А. А. ЮЩЕНКО

ИЗУЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

МИНСК 1963

А. А. ЮЩЕНКО

ИЗУЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

под редакцией доктора физико-математических наук профессора
Ф. Д. ГАХОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ВЫСШЕГО, СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ БССР
МИНСК 1963

Введение

Одно из важных мест в школьном курсе математики занимает учение о функции. Сейчас общепризнано, что идея функциональной зависимости должна пронизывать содержание всего школьного курса математики. Это важное требование, особенно в связи с перестройкой работы средней школы, учтено новой программой по математике, которая учению о функциях отводит значительное место в различных классах.

Программа по математике для старших классов средней школы, утвержденная Министерством просвещения РСФСР в октябре 1960 г.,[1] позволяет улучшить математическую подготовку оканчивающих среднюю школу. В частности, принятая программа, учитывая результаты широко проводившегося общественностью обсуждения проекта, предусматривает включение в курс XI класса материала, завершающего учение о функциях в средней школе (темы «Функции и пределы», «Производная и ее применение к исследованию функций»).

Передовые русские ученые, учителя еще в начале XX в. считали, что учащиеся должны овладеть основами высшей математики (аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчисления). Эта мысль нашла свое отражение в резолюциях Всероссийских съездов преподавателей математики 1912 и 1915 гг., в высказываниях акад. П. Л. Чебышева, акад. М. В. Остроградского и др. С 1906 г. эти вопросы были включены в курс реальных училищ, а с 1911 г. — в курс кадетских корпусов. Программа предусматривала изучение довольно широкого круга методов высшей математики. Опыт показал, что материал по аналитической

---

[1] «Математика в школе», 1961, № 1.

геометрии и дифференциальному исчислению вполне доступен учащимся, интегральное же исчисление усваивалось слабо из-за недостатка времени.

Элементы высшей математики включались в программу средней школы и после Октябрьской революции, но отсутствие достаточно подготовленных кадров учителей не позволило получить хороших результатов. В дальнейшем элементы высшей математики были включены в программу по математике для техникумов, и в настоящее время учащиеся техникумов изучают основы аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчисления, а в некоторых случаях и теорию рядов.

Программа по математике для XI класса средней школы предусматривает систематизацию сведений об элементарных функциях, полученных ранее, обобщение этих сведений, обобщение терминологии, принятой в математике при изучении функций (общее понятие функции, символика, возрастание и убывание функций, четные и нечетные функции, периодические функции), и введение новых понятий (числовой последовательности, ее предела, предела функции). Эти понятия позволяют ввести новое для учащихся понятие производной функции, которое имеет важные практические приложения, доступные для учащихся и дающие им новые средства познания окружающей действительности, ее изучения в тех случаях, когда имеет место функциональная зависимость между величинами.

Программа предлагает следующий объем материала, связанного с элементами дифференциального исчисления.

«Скорость прямолинейного движения, понятие о мгновенной скорости. Приращение аргумента и приращение функции, производная. Геометрический смысл производной, касательная к кривой линии.

Производная суммы и произведения двух функций. Производная степени с натуральным показателем. Производная многочлена. Производная степени с любым показателем (без доказательства). Производные синуса и косинуса.

Понятие о второй производной. Ускорение.

Признаки возрастания и убывания функций. Нахождение максимума и минимума с помощью производной.

Построение графиков функций с использованием производной; приложения к графическому решению уравнений.

Формула бинома Ньютона и ее применение к приближенным вычислениям».[1]

На этот материал в XI классе отводится 38 часов. При таком числе часов и объеме материала учащиеся, конечно, не получат навыков дифференцирования, но вполне сознательно могут ознакомиться с новым эффективным методом в математике, изучив приложения производной на примере хотя бы простейших элементарных функций. Тем самым устанавливается преемственность курса математики средней и высшей школы. Большое значение имеет изучение этих вопросов и для более успешного решения средней школой задач политехнического обучения.

Для работы по новой программе учителю требуется методическая помощь. Введение нового, ответственного раздела в программу по математике требует от учителя ясного понимания того круга новых идей и практических приложений, которые впервые будут изучаться учащимися средней школы. Учителю нужны методические указания к изучению основных моментов новой темы с тем, чтобы в дальнейшем он мог самостоятельно планировать и строить систему уроков, учитывая большое общеобразовательное и практическое значение темы. Данная работа и является попыткой оказания такой помощи.

При работе над темой учитель должен будет принять во внимание ее принципиальную важность, обоснование получаемых выводов, различие интересов и будущих профессий учащихся и другие факторы. Относительно небольшое число часов, отводимое на тему, и невозможность совершенно строгого формального обоснования всех выводов приводят к заключению, что главное внимание следует уделять выяснению сущности нового для учащихся метода изучения неравномерно протекающих процессов и ознакомлению их с различными задачами, при решении которых этот метод находит применение. При этом необходимо использовать опыт учащихся, полученные ими знания, их интуицию. Большую роль надо отвести иллюстрации новых

---

[1] «Математика в школе», 1961, № 1.

понятий и выводов. Некоторая нестрогость при таком изложении компенсируется большей ясностью понимания основных идей и приложений. Особо интересующимся математикой учащимся на занятиях кружка может быть дано и более глубокое освещение материала.

Наиболее трудным и важным в теме является введение основных понятий: предела и непрерывности функции в точке, производной. Большое значение здесь будет иметь привлечение геометрической интерпретации, способствующей получению если и не очень строго формальных, то, что главное, правильных представлений. Так, введение понятия предела функции в точке и привлечение графиков известных учащимся функций приводит