Избранные главы
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
для инженеров и студентов втузов

Ф. И. КАРПЕЛЕВИЧ и Л. Е. САДОВСКИЙ

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ФИЗМАТГИЗ · 1963

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ И СТУДЕНТОВ ВТУЗОВ

Ф. И. КАРПЕЛЕВИЧ и Л. Е. САДОВСКИЙ

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования РСФСР
в качестве учебного пособия
для высших технических учебных заведений*

СУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
О-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1963

517.1
К 26

АННОТАЦИЯ

Книга ставит своей целью познакомить читателя с теорией систем линейных уравнений и линейных неравенств и ввести его в область идей, связанных с математическими методами планирования.

В книге приведены примеры конкретных задач, решаемых методами линейного программирования, подробно изложен основной прием их решения — симплекс-метод и рассмотрены другие общие методы: метод обратной матрицы и двойственный симплекс-метод. Детально разобрана транспортная задача, в приложении к которой симплекс-метод сводится к распределительному методу и методу потенциалов. Первые главы могут служить самостоятельным пособием по линейной алгебре для студентов втузов.

Книга рассчитана на студентов технических и экономических вузов, инженеров и лиц, работающих в области приложения математики к вопросам планирования.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние годы все большее значение приобретает математический подход к задачам планирования. Первые работы в этом направлении принадлежат Л. В. Канторовичу, который еще в 1939 г. указал общий метод (метод разрешающих множителей) решения задач линейного программирования, связанных с составлением оптимального плана при организации производственных процессов.

Настоящая книга носит учебный характер и далеко не исчерпывает всех вопросов и методов линейной алгебры и линейного программирования. Ее основная цель — познакомить читателя с теорией систем линейных уравнений и линейных неравенств и ввести в круг идей математических методов планирования. Основой этой книги явились лекции по курсу «Линейная алгебра и линейное программирование», прочитанные авторами в Московском институте инженеров транспорта в 1960—1962 гг. Подобно курсу, книга состоит из двух естественным образом связанных между собой частей: линейной алгебры с элементами n-мерной геометрии (гл. I—IV) и линейного программирования (гл. V—IX).

Первая часть книги знакомит читателя с классическими методами исследования и решения систем линейных уравнений и систем линейных неравенств. Изложению этих методов предшествует введение необходимого математического аппарата. Эта часть содержит все разделы линейной алгебры, предусмотренные программой по высшей математике для экономических факультетов и (за исключением понятия о собственных векторах матриц третьего порядка) программой для других факультетов втузов. Первая часть включает в основном все необходимые сведения из линейной алгебры, которые могут понадобиться читателю для изучения более подробных руководств по линейному программированию. Вторая часть открывается постановкой ряда конкретных прикладных задач (носящих, впрочем, иллюстративный характер), которые сводятся к типичным задачам линейного программирования. В дальнейшем эти задачи используются для разъяснения общих методов линейного программирования. Из таких методов подробно излагается наиболее распространенный в настоящее время так называемый симплекс-метод. Менее детально рассматриваются некоторые другие общие методы линейного программирования: метод обратной матрицы и двойственный симплекс-метод. Последняя глава посвящена подробному разбору транспортной задачи, в приложении к которой симплекс-метод приводится к распределительному методу и методу потенциалов.

Из более подробных работ по линейному программированию мы указываем всего лишь три: С. Вайд «Теория игр и линейное программирование», в сборнике «Линейные неравенства и смежные вопросы», ИЛ, 1959 г., С. Гасс «Линейное программирование», Физматгиз, 1961 г., Д. Б. Юдин и Е. Б. Гольштейн «Задачи и методы линейного программирования», «Советское радио», 1961 г. Обстоятельную библиографию можно найти в указанных книгах.

В настоящей книге принята следующая система ссылок. Нумерация теорем (формул, таблиц и т. п.) в пределах каждой главы начинается заново. При ссылке на теорему (формулу, таблицу и т. п.) из той же главы указывается порядковый номер этой теоремы. В случае ссылки на теорему из другой главы эта теорема нумеруется двумя числами: первое указывает номер главы, а второе — порядковый номер теоремы в пределах указанной главы. Так, например, ссылка в главе III на теорему 2 означает, что речь идет о второй теореме этой же главы. В то же время ссылка в главе VI на формулу (5.12) означает ссылку на формулу (12) из главы V.

