что эти комплексные потенциалы имеют две особые точки противоположных знаков в конечной точке $z=z_0$ и в бесконечно удаленной точке. Это необходимо учитывать в конкретных задачах динамических процессов.

Продифференцируем найденные комплексные потенциалы. Обозначим $Q-i\Gamma=M\exp(-i\alpha)$ и найдем новый комплексный потенциал, дифференцируя равенство (В.1.8):

$$W(z)=\frac{M}{2\pi}\,\frac{\exp(-i\alpha)}{z-z_0}. \qquad \text{(В.1.9)}$$

Исследуя потенциал и функцию тока этого течения, можно показать, что его линиями тока является семейство окружностей, проходящих через точку z_0. Эти окружности касаются прямой, которая проходит через точку z_0. Угол наклона прямой к оси Ox равен α. Особую точку, отвечающую равенству (В.1.9), называют *диполем*, прямую, определяемую углом α,— *осью диполя*. Линии тока, эквипотенциали и направление векторов **V** этого течения изображены на рис. В.1.5.

Дифференцируя равенство (В.1.9) по z, получаем комплексный потенциал, отвечающий особой точке, которую называют *квадруполем*:

$$W(z)=-\frac{M}{2\pi}\,\frac{\exp(-i\alpha)}{(z-z_0)^2}. \qquad \text{(В.1.10)}$$

Линии тока этого течения при $\alpha=0$, $z_0=0$ и направления векторов **V** показаны на рис. В.1.6. Далее, многократно дифференцируя равенство (В.1.10), получаем комплексные потенциалы, отвечающие особым точкам, которые называют *мультиполями*. Их комплексные потенциалы имеют следующий вид:

$$W(z) = \frac{(-1)^{n-1} M \exp(-i\alpha)}{(z-z_0)^n}. \qquad (В.1.11)$$

Постоянную n называют *порядком мультиполя*. Отсюда мультиполь первого порядка ($n=1$) есть диполь, мультиполь второго порядка ($n=2$) — квадруполь. Мультиполи являются полюсами n-го порядка аналитических

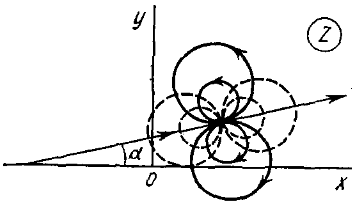

Рис. В.1.5

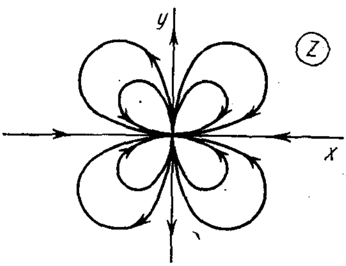

Рис. В.1.6

функций. Их комплексные потенциалы стремятся к бесконечности при $z \to z_0$ и к нулю при $z \to \infty$. Таким образом, в отличие от логарифмической особой точки комплексные потенциалы (В.1.9) и (В.1.11) не содержат особых точек в бесконечности.

Комплексные потенциалы мультиполей, полученные формальным дифференцированием, можно рассматривать также как результат наложения и последующего предельного перехода особых точек противоположных знаков, при котором они сближаются при неизменном произведении напряжения мультиполя на расстояние между ними. Так, диполь можно рассматривать как сближение источника и стока или двух вихрей противоположных знаков.

Для построения мультиполей, расположенных в бесконечно удаленной точке, воспользуемся конформным преобразованием плоскости (z) к плоскости (z_1): $z - z_0 = 1/z_1$, $z_1 = 1/(z - z_0)$. При этом бесконечно удаленная точка (z_1) переходит в точку $z = z_0$. Так как при конформном преобразовании сохраняется тип особых точек, то мультиполю в точке $z=z_0$ плоскости (z) соответствует мультиполь в бесконечности плоскости (z_1), комплексный потенциал которого

$$W(z_1)=\frac{(-1)^{n-1} M \exp(-i\alpha)}{2\pi} z_1^n. \qquad \text{(B.1.12)}$$

