КОНСТРУКТИВНЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Р. Габасов

Ф.М. Кириллова

О.И. Костюкова

Р. ГАБАСОВ,
Ф. М. КИРИЛЛОВА,
О. И. КОСТЮКОВА

КОНСТРУКТИВНЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Часть 3

СЕТЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Минск
Издательство «Университетское»
1986

УДК 519 852

Рекомендовано
Советом факультета прикладной математики
Белгосуниверситета имени В. И. Ленина

Рецензент — В. Т. Дементьев,
доктор физико-математических наук

Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 3. Сетевые задачи.— Мн.: изд-во «Университетское», 1986.— 224 с.

Часть 3 монографии посвящена развитию методов, изложенных в предыдущих частях, на экстремальные статические и динамические задачи, в которых объекты оптимизации моделируются с помощью сетей. Сначала рассматривается обобщение классической задачи о максимальном потоке. Затем исследуются методы решения ряда сетевых задач на условный минимум. Рассмотренные статические сетевые задачи могут служить основными модулями при создании в дальнейшем методов решения общих задач нелинейного программирования. Отдельно изучаются методы решения линейных динамических сетевых задач, которые относятся к задачам теории оптимального управления дискретными системами, но не имеют эффективных алгоритмов решения из-за наличия фазовых и смешанных ограничений. В заключение разрабатываются алгоритмы решения нескольких линейных динамических задач с непрерывным временем. Приводятся результаты численного эксперимента на ЭВМ по решению этих задач с помощью двух разработанных в книге методов.

Библиогр. 37 назв. Ил. 31. Табл. 7.

$$\text{Г}\,\frac{1502000000-022}{\text{М}317(05)-86}\,22-86$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сети (сетевые модели) постепенно становятся одним из наиболее популярных и эффективных средств прикладной математики. Люди часто изображают свои действия, работу машин, сущность явлений с помощью схем, графиков и других геометрических объектов, которые естественно описываются в терминах теории сетей. В классическом анализе, традиционно включающем и теорию экстремальных задач, сетевые модели практически не используются. Там для линейных задач привычны и универсальны матричные модели; общие, нелинейные, функциональные зависимости представляются с помощью суперпозиций функций различной степени сложности. Сети и графы как самостоятельные математические объекты изучаются только в специальных разделах математики.

Данная, третья, часть монографии посвящена исследованию статических и динамических экстремальных задач, определенных (поставленных, сформулированных) в сетевых терминах. Статические сетевые экстремальные задачи нескольких специальных классов уже рассматривались в книге: Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. Методы линейного программирования. Ч. 2. Транспортные задачи и Ч. 3. Специальные задачи.— Минск: Изд-во БГУ, 1978, 1980. Теперь основное внимание уделяется общему случаю. Это вызвано следующими обстоятельствами. В математических теориях, большинство из которых посвящено изучению качественных аспектов явлений, удобно пользоваться универсальными, просто записываемыми моделями и строить для них общую теорию, охватывая частные случаи многочисленными следствиями (в линейном случае свойством универсальности обладают матричные модели). В конструктивной теории такой «классический» подход не является безупречным. Реальная эффективность алгоритмов, предназначенных для решения практических задач на ЭВМ, в определяющей степени зависит от полноты учета специфики конкретного класса задач. Сводить реальную задачу, трактуемую практиками в удобной для них сетевой форме, к большой матричной модели с малым количеством ненулевых элементов и затем приспосабливать полученную специальную матрицу к заранее введенным абстрактным классам с тем, чтобы решать задачу методами, разработанными для этих классов, вряд ли всегда разумно. Более коротким и перспективным нам представляется подход, в котором максимально сохраняется начальная сетевая структура задачи, а общие принципы оптимизации детализируются до методов, разработанных для сетевой модели, непосредственно связанной с исходной задачей. Каждая прикладная задача в известном смысле уникальна, поскольку обладает свойствами, характерными только для нее. Однако при создании математического обеспечения ЭВМ вряд ли целесообразно всегда строить специальный метод для отдельной прикладной задачи. Процесс конкретизации общих методов (точнее, общих принципов, заложенных в них) на классы задач с учетом все более и более тонкой структуры идет навстречу процессу вложения конкретных задач во все более широкие классы задач. Выбор метода и класса задач в каждом отдельном случае зависит от многих обстоятельств, среди которых важное значение имеют особенности ЭВМ и степень массовости задачи.

Второе обстоятельство, в силу которого в настоящей части монографии предпринято самостоятельное изучение сетевых моделей, состоит в том, что операции на сетях по логике и технике очень близки к операциям, осуществляемым при составлении машинных программ для ЭВМ. Это должно способствовать созданию качественного программного обеспечения для изучаемых экстремальных задач.

Третье обстоятельство, способствовавшее появлению данной книги, связано с тем, что сетевые задачи по своей сущности близки к экстремальным задачам на системах с распределенными параметрами, ибо сети можно трактовать как шаблоны для разнообразных дифференциальных операторов в многомерных пространствах.

Вместе взятые приведенные факты приобретают особое значение с точки зрения проблемы решения больших экстремальных задач.