Авторы выражают благодарность Ю. И. Соркину, прочитавшему книгу в рукописи и сделавшему ряд полезных замечаний. В оформлении рукописи большую помощь оказали Л. В. Варшавская, Н. А. Гросман, Г. Ф. Канаева и студенты МИИТа Дыканюк, М. Крайз, А. Людмирский, Г. Маркович, Я. Эпельбойм. Всем им авторы весьма признательны.

Авторы

ГЛАВА I
ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

§ 1. Перестановки

1°. Рассмотрим n первых целых чисел: 1, 2, ..., n. Выпишем эти числа в любом порядке:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n. \tag{1}$$

В этой записи числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ суть те же самые числа 1, 2, ..., n, но записанные, быть может, в ином порядке.

Всякое расположение чисел 1, 2, ..., n называется их перестановкой. Из курса элементарной алгебры известно, что различных таких перестановок ровно $n!$ Естественное расположение 1, 2, ..., n чисел 1, 2, ..., n в порядке их возрастания также является одной из перестановок.

2°. Рассмотрим теперь произвольную перестановку (1). Выберем в ней два числа α_i и α_j. Если в этой перестановке большее из чисел α_i и α_j расположено левее меньшего, то говорят, что числа α_i и α_j образуют инверсию (беспорядок). В противном случае числа α_i и α_j инверсии не образуют.

Так, например, в перестановке 3214 инверсии образуют следующие пары чисел: 3 и 2, 3 и 1, 2 и 1. В то же время пары чисел 3 и 4, 2 и 4 и 1 и 4 инверсий не образуют.

Найдем признак наличия инверсии между числами α_i и α_j в перестановке (1). Допустим, что числа α_i и α_j образуют инверсию. Тогда,

$$\begin{aligned} &\text{если} \quad \alpha_i > \alpha_j, \text{ то } i < j, \\ &\text{если же} \quad \alpha_i < \alpha_j, \text{ то } i > j \end{aligned}$$

(это и означает, что в перестановке (1) большее число расположено левее меньшего). В обоих случаях разности $\alpha_i - \alpha_j$ и $i - j$ имеют разные знаки. Следовательно, во всех случаях, когда между числами α_i и α_j имеется инверсия, выполнено неравенство

$$(\alpha_i-\alpha_j)(i-j)<0.$$

В случае, когда числа α_i и α_j инверсии не образуют, разности $\alpha_i-\alpha_j$ и $i-j$ имеют, очевидно, одинаковые знаки. Значит,

$$(\alpha_i-\alpha_j)(i-j)>0.$$

Следовательно, знак произведения $(\alpha_i-\alpha_j)(i-j)$ позволяет нам судить о наличии или отсутствии инверсии между числами α_i и α_j.

3°. Обозначим через $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ число всех инверсий в перестановке (1). Так, например, для перестановки 3214 число $I(3214)=3$, а для перестановки 2431 число $I(2431)=4$. Введем следующее определение.

Определение 1. *Перестановка* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *называется четной, если четно число* $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. *Перестановка* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *называется нечетной, если число* $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *нечетно.*

Так, например, перестановка 3214 является нечетной, а перестановка 2431 — четной.

Установим формальный признак четности (или нечетности) перестановки. Рассмотрим в перестановке все возможные пары чисел α_k и α_l; таких различных пар будет столько, сколько можно составить сочетаний из n чисел по два, т. е. $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$. Составим произведение

$$P=\prod_{(kl)}[(\alpha_k-\alpha_l)(k-l)]. \tag{2}$$

Символ (kl) под знаком $\prod$ означает, что в данное произведение входят сомножители вида $[(\alpha_k-\alpha_l)(k-l)]$, отвечающие всем возможным парам чисел k и l из перестановки (1).

Изучим знак произведения (2). Из п. 2° нам известно, что числа α_k и α_l тогда и только тогда образуют инверсию, когда $[(\alpha_k-\alpha_l)(k-l)]<0$. Поэтому в произведении (2) число отрицательных сомножителей вида $[(\alpha_k-\alpha_l)(k-l)]$ равно в точности $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Следовательно, если число $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ четно, то знак произведения (2) положителен, а если число $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ нечетно, то знак произведения (2) отрицателен. Таким образом, по знаку произведения (2) можно определять, какова четность перестановки.

Например, для перестановки 3214 $\alpha_1=3$, $\alpha_2=2$, $\alpha_3=1$, $\alpha_4=4$. Значит,

$$
\begin{aligned}
P=&[(\alpha_4-\alpha_3)(4-3)][(\alpha_4-\alpha_2)(4-2)][(\alpha_4-\alpha_1)(4-1)]\times\\
&\times[(\alpha_3-\alpha_2)(3-2)][(\alpha_3-\alpha_1)(3-1)][(\alpha_2-\alpha_1)(2-1)]=\\
&=[(4-1)(4-3)][(4-2)(4-2)][(4-3)(4-1)]\times\\
&\times[(1-2)(3-2)][(1-3)(3-1)][(2-3)(2-1)]<0.
\end{aligned}
$$

Произведение (2) условимся называть разностным произведением перестановки (1).