Обозначая плоскость (z_1) через (z) и полагая $M/(2\pi)=V_0$, комплексный потенциал диполя $(n=1)$ в бесконечности запишем в виде

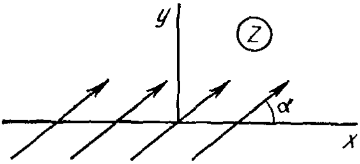

Рис. В.1.7

$$W(z)=V_0 e^{-i\alpha} z. \qquad \text{(B.1.13)}$$

Отсюда $\varphi=V_0(x\cos\alpha+y\sin\alpha)$, $\psi_0=V_0(y\cos\alpha-x\sin\alpha)$, $V_x=V_0\cos\alpha$, $V_y=V_0\sin\alpha$. Следовательно, линиями тока этого течения являются прямые, наклоненные к оси Ox под углом α, и вектор $\mathbf{V}$ для этого процесса постоянен и равен по величине V_0 (рис. В.1.7). Такой процесс называют поступательным. Аналогично, комплексный потенциал квадруполя в бесконечности имеет вид

$$W(z)=\frac{M\exp(-i\alpha)}{2\pi} z^2. \qquad \text{(B.1.14)}$$

Отсюда при $\alpha=0$ получаем: $\varphi=\frac{M}{2\pi}(x^2-y^2)$, $\psi=\frac{M}{\pi}xy$, $V_x=\frac{M}{\pi}x$, $V_y=-\frac{M}{\pi}y$. Линии тока, эквипотенциали этого течения и направления векторов $\mathbf{V}$ изображены на рис. В.1.8. Мультиполи в бесконечности можно получить многократным интегрированием равенства (В.1.13).

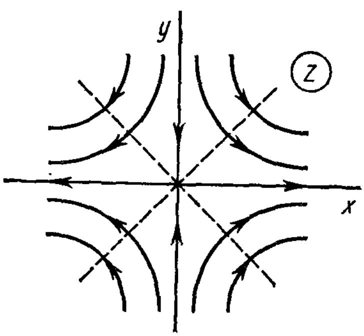

Рис. В.1.8

Рассмотренные аналитические функции $W=f(z)$ интерпретировались как описывающие динамические процессы. Одновременно их можно рассматривать как конформное преобразование плоскости (z_1) к плоскости (z), осуществляемое равенством $z_1=F(z)$, в результате которого координатная сеть плоскости (z_1) переходит в криволинейную сеть плоскости (z); при этом плоскость (z_1) может быть многолистной.

Процессы, описываемые комплексными потенциалами, рассматривались в предположении их стационарности. Однако исходные уравнения (В.1.1) справедливы и в случае квазистационарных процессов. Следовательно, они также описываются комплексными потенциалами с теми или иными особыми точками, но при этом эти точки могут быть подвижными $[z_0 = z_0(\tau)]$ и напряжение их (Q, Γ, M, V_0) меняется с течением времени по тем или иным законам.

§ 2. Граничные задачи

Простейшие граничные задачи Рассматриваемые динамические плоскопараллельные процессы протекают, как правило, в ограниченных областях плоскости (z), на заданной границе которых выполняются определенные условия. Наиболее простые и широко распространенные из этих условий следующие:

а) на границе L или ее части потенциал φ постоянен. Отсюда следует, что составляющая вектора $\mathbf{V}$ вдоль L равна нулю, т. е. V ортогональна к L:

$$\varphi|_L = \text{const}, \quad V_s|_l = \frac{\partial\varphi}{\partial S}\Big|_L = 0; \tag{В.2.1}$$

б) на границе L или части ее функция тока постоянна. Отсюда следует, что составляющая вектора $\mathbf{V}$ по нормали к L равна нулю, т. е. граница L непроницаема:

$$\psi|_L = \text{const}, \quad V_n|_l = 0. \tag{В.2.2}$$

Задачи, для которых выполняются сформулированные условия, называют *граничными задачами первого рода.* Рис. В.1.1—В.1.8 иллюстрируют решения таких частных задач, так как любые линии тока на них можно интерпретировать как границы с условием $\psi = \text{const}$ и любые эквипотенциали — как границы с условием $\varphi = \text{const}$. Решение граничных задач первого рода можно записать в общем виде, если L — прямая или окружность и вдоль них φ или ψ постоянны.