Динамические экстремальные сетевые задачи составляют второй объект исследований в этой части монографии. Если упомянутый выше первый (статический) объект предпринимаемых в гл. 1 и 2 исследований можно связать с первой частью монографии, то второй объект непосредственно примыкает к вопросам, исследованным в предыдущей (второй) части монографии. Отдельное изучение динамических сетевых экстремальных задач объясняется следующим. В новых задачах «пространственная» структура описывается сетью, а не матрицей (см. ч. I монографии), «временная» структура дискретна и состоит из небольшого числа этапов (см. ч. 2 монографии). Первая особенность задач уже обсуждалась выше. Вторая особенность не позволяет эффективно использовать приемы из предыдущей части, рассчитанные на большое число этапов. Кроме того, новые задачи с точки зрения теории оптимального управления относятся к наиболее сложному классу задач с фазовыми ограничениями. Техника второй части монографии для таких задач малоэффективна. Поэтому для исследования экстремальных динамических задач предполагаются специальные методы (гл. 3, 4).

В заключительной главе исследуются динамические экстремальные задачи с непрерывным временем. Полученные результаты можно рассматривать как необходимое дополнение к результатам предыдущих глав и второй части монографии.

В совокупности первые три части монографии, посвященные линейным экстремальным задачам для трех наиболее актуальных классов моделей (конечных, дифференциальных и сетевых), составляют основу двух следующих частей, в которых будут изложены методы решения выпуклых (ч. 4) и общих нелинейных (ч. 5) задач.

В каждом параграфе формулы, теоремы, следствия, определения, замечания, таблицы и рисунки имеют одинарную нумерацию. При ссылках на результаты внутри параграфа также используется одинарная нумерация. Ссылки на результат другого параграфа внутри одной главы имеют двойную нумерацию: первая цифра — номер параграфа, вторая — номер результата. Остальные обозначения традиционны, они поясняются при их введении.

Авторы

Глава 1. МАКСИМИЗАЦИЯ ПОТОКОВ НА ОБОБЩЕННЫХ СЕТЯХ

Классическая задача о максимальном потоке на сети относится к специальным задачам линейного программирования [1, 2], имеющим особенно многочисленные приложения [3—6]. Для ее решения предложены разнообразные алгоритмы. Пример этой и многих других линейных потоковых экстремальных задач [7, 8] показывает, что в данной области оптимизации путь специальной реализации общих методов гораздо эффективнее пути вложения специальных линейных задач в матричные модели линейного программирования с последующим применением общих методов, учитывающих сильную разреженность получающихся матриц.

Исследуемые задачи о максимальных потоках обобщают упомянутую классическую задачу. Построенные для них алгоритмы реализуют на сетях адаптивный метод, изложенный в ч. 1 данной монографии (см. [9]). Результаты главы будут использованы в ч. 5 при решении нелинейных экстремальных задач.

§ 1. Максимальный поток на сети с обобщенными дугами

1. Сеть. Пусть $S=\{I, U\}$ — конечная ориентированная связная сеть, в которой I — множество узлов, U — множество дуг. Множество I состоит из двух непересекающихся подмножеств I_Δ, I_Σ: $I=I_\Delta \cup I_\Sigma$, $I_\Delta \cap I_\Sigma=\varnothing$. Элементы $i \in I_\Delta$ назовем узлами-размножителями. Узел $i \in I_\Delta$ имеет один вход и конечное число выходов (рис. 1). Входной сигнал (поток) z, поступив на узел $i \in I_\Delta$, проходит через него и передается далее в виде ν_i выходных сигналов, представляющих собой копии входного сигнала. Элементы $i \in I_\Sigma$ будем называть узлами-сумматорами. Узел $i \in I_\Sigma$ имеет конечное число входов и один выход (рис. 2). Входные сигналы $z_1, \ldots, z_{q_i}$, поступив на узел $i \in I_\Sigma$, проходят через него и передаются далее в виде выходного сигнала z, представляющего сумму $\sum_{j=1}^{q_i} z_j + a_i$ входных сигналов и числа a_i — характеристики (интенсивности) узла i. В множестве I_Σ выделим для каждого узла $i \in I_\Delta$ подмножество $I_\Delta(i) = \{j \in I_\Sigma : (i, j) \in U\}$, с элементами которого соединен узел i.