4°. Рассмотрим перестановку (1). Поменяем в ней местами два числа α_i и α_j, сохранив остальные числа на прежних местах. В результате придем к новой перестановке

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{i-1},\ \alpha_j,\ \alpha_{i+1},\ \ldots,\ \alpha_{j-1},\ \alpha_i,\ \alpha_{j+1},\ \ldots,\ \alpha_n. \quad (3)$$

Операция такого рода называется транспозицией.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Всякая транспозиция переводит четную перестановку в нечетную, а нечетную — в четную.*

Доказательство. Предположим, что в результате транспозиции мы от заданной перестановки (1) перешли к перестановке (3). Рассмотрим разностные произведения этих перестановок. Нетрудно заметить, что разностное произведение перестановки (3) можно получить из разностного произведения (2) перестановки (1) следующим образом.

Во всех сомножителях $[(\alpha_k-\alpha_l)(k-l)]$, из которых состоит произведение (2), вторые скобки $(k-l)$ следует сохранить без изменения, а в первых скобках всюду вместо числа α_i написать число α_j, а вместо α_j — число α_i.

В результате такой замены:

1) сомножители вида $[(\alpha_k-\alpha_l)(k-l)]$ при k и l, отличных как от i, так и от j, не меняются;

2) сомножители вида $[(\alpha_i-\alpha_l)(i-l)]$ превращаются в сомножители $[(\alpha_j-\alpha_l)(i-l)]$ $(l\neq i,\ j)$, а сомножители $[(\alpha_j-\alpha_l)(j-l)]$ превращаются в $[(\alpha_i-\alpha_l)(j-l)]$;

3) сомножитель $[(\alpha_i-\alpha_j)(i-j)]$ превращается в сомножитель $[(\alpha_j-\alpha_i)(i-j)]$.

Из сказанного вытекает, что при переходе от разностного произведения (2) перестановки (1) к разностному произведению перестановки (3) часть сомножителей не меняется, часть лишь меняется местами и только один сомножитель $\alpha_i - \alpha_j$, превращаясь в $\alpha_j - \alpha_i$, изменяет свой знак.

Следовательно, разностное произведение перестановки (3) отличается знаком от разностного произведения (2). Но знак разностного произведения всякой перестановки, согласно п. 3°, определяет ее четность. Поэтому, если перестановка (1) четна, то перестановка (3) нечетна, и, наоборот, если перестановка (1) нечетна, то перестановка (3) четна. Теорема доказана.

§ 2. Понятие матрицы

1°. Рассмотрим $m \cdot n$ действительных чисел, записанных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Такая таблица чисел называется матрицей. Числа a_{ij}, которые входят в матрицу (4), называются ее элементами. Индексы i и j элемента a_{ij} указывают соответственно номера строки и столбца, в которых расположен элемент a_{ij}.

Часто матрицу (4) записывают сокращенно в виде $A = (a_{ij})$.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой. Две матрицы называются равными, если числа строк и столбцов одной из них равны соответственно числам строк и столбцов другой и элементы этих матриц, расположенные на соответствующих местах, одинаковы.

2°. От матрицы (4) перейдем к другой матрице

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

строками которой являются столбцы, а столбцами — строки матрицы A. Переход от матрицы A к матрице A' называется операцией транспонирования матрицы A. Ясно, что число строк и столбцов матрицы A' равно соответственно числу столбцов и строк матрицы A. Если через a'_{ij} обозначить тот элемент матрицы A', который расположен на пересечении ее i-й строки и j-го столбца, то очевидно, что

$$a'_{ij} = a_{ji}.$$

3°. Предположим, что число строк матрицы равно числу ее столбцов: $m = n$:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

В этом случае матрицу B называют квадратной матрицей порядка n. Матрица B', полученная транспонированием B, также является в этом случае квадратной матрицей порядка n.

Элементы $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ образуют так называемую главную диагональ матрицы B; элементы $a_{1n}, a_{2\,n-1}, \dots, a_{n1}$ образуют побочную диагональ матрицы B.

Легко понять, что транспонирование матрицы B сводится к ее повороту (в пространстве) вокруг главной диагонали.