Пусть процесс протекает в полуплоскости, ограниченной осью Ox или осью Oy. Пусть z_0 — особая точка процесса в области его распространения и $f(z-z_0)$ определяет характер этой особенности в безграничной среде. Тогда комплексные потенциалы, решающие изучаемые граничные задачи, таковы:

$$\begin{aligned} &W=f(z-z_0)-\bar{f}(z-\bar{z}_0), && \varphi|_{y=0}=\mathrm{const};\\ &W=f(z-z_0)-\bar{f}(z+z_0); && \varphi|_{x=0}=\mathrm{const};\\ &W=f(z-z_0)+\bar{f}(z-\bar{z}_0); && \psi|_{y=0}=\mathrm{const};\\ &W=f(z-z_0)+\bar{f}(z+z_0); && \psi|_{x=0}=\mathrm{const}.\end{aligned} \tag{B.2.3}$$

Пусть теперь область, где протекает процесс, ограничена окружностью радиуса r_0, в центре которой расположим начало координат. Пусть z_0 — расположение особой точки и $f(z-z_0)$ определяет характер этой особенности в безграничной области, за исключением логарифмической. Тогда комплексные потенциалы, решающие изучаемые граничные задачи, следующие:

$$W=f(z-z_0)-\bar{f}(z-r_0^2/\bar{z}_0);\quad \varphi|_{r=r_0}=\mathrm{const},\ |z|\leqslant r_0; \tag{B.2.4}$$

$$W=f(z-z_0)+\bar{f}(z-r_0^2/\bar{z}_0);\quad \psi|_{r=r_0}=\mathrm{const},\ |z|\leqslant r_0.$$

Если же $f(z-z_0)$ соответствует логарифмической особенности, конкретно источнику или $f(z-z_0)=Q\ln(z-z_0)/(2\pi)$, то комплексные потенциалы, описывающие процесс в ограниченной окружностью области, имеют такой вид:

$$W=\frac{Q}{2\pi}\left[\ln(z-z_0)-\ln\left(z-\frac{r_0^2}{\bar{z}_0}\right)\right],\quad \varphi|_{r=r_0}=\mathrm{const},$$

$$|z|\gtrless r_0,\quad \left|\int\limits_0^{2\pi} V_r r_0\,d\Theta\right|=Q,$$

$$W=\frac{Q}{2\pi}\left[\ln z(z-z_0)-\ln\left(z-\frac{r_0^2}{\bar{z}_0}\right)\right],\quad \varphi|_{r=r_0}=\mathrm{const},$$

$$|z|>r_0,\quad \left|\int\limits_0^{2\pi} V_r r_0\,d\Theta\right|=Q, \tag{B.2.5}$$

$$W=\frac{Q}{2\pi}\left[\ln\frac{z-z_0}{z}+\ln\left(z-\frac{r_0^2}{\bar{z}_0}\right)\right],\quad \psi|_{r=r_0}=\mathrm{const},$$

$$|z|\gtrless r_0,\quad \left|\int\limits_0^{2\pi} V_r r_0\,d\Theta\right|=0.$$

Линии токов этих процессов изображены сплошными кривыми на рис. В.2.1—В.2.4, где косой штриховкой показаны непроницаемые границы $\psi=\text{const}$, а горизонтальной — $\varphi=\text{const}$.

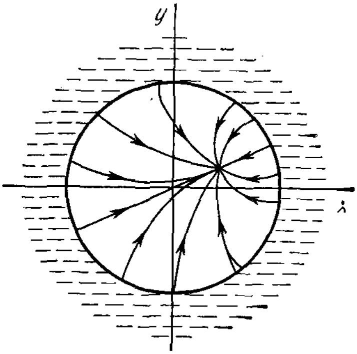

Рис. В.2.1

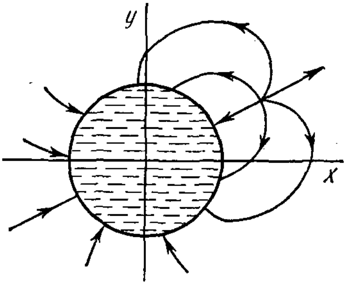

Рис. В.2.2

Аналогично, если $f(z-z_0)=[\Gamma/(2\pi i)]\ln(z-z_0)$, т. е. особая точка представляет собой вихрь, то комплексные потенциалы процессов в областях, ограниченных окружностью, таковы:

$$W=\frac{\Gamma}{2\pi i}\left[\ln(z-z_0)-\ln\left(z-\frac{r_0^2}{\bar{z}_0}\right)\right],\quad \psi|_{r=r_0}=\text{const},$$

$$|z|\gtrless r_0,\left|\int\limits_0^{2\pi} V_\Theta r_0\,\mathrm{d}\Theta\right|=\Gamma,$$

$$W=\frac{\Gamma}{2\pi i}\left[\ln(z-z_0)\,z-\ln\left(z-\frac{r_0^2}{\bar{z}_0}\right)\right],\quad \psi|_{r=r_0}=\text{const},$$

$$|z|\gtrless r_0,\left|\int\limits_0^{2\pi} V_\Theta r_0\,\mathrm{d}\Theta\right|=0, \qquad (\text{B.2.6})$$

$$W=\frac{\Gamma}{2\pi i}\left[\ln\frac{z-z_0}{z}+\ln\left(z-\frac{r_0^2}{\bar{z}_0}\right)\right],\quad \varphi|_{r=r_0}=\text{const},$$

$$|z|\gtrless r_0,\left|\int\limits_0^{2\pi} V_\Theta r_0\,\mathrm{d}\Theta\right|=0.$$

На рис. В.2.1—В.2.4 линии тока этих течений соответствуют пунктирным кривым, что следует из взаимозаменяемости φ и ψ.

Используя принцип наложения комплексных потенциалов, можно на основании формул (В.2.5) и (В.2.6) получить комплексный потенциал вихреисточника, который расположен в области, ограниченной окружностью. Формулы (В.2.4)—(В.2.6), соответствующие граничному условию $\psi = \mathrm{const}$, составляют содержание теоремы Милн-Томсона.

Справедливость всех формул этого пункта проверяется выполнением соответствующих граничных условий.

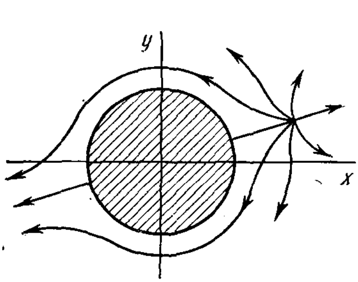

Рис. В.2.3

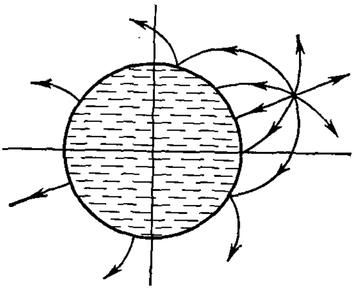

Рис. В.2.4

Совместно используя приведенные формулы, можно решить граничные задачи в областях, ограниченных полупрямыми и дугами окружностей, при граничных условиях $\varphi = \mathrm{const}$, $\psi = \mathrm{const}$ на отдельных участках границы области. Применение этих формул и конформных преобразований позволяет решить фактически граничные задачи первого рода при любых границах области.

Задачи сопряжения

Рассмотрим стационарный, плоскопараллельный, динамический процесс в кусочно-однородной среде, которая разделена кривой L на зоны I и II, характеризуемые постоянными коэффициентами K_1 и K_2. Введем безразмерные величины $K_j = K_j/\sqrt{K_1 K_2}$ $(j = 1, 2)$, запишем уравнения и введем следующие комплексные потенциалы:

$$V_{jx} = K_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} = \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, \quad V_{jy} = K_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} = -\frac{\partial \psi_j}{\partial x},$$

$$W_j = K_j \varphi_j + i \psi_j \quad (j = 1, 2). \qquad \text{(В.2.7)}$$

Граничные условия этих уравнений на L определяются