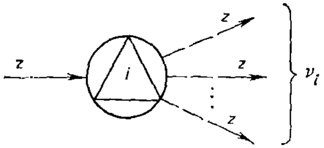

Рис. 1

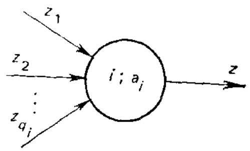

Рис. 2

Как обычно, дуги $(i, j) \in U$ отражают связи между некоторыми узлами $i, j \in I$ сети S. Множество U разобьем на подмножества U_Δ, U_*: $U_\Delta = \{(i, j) \in U: \ i \in I_\Delta\}$, $U_* = U \setminus U_\Delta$. Для дуги $(i, j) \in U_*$ кроме традиционных характеристик d_{*ij}, d^*_{ij} — нижней и верхней пропускных способностей — введем новую $a_{ij} \neq 0$. Она отражает специальное свойство дуги (i, j): поток x_{ij} из узла $i \in I$, пройдя по дуге (i, j), поступает в узел $j \in I$ в виде $a_{ij}x_{ij}$. Другими словами, перед узлом j на дуге (i, j) имеется устройство, преобразующее поток (рис. 3, a). Выходные сигналы x_{ij}, $(i, j) \in U_\Delta$, узлов $i \in I_\Delta$ однозначно определяются входными сигналами x_i, $i \in I_\Delta$. Поэтому дугам $(i, j) \in U_\Delta$ не приписываются характеристики d_{*ij}, d^*_{ij}, а потоки x_{ij}, $(i, j) \in U_\Delta$, не включаются в число искомых. Однако дуга $(i, j) \in U_\Delta$, как и дуга $(i, j) \in U_*$, имеет характеристику $a_{ij} \neq 0$, а поток x_{ij} для удобства вычислений отмечается на рисунках. Дуги, инцидентные узлам $i \in I_\Delta$, на рисунках изображаются штриховыми линиями (см. рис. 3, $б$), остальные дуги $(i, j) \in U_*$ — сплошными (см. рис. 3, a).

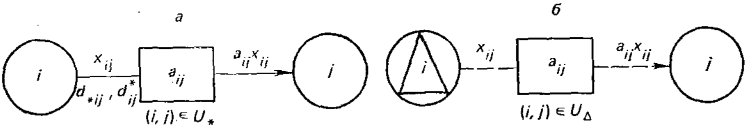

Рис. 3

Узел $i \in I$ назовем входным узлом (источником) сети, если его входные сигналы не получаются из выходных сигналов других узлов сети. Выходной узел (сток) — это такой узел $t \in I$, выходные сигналы которого не используются для получения входных сигналов других узлов сети.

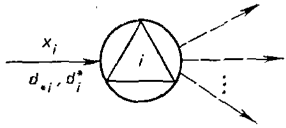

Рис. 4

В данном параграфе предполагается, что сеть S имеет n входных узлов и один выходной узел, причем множество входных узлов совпадает с I_Δ ($|I_\Delta|=n$), а выходной узел t принадлежит множеству I_Σ.

Входные сигналы сети (входные сигналы узлов $i \in I_\Delta$) обозначим через x_i, $i \in I_\Delta$, выходной — через f. Нижнюю d_{*i} и верхнюю d_i^* границы входного сигнала x_i на рисунках будем записывать под стрелкой, изображающей входной сигнал (рис. 4).

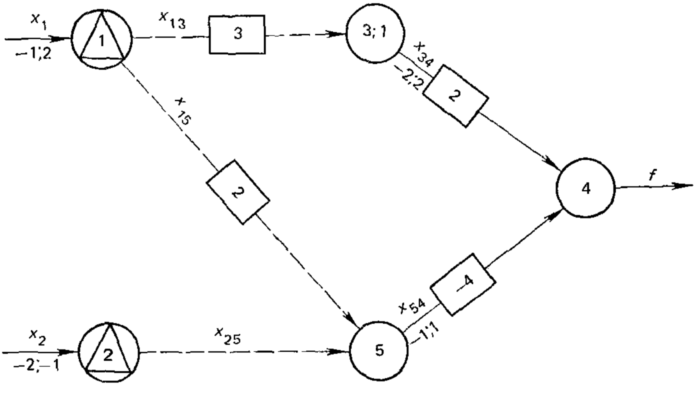

Рис. 5

Пример конкретной сети с двумя входами приведен на рис. 5: $I_\Delta = \{1, 2\}$, $I_\Sigma = \{3, 4, 5\}$, $a_3 = 1$, $a_4 = a_5 = 0$, $U = \{(1, 3), (1, 5), (2, 5), (3, 4), (5, 4)\}$, $a_{13} = 3$, $a_{15} = 2$, $a_{25} = 1$, $a_{34} = 2$, $a_{54} = -4$; $d_{1*} = -1$, $d_1^* = 2$, $d_{2*} = -2$, $d_2^* = -1$, $d_{*34} = -2$, $d_{34}^* = 2$, $d_{*54} = -1$, $d_{54}^* = 1$.

Замечания. 1. Характеристики $a_i=0$, $a_{ij}=1$ на рисунках не отмечаются.

2. Сеть, изображенная на рис. 5, получается при линеаризации функций вида $f=f_1(f_2(x_1)+1)+f_3(f_4(x_1)+x_2)$. Они при $f_1(z)=z^2$,

$f_2(z)=-z$, $f_3(z)=100\ z^2$, $f_4(z)=-z^2$ включают известную в нелинейном программировании тестовую функцию Розенброка [10].

2. Поток. Если на сети S игнорировать пропускные способности дуг, то каждому набору $x=(x_i,\ i\in I_\Delta)$ входных сигналов соответствует единственная совокупность, состоящая из дуговых потоков и выходного сигнала и построенная согласно перечисленным в п. 1 правилам преобразования сигналов в узлах и на дугах сети. Полученную таким образом совокупность переменных $\varkappa=(x_i,\ i\in I_\Delta;\ x_{ij},\ (i,\ j)\in U_*;\ f)$ назовем псевдопотоком.