§ 3. Линейные операции над столбцами

1°. Рассмотрим столбец из n чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Его можно считать матрицей из одного столбца и n строк. Если все $a_k = 0$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, то столбец A называется нулевым и обозначается коротко: $A = 0$.

Два столбца A и

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

называются равными, если $a_k = b_k$ при всех $k = 1, 2, \dots, n$.

2°. Выберем произвольное действительное число α и умножим на него все элементы столбца A. Получим новый столбец

$$\begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix},$$

который называется *произведением* столбца A на число α (или, что то же, числа α на столбец A) и обозначается через αA (или $A\alpha$). Ясно, что при $\alpha = 0$ произведение $\alpha A = 0$ оказывается нулевым столбцом.

Суммой $A + B$ двух столбцов A и B называется столбец

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \cdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix},$$

элементы которого равны суммам соответствующих элементов столбцов A и B. Аналогично определяется разность двух столбцов. Из определений произведения столбца на число и суммы столбцов следует, что для этих операций выполнены обычные законы арифметики, а именно:

$$\begin{gathered} A + B = B + A, \\ \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B, \\ (\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A, \\ A + 0 = A, \\ A \cdot 0 = 0 \text{ и т. п.} \end{gathered}$$

Справедливость этих законов легко устанавливается непосредственной проверкой. Так, например,

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \cdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \qquad B + A = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ b_2 + a_2 \\ \cdots \\ b_n + a_n \end{pmatrix}$$

и, очевидно, $A + B = B + A$.

3°. Предположим, что нам дан набор k столбцов

$$A_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix},\quad \ldots,\quad A_k=\begin{pmatrix}a_{1k}\\a_{2k}\\\vdots\\a_{nk}\end{pmatrix}.$$

Выберем k произвольных действительных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Умножим число λ_1 на столбец A_1, число λ_2 на столбец A_2 и т. д., наконец, число λ_k на столбец A_k. В результате получим k столбцов: $\lambda_1 A_1$; $\lambda_2 A_2$; $\ldots$, $\lambda_k A_k$. Сложив эти столбцы, получим новый столбец

$$\lambda_1 A_1+\lambda_2 A_2+\ldots+\lambda_k A_k. \tag{6}$$

Выражение (6) называется линейной комбинацией столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ называются коэффициентами этой линейной комбинации. Каждому набору чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ отвечает своя линейная комбинация.

Пусть теперь наряду со столбцами $A_1, A_2, \ldots, A_k$ нам задан еще столбец

$$B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}.$$

Предположим, что столбец B является некоторой линейной комбинацией столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_k$, т. е. существует такой набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, что

$$\lambda_1 A_1+\lambda_2 A_2+\ldots+\lambda_k A_k=B. \tag{7}$$

В этом случае говорят, что столбец B линейно выражается через столбцы $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

Подчеркнем, что из определения равенства столбцов следует, что одно соотношение (7) между столбцами равносильно на самом деле справедливости n числовых соотношений:

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 a_{11}+\lambda_2 a_{12}+\ldots+\lambda_k a_{1k}&=b_1,\\ \lambda_1 a_{21}+\lambda_2 a_{22}+\ldots+\lambda_k a_{2k}&=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ \lambda_1 a_{n1}+\lambda_2 a_{n2}+\ldots+\lambda_k a_{nk}&=b_n.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Предположим, что все коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ в линейной комбинации (7) равны нулю. Тогда $B=0$. Это означает, что нулевой столбец всегда линейно выражается через любой набор столбцов $A_1, \ldots, A_k$.

Положим теперь, что $\lambda_i=1$, а все остальные коэффициенты $\lambda_j=0$ $(j \neq i)$. Тогда равенство (7) примет вид

$$1 \cdot A_i = B.$$

Следовательно, каждый из столбцов A_i набора $A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_k$ можно рассматривать как линейную комбинацию столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_k$ этого набора.

4°. Дадим теперь важнейшее в этом параграфе определение.

Определение 2. *Столбцы $A_1, \ldots, A_k$ заданного набора называются линейно зависимыми, если существует равная нулевому столбцу (нулю) линейная комбинация*

$$\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_k A_k = 0, \tag{9}$$

в которой по крайней мере один из коэффициентов $\lambda_1, \ldots$ $\ldots, \lambda_k$ отличен от нуля.

Столбцы, не являющиеся линейно зависимыми, называются линейно независимыми.

Разъяснение. В п. 3° отмечалось, что нулевой столбец всегда линейно выражается через столбцы заданного набора, если все коэффициенты в линейной комбинации принять равными нулю.

Это еще не означает, что столбцы набора линейно зависимы: столбцы $A_1, \ldots, A_k$ являются линейно зависимыми лишь тогда, когда в равенстве (9) не все λ_i $(i=1, 2, \ldots, k)$ равны нулю.

Если же столбцы $A_1, \ldots, A_k$ линейно независимы, то это означает, что равенство (9) выполняется тогда и только тогда, когда все коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ равны нулю.

Пример 1. Рассмотрим трехмерные столбцы

$$A_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \quad A_2=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}, \quad A_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}, \quad A_4=\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что

$$2A_1 - A_2 - A_3 - 0 \cdot A_4 = 0.$$

Пример 2. Легко убедиться, что трехмерные столбцы

$$A_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

линейно независимы. В самом деле, равенство

$$\lambda_1 A_1+\lambda_2 A_2+\lambda_3 A_3=0$$

равносильно трем равенствам:

$$\begin{aligned}\lambda_1\cdot 1+\lambda_2\cdot 0+\lambda_3\cdot 0&=0,\\ \lambda_1\cdot 0+\lambda_2\cdot 1+\lambda_3\cdot 0&=0,\\ \lambda_1\cdot 0+\lambda_2\cdot 0+\lambda_3\cdot 1&=0.\end{aligned}$$

А отсюда немедленно следует, что $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 2. *Столбцы $A_1, \ldots, A_k$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них линейно выражается через остальные.*

Доказательство. а) Необходимость. Предположим сначала, что столбцы $A_1, \ldots, A_k$ линейно зависимы. Тогда, согласно определению 2, существуют такие не все равные нулю коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, для которых выполнено соотношение (9). Пусть, например, $\lambda_i \neq 0$. Тогда из соотношения (9) можно выразить столбец A_i:

$$A_i=-\frac{\lambda_1}{\lambda_i}A_1-\ldots-\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}A_{i-1}-\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}A_{i+1}-\ldots-\frac{\lambda_k}{\lambda_i}A_k$$

(делить на λ_i можно, ибо $\lambda_i \neq 0$).

Полученное равенство показывает, что столбец A_i линейно выражается через остальные столбцы набора. (Коэффициентами линейной комбинации являются числа $-\frac{\lambda_j}{\lambda_i}$ $(j=1, 2, \ldots$ $\ldots, i-1, i+1, \ldots, k)$.) Этим доказана необходимость утверждения теоремы.

б) Достаточность. Предположим, что один из столбцов, например A_l, линейно выражается через остальные столбцы, т. е.

$$A_l=\mu_1 A_1+\mu_2 A_2+\ldots+\mu_{l-1}A_{l-1}+\mu_{l+1}A_{l+1}+\ldots+\mu_k A_k.$$

Тогда, перенеся A_l в правую часть, получаем

$$\mu_1 A_1+\ldots+\mu_{l-1}A_{l-1}-A_l+\mu_{l+1}A_{l+1}+\ldots+\mu_k A_k=0,$$

Это соотношение показывает наличие равной нулю линейной комбинации столбцов $A_1, \ldots, A_k$. Роль коэффициентов этой линейной комбинации играют числа $\mu_1, \ldots, \mu_{l-1}, -1, \mu_{l+1}, \ldots$ $\ldots, \mu_k$. Среди них заведомо есть один отличный от нуля коэффициент (а именно -1). Следовательно, согласно определению 2, столбцы $A_1, \ldots, A_k$ линейно зависимы. Этим доказана достаточность утверждения теоремы. Таким образом, теорема доказана полностью.

5°. Подобно тому как введены линейные действия над столбцами, вводятся линейные операции над строками. Так, например, под произведением строки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на число λ понимают строку

$$\lambda(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n).$$

Точно так же переносят на строки основные понятия равенства строк, линейной независимости и т. п., введенные выше. При этом остаются справедливыми все доказанные ранее утверждения, если в них слово «столбец» заменить словом «строка».

Предположим, что строка $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ является линейной комбинацией строк $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $B =$ $= (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ с коэффициентами α и β. Этот факт, удобства ради, записывается так:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{l} \alpha(a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ \beta(b_1, b_2, \ldots, b_n) \end{array} \\ \hline (c_1, c_2, \ldots, c_n) \end{array}.$$

Разумеется, что эта запись означает выполнение n числовых равенств

$$\alpha a_i + \beta b_i = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

6°. Аналогично тому как введены линейные операции над столбцами и строками, определяются линейные действия над матрицами, а именно:

Произведением матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$