Псевдопоток $\varkappa$ будем называть потоком z, а набор $x=(x_i,\ i\in I_\Delta)$ — планом, если входные сигналы и дуговые потоки удовлетворяют ограничениям $d_{*i}\leqslant x_i\leqslant d_i^*$, $i\in I_\Delta$; $d_{*ij}\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij}^*$, $(i,\ j)\in U_*$.

Значение $f=f(x)$ выходного сигнала, соответствующего плану x, называется величиной потока.

Плану $x=(0,\ -1)$ на сети, изображенной на рис. 5, соответствует поток $z=(x_1=0,\ \ x_2=-1,\ \ x_{13}=x_{15}=0,\ x_{25}=x_{54}=-1,\ x_{34}=1,\ f=6)$ величины 6.

Поток z^0, величина $f^0=f(x^0)$ которого максимальна, будем называть максимальным (оптимальным) потоком. Под ε-максимальным (субоптимальным, ε-оптимальным) будем понимать поток z^ε, величина $f^\varepsilon=f(x^\varepsilon)$ которого удовлетворяет неравенству $f^0-f^\varepsilon\leqslant\varepsilon$.

Замечание. Пусть μ_i^*, $i\in I_\Sigma$, — единственное решение системы $\mu_t^*=1$, $\mu_i^*=a_{ij}\mu_j^*$, $(i,\ j)\in U_*$. Замена переменных $\tilde{x}_{ij}=x_{ij}\mu_i^*$, $(i,\ j)\in U_*$; $\bar{x}_j=x_j$, $j\in I_\Delta$, и параметров $\bar{a}_{ji}=a_{ji}\mu_i^*$, $i\in I_\Delta(j)$, $j\in I_\Delta$; $\bar{a}_i=a_i\mu_i^*$, $i\in I_\Sigma$, сводит исходную задачу о максимальном потоке на сети S с характеристиками дуг $a_{ij}\neq 1$, $(i,\ j)\in U_*$, к эквивалентной задаче о максимальном потоке на сети $\bar{S}$, все дуги $(i,\ j)\in U_*$ которой обыкновенные, т. е. $\bar{a}_{ij}\equiv 1$, $(i,\ j)\in U_*$.

§ 2. Опора

Основным элементом предлагаемых далее методов является опора. Обозначим через $(i,\ j(i))\in U_*$ единственную дугу сети S, выходящую из узла $i\in I_\Sigma\setminus t$.

Определение. Совокупность $Q_{\text{оп}}=\{I_{\Delta\text{оп}},\ I_{\Sigma\text{оп}}\}$ множеств $I_{\Delta\text{оп}}\subset I_\Delta$, $I_{\Sigma\text{оп}}\subset I_\Sigma\setminus t$ назовем опорой сети S, если на сети S с $a_i=0$, $i\in I_\Sigma$, свойством

$$x_{ij(i)}=0,\ i\in I_{\Sigma\text{оп}};\ x_i=0,\ i\in I_{\Delta\text{н}},\ I_{\Delta\text{н}}=I_\Delta\setminus I_{\Delta\text{оп}},\qquad(1)$$

обладает только нулевой (тривиальный) псевдопоток $\varkappa$, но при любых $i_0\in I_{\Sigma\text{оп}}$, $j_0\in I_{\Delta\text{п}}$ свойством

$$x_{ij(i)}=0,\ i\in I_{\Sigma оп};\ x_i=0,\ i\in I_{\Delta н}\setminus j_0, \qquad (2)$$

или свойством

$$x_{ij(i)}=0,\ i\in I_{\Sigma оп}\setminus i_0;\ x_i=0,\ i\in I_{\Delta н}, \qquad (3)$$

обладает хотя бы один ненулевой псевдопоток $\varkappa$.

Обозначим: $U_{оп}=U_*\setminus \bigcup\limits_{i\in I_{\Sigma оп}} (i,\ j(i))$; $U_{н}=U_*\setminus U_{оп}$.

Для совокупности $Q_{оп}=\varnothing$ $(I_{\Delta оп}=I_{\Sigma оп}=\varnothing)$ выполняются условия (1)—(3). Следовательно, множество $Q_{оп}=\varnothing$ является тривиальной опорой. Найдем критерий опорности для случая $Q_{оп}\neq\varnothing$.

По заданным множествам $I_{\Delta оп}\subset I_\Delta$, $I_{\Sigma оп}\subset I_\Sigma\setminus t$ найдем решение μ_i, $i\in I_\Sigma$, системы

$$\mu_i-a_{ij}\mu_j=0,\ (i,\ j)\in U_{оп}, \qquad (4)$$

при условиях

$$\mu_t=1,\ \mu_i=1,\ i\in I_{\Sigma оп}. \qquad (5)$$

Система (4), (5) имеет единственное решение, так как сеть $S_{оп}=\{I_\Sigma,\ U_{оп}\}$ не содержит циклов и в каждой ее компоненте связности имеется ровно один узел из $I_{\Sigma оп}\cup t$. Построим матрицу

$$G_{оп}=G(I_{\Sigma оп},\ I_{\Delta оп})=(g_{si},\ s\in I_{\Sigma оп},\ i\in I_{\Delta оп}),$$

$$g_{si}=\sum_{k\in I_\Delta(i)\cap I_\Sigma(s)}\mu_k a_{ik},\ s\in I_{\Sigma оп},\ i\in I_{\Delta оп}.$$

Здесь $\{I_\Sigma(s),\ U_{оп}(s)\}$ — компонента связности сети $S_{оп}$, содержащая узел $s\in I_{\Sigma оп}\cup t$.

Критерий опорности. Для опорности множества $Q_{оп}=\{I_{\Sigma оп},\ I_{\Delta оп}\}$, $|I_{\Delta оп}|+|I_{\Sigma оп}|>0$, необходимо и достаточно, чтобы $|I_{\Delta оп}|=|I_{\Sigma оп}|$, $\det G_{оп}\neq 0$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $Q_{оп}$ — опора сети S, на которой условия критерия опорности не выполняются. Предположим, что $|I_{\Delta оп}|>|I_{\Sigma оп}|>0$ либо $|I_{\Delta оп}|=|I_{\Sigma оп}|$, но $\det G_{оп}=0$. В этом случае существует ненулевое решение $\alpha(I_{\Delta оп})=(\alpha_i,\ i\in I_{\Delta оп})$ уравнения $G_{оп}\alpha(I_{\Delta оп})=0$. Псевдопоток $\varkappa$, соответствующий входным сигналам $x_i=\alpha_i$, $i\in I_{\Delta оп}$; $x_i=0$, $i\in I_{\Delta н}$, обладает свойством (1) и нетривиален. Это противоречит определению опоры.

Предположим теперь, что $|I_{\Sigma оп}|>|I_{\Delta оп}|>0$. Тогда существует ненулевое решение $\alpha(I_{\Sigma оп})=(\alpha_i,\ i\in I_{\Sigma оп})$ уравнения

$$\alpha'(I_{\Sigma оп})G_{оп}=0. \qquad (6)$$

Обозначим: $I_{\Sigma *}=\{i\in I_{\Sigma\text{оп}}: \bar{\alpha}_i\neq 0\}$; $i_0\in I_{\Sigma *}$ — такой индекс, что

$$j(i_0)\in I_\Sigma(s_0),\ s_0\bar{\in} I_{\Sigma *}. \tag{7}$$

В силу определения опоры существует нетривиальный псевдопоток $\varkappa^*=(x_i^*,\ i\in I_\Delta;\ x_{ij}^*,\ (i,\ j)\in U_*;\ f^*)$, удовлетворяющий условию (3).

Для любого псевдопотока $\varkappa$ на сети S при $a_i=0$, $i\in I_\Sigma$, справедливы равенства

$$x_{ij}=\sum_{s\in I_\Delta} x_s \sum_{k\in I_\Delta(s)\cap I_\Sigma^i} a_{sk}\,\mu_k^*/\mu_i^*,\ (i,\ j)\in U_*. \tag{8}$$

Здесь I_Σ^i — множество узлов компоненты связности сети $\{I_\Sigma,\ U_*\setminus(i,\ j)\}$, содержащей узел i; μ_i^*, $i\in I_\Sigma$, — решение системы $\mu_t^*=1$, $\mu_i^*-a_{ij}\mu_j^*=0$, $(i,\ j)\in U_*$. Равенства (8) для $i\in I_{\Sigma\text{оп}}$ с учетом (3) принимают вид

$$\begin{aligned} x_{ij(i)}^* &= \sum_{j\in I_{\Delta\text{оп}}}\Big(x_j^* \sum_{k\in I_\Delta(j)\cap I_\Sigma(i)} a_{jk}\mu_k\Big)+x_{i_0j(i_0)}^*\gamma_i = \\ &= G(i,\ I_{\Delta\text{оп}})x^*(I_{\Delta\text{оп}})+x_{i_0j(i_0)}^*\gamma_i,\ i\in I_{\Sigma\text{оп}}, \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\begin{gathered} \gamma_i=0,\ i\in I_{\Sigma\text{оп}},\ \text{при}\ s_0=t; \\ \gamma_i=0,\ i\in I_{\Sigma\text{оп}}\setminus s_0,\ \gamma_{s_0}=a_{i_0j(i_0)}\mu_{j(i_0)}\ \text{при}\ s_0\neq t. \end{gathered} \tag{10}$$

Поскольку $\gamma_{i_0}=0$, то

$$x_{i_0j(i_0)}^*=G(i_0,\ I_{\Delta\text{оп}})\,x^*(I_{\Delta\text{оп}}). \tag{11}$$

Подставим (11) в (9), учтем (3) и в результате получим

$$(G(i,\ I_{\Delta\text{оп}})+\gamma_i G(i_0,\ I_{\Delta\text{оп}}))\,x^*(I_{\Delta\text{оп}})=0,\ i\in I_{\Sigma\text{оп}}\setminus i_0. \tag{12}$$

Умножим равенства (12) на $\bar{\alpha}_i$, $i\in I_{\Sigma\text{оп}}\setminus i_0$, равенство (11) на $\bar{\alpha}_{i_0}$ и просуммируем их:

$$\begin{aligned} x_{i_0j(i_0)}^* &= \Big[\sum_{i\in I_{\Sigma\text{оп}}}\bar{\alpha}_i G(i,\ I_{\Delta\text{оп}})+ \\ &+\sum_{i\in I_{\Sigma\text{оп}}\setminus i_0}\bar{\alpha}_i\gamma_i G(i_0,\ I_{\Delta\text{оп}})\Big]\,x^*(I_{\Delta\text{оп}}). \end{aligned}$$

Приняв во внимание (6), (7), (10), заключаем, что $x_{i_0j(i_0)}^*=$

$$=G(i_0,\ I_{\Delta\text{оп}})\,x^*(I_{\Delta\text{оп}})\sum_{i\in I_{\Sigma\text{оп}}\setminus i_0}\bar{\alpha}_i\,\gamma_i=0.$$

Таким образом, нетривиальный псевдопоток $\varkappa^*$ обладает свойством (1). Противоречие с определением опоры доказывает, что при $|I_{\Sigma оп}|>0$, $|I_{\Delta оп}|>0$ должно быть $|I_{\Delta оп}|=|I_{\Sigma оп}|$, $\det G_{оп}\neq 0$. Предположим теперь, что 1) $|I_{\Delta оп}|>|I_{\Sigma оп}|=0$ или 2) $|I_{\Sigma оп}|>|I_{\Delta оп}|=0$. В случае 1) псевдопоток $\varkappa$, соответствующий входным сигналам $x_i=1$, $i\in I_{\Delta оп}$; $x_i=0$, $i\in I_{\Delta н}$, обладает свойством (1) и является нетривиальным. В случае 2) при любом $i_0\in I_{\Sigma оп}$ на сети S не существует нетривиального потока, обладающего свойством (3), что противоречит определению опоры.

Достаточность. Пусть $|I_{\Delta оп}|=|I_{\Sigma оп}|$, $\det G_{оп}\neq 0$. Покажем, что псевдопоток $\varkappa$, обладающий свойством (1), будет тривиальным. Действительно, из (8) с учетом (1) имеем

$$0=x_{ij(i)}=\sum_{j\in I_{\Delta оп}} x_j \sum_{k\in I_\Delta(j)\cap I_\Sigma(i)} a_{jk}\mu_k,\quad i\in I_{\Sigma оп},$$

или

$$G_{оп}x(I_{\Delta оп})=0. \tag{13}$$

Поскольку $\det G_{оп}\neq 0$, то из (13) получим $x(I_{\Delta оп})=0$. Значит, при условиях (1) в сети S возможны только нулевые входные сигналы x_i, $i\in I_\Delta$, которые порождают нулевой псевдопоток.

Возьмем любое $i_0\in I_{\Sigma оп}$ и подсчитаем числа γ_i, $i\in I_{\Sigma оп}\backslash i_0$ (10). Псевдопоток $\varkappa^*$, соответствующий нетривиальным входным сигналам $x^*(I_{\Delta оп})=G_{оп}^{-1}(-\gamma(I_{\Sigma оп}\backslash i_0), 1)\neq 0$, $x^*(I_{\Delta н})=0$, обладает свойством (3) и является нетривиальным.

Пусть j_0 — любой элемент из $I_{\Delta н}$. Тогда нетривиальный псевдопоток $\varkappa$, соответствующий входным сигналам $x_{j_0}=1$, $x(I_{\Delta оп})=-G_{оп}^{-1}G(I_{\Sigma оп}, j_0)$, $x(I_{\Delta н}\backslash j_0)=0$, обладает свойством (2).

Утверждение доказано.

Замечание. В случае $a_{ij}\equiv 1$, $(i, j)\in U$, элементы матрицы $G_{оп}$ равны $g_{si}=|I_\Delta(i)\cap I_\Sigma(s)|$, $s\in I_{\Sigma оп}$, $i\in I_{\Delta оп}$.

Пример. Рассмотрим сеть S, изображенную на рис. 5. Проверим, является ли совокупность $Q_{оп}=\{I_{\Delta оп}, I_{\Sigma оп}\}$, $I_{\Delta оп}=\{1\}$, $I_{\Sigma оп}=\{5\}$, опорой задачи. Согласно принятым обозначениям имеем: $U_\Delta=\{(1, 3), (1, 5), (2, 5)\}$, $U_*=\{(3, 4), (5, 4)\}$, $U_{оп}=\{(3, 4)\}$, $I_\Delta(1)=\{3, 5\}$, $I_\Delta(2)=\{5\}$. Сеть $S_{оп}=\{I_\Sigma, U_{оп}\}$ состоит из двух компонент связности $\{I_\Sigma(4)=\{3, 4\}, U_{оп}(4)=\{(3, 4)\}\}$; $\{I_\Sigma(5)=\{5\}, U_{оп}(5)=\varnothing\}$. Система (4), (5) имеет решение: $\mu_3=2$, $\mu_4=1$, $\mu_5=1$. Опорная матрица $G_{оп}$ состоит из одного элемента $g_{51}=$

$= \sum_{k \in I_\Delta(1) \cap I_\Sigma(5)} \mu_k a_{1k} = \mu_5 a_{15} = 2 \neq 0$. Согласно критерию опорности совокупность $Q_{\text{оп}}$ является опорой сети S.

§ 3. Критерий оптимальности опорного потока

Наиболее эффективными методами решения линейных задач считаются прямые точные релаксационные методы. Основной из них, используемый для решения задачи о максимальном потоке (см. § 1), будет изложен в § 5. В данном параграфе решается первый вопрос, возникающий при использовании упомянутых методов,— вопрос об оптимальности информации, с которой на итерациях работает прямой метод. Приведенное ниже доказательство критерия оптимальности носит конструктивный характер. В нем содержатся все элементы сетевой реализации прямого опорного метода, относящегося к методам симплексного типа

Определения. Пару $\{z, Q_{\text{оп}}\}$ из потока и опоры сети $\tilde{S}$ назовем опорным потоком. Опорный поток $\{z, Q_{\text{оп}}\}$ назовем невырожденным, если $d_{*i} < x_i < d_i^*$, $i \in I_{\Delta\text{оп}}$; $d_{*ij} < x_{ij} < d_{ij}^*$, $(i, j) \in U_{\text{оп}}$.

Рассмотрим опорный поток $\{z, Q_{\text{оп}}\}$. Обозначим: $c(I_{\Delta\text{оп}}) = (c_i = \sum_{k \in I_\Delta(i) \cap I_\Sigma(t)} a_{ik} \mu_k,\ i \in I_{\Delta\text{оп}})$. Используя $Q_{\text{оп}}$, подсчитаем потенциалы y_i, $i \in I_\Sigma$:

$$\begin{gathered} y_t = -1,\ y'(I_{\Sigma\text{оп}}) = c'(I_{\Delta\text{оп}}) G_{\text{оп}}^{-1}; \\ y_i = y_s \mu_i,\ i \in I_\Sigma(s) \setminus s,\ s \in I_{\Sigma\text{оп}} \cup t, \end{gathered} \tag{1}$$

и оценки:

$$\begin{gathered} \Delta_i = \sum_{k \in I_\Delta(i)} a_{ik} y_k,\ i \in I_{\Delta\text{н}}; \\ \Delta_{ij} = -y_i + a_{ij} y_j,\ (i, j) \in U_{\text{н}} = U_* \setminus U_{\text{оп}}. \end{gathered} \tag{2}$$

Наряду с потоком $z = (x_i,\ i \in I_\Delta;\ x_{ij},\ (i, j) \in U_*;\ f)$ рассмотрим поток $\bar{z} = (\bar{x}_i = x_i + \Delta x_i,\ i \in I_\Delta;\ \bar{x}_{ij} = x_{ij} + \Delta x_{ij},\ (i, j) \in U_*;\ \bar{f} = f + \Delta f)$. Вычислим

$$\Delta f = -\sum_{i \in I_{\Delta\text{н}}} \Delta_i \Delta x_i - \sum_{(i, j) \in U_{\text{н}}} \Delta_{ij} \Delta x_{ij}. \tag{3}$$

Используя (3) и следуя [11], получаем неравенство

$$f^0 - f \leqslant \beta(z, Q_{\text{оп}}) = \sum_{\substack{i \in I_{\Delta\text{н}}, \\ \Delta_i > 0}} \Delta_i (x_i - d_{*i}) +$$

$$+ \sum_{\substack{i \in I_{\Delta\text{н}}, \\ \Delta_i < 0}} \Delta_i (x_i - d_i^*) + \sum_{\substack{(i,\ j) \in U_\text{н}, \\ \Delta_{ij} > 0}} \Delta_{ij} (x_{ij} - d_{*ij}) + \tag{4}$$

$$+ \sum_{\substack{(i,\ j) \in U_\text{н}, \\ \Delta_{ij} < 0}} \Delta_{ij} (x_{ij} - d_{ij}^*).$$

Число $\beta = \beta(z, Q_{\text{оп}})$ назовем оценкой субоптимальности опорного потока.

Критерий оптимальности. Соотношения

$$\begin{gathered} \Delta_i \geqslant 0 \text{ при } x_i = d_{*i};\ \Delta_i \leqslant 0 \text{ при } x_i = d_i^*; \\ \Delta_i = 0 \text{ при } d_{*i} < x_i < d_i^*,\ i \in I_{\Delta\text{н}}; \\ \Delta_{ij} \geqslant 0 \text{ при } x_{ij} = d_{*ij},\ \Delta_{ij} \leqslant 0 \text{ при } x_{ij} = d_{ij}^*; \\ \Delta_{ij} = 0 \text{ при } d_{*ij} < x_{ij} < d_{ij}^*,\ (i,\ j) \in U_\text{н}, \end{gathered} \tag{5}$$

достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного потока.

Доказательство. *Достаточность.* Если соотношения (5) выполняются, то $\beta(z, Q_{\text{оп}}) = 0$ и из (4) следует оптимальность потока z.

Необходимость. Пусть $\{z, Q_{\text{оп}}\}$ — оптимальный невырожденный опорный поток. Предположим, что соотношения (5) нарушаются. Значит, существует 1) такой узел $j_0 \in I_{\Delta\text{н}}$, что $x_{j_0} \neq d_{*j_0}$ при $\Delta_{j_0} > 0$ или $x_{j_0} \neq d_{j_0}^*$ при $\Delta_{j_0} < 0$, либо 2) такой узел $i_0 \in I_{\Sigma\text{оп}}$, что $x_{i_0 j(i_0)} \neq d_{*i_0 j(i_0)}$ при $\Delta_{i_0 j(i_0)} > 0$ или $x_{i_0 j(i_0)} \neq d_{i_0 j(i_0)}^*$ при $\Delta_{i_0 j(i_0)} < 0$.

Исследуем случай 1). Построим приращение псевдопотока $\Delta z = (\Delta x_i,\ i \in I_\Delta;\ \Delta x_{ij},\ (i,\ j) \in U_*;\ \Delta f)$, соответствующее входным сигналам

$$\begin{gathered} \Delta x_{j_0} = -\operatorname{sign} \Delta_{j_0},\ \Delta x_i = 0,\ i \in I_{\Delta\text{н}} \setminus j_0, \\ \Delta x(I_{\Delta\text{оп}}) = G_{\text{оп}}^{-1} G(I_{\Sigma\text{оп}},\ j_0) \operatorname{sign} \Delta_{j_0}. \end{gathered} \tag{6}$$

Из (2.8) следует

$$\Delta x_{ij(i)} = 0,\ i \in I_{\Sigma\text{оп}}. \tag{7}$$

Рассмотрим псевдопоток $\bar{z} = z + \Theta \Delta z$ с $\Theta > 0$. В силу невырожденности опорного потока $\{z, Q_{\text{оп}}\}$ псевдопоток $\bar{z}$ при достаточно малом $\Theta > 0$ будет потоком на сети S. Подсчитаем приращение величины потока (3). С учетом (6), (7) имеем $\bar{f}-f=-\Delta_{j_0}\Delta x_{j_0}=|\Delta_{j_0}|>0$, что противоречит оптимальности потока z.

Исследуем теперь случай 2). Пусть $j(i_0)\in I_\Sigma(s_0)$, $s_0\in \in I_{\Sigma\text{оп}}\cup t$. Построим приращение псевдопотока $\Delta z=(\Delta x_i,$ $i\in I_\Delta$; Δx_{ij}, $(i, j)\in U_*$; $\Delta f)$, соответствующее входным сигналам:

$$\Delta x_i=0,\ i\in I_{\Delta\text{н}};\qquad (8)$$

$$\Delta x(I_{\Delta\text{оп}})=G_{\text{оп}}^{-1}(\gamma(I_{\Sigma\text{оп}}\backslash i_0),-1)\operatorname{sign}\Delta_{i_0 j(i_0)},$$

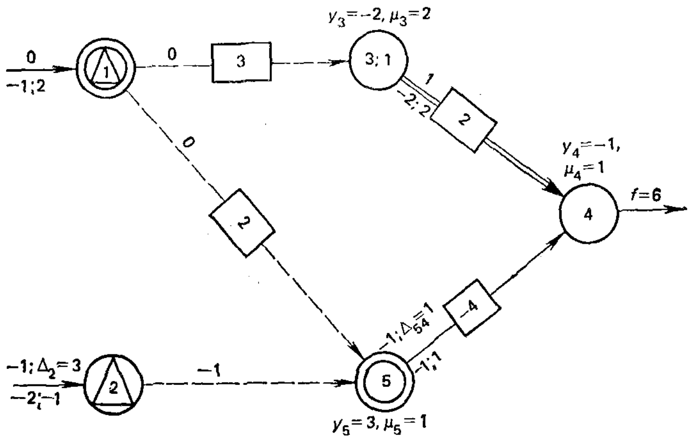

Рис. 6

где числа γ_i, $i\in I_{\Sigma\text{оп}}\backslash i_0$, найдены согласно (2.10). Из (2.9) следует

$$\Delta x_{ij(i)}=0,\ i\in I_{\Sigma\text{оп}}\backslash i_0;\ \Delta x_{i_0 j(i_0)}=-\operatorname{sign}\Delta_{i_0 j(i_0)}.\qquad (9)$$

В силу (3), (8), (9) и невырожденности опорного потока $\{z, Q_{\text{оп}}\}$ псевдопоток $\bar{z}=z+\Theta\Delta z$ при достаточно малом $\Theta>0$ будет потоком и $\bar{f}-f=-\Delta_{i_0 j(i_0)}\Delta x_{i_0 j(i_0)}=|\Delta_{i_0 j(i_0)}|>0$, что противоречит оптимальности потока z.

Критерий оптимальности доказан.

Замечание. На базе доказательства необходимой части критерия оптимальности (формулы (6), (8)), следуя [11], можно построить прямой опорный метод поиска максимального потока на сети S.

Критерий субоптимальности. При любом $\varepsilon\geqslant 0$ для ε-оптимальности потока z необходимо и достаточно существование такой опоры $Q_{\text{оп}}$, что $\beta(z, Q_{\text{оп}})\leqslant\varepsilon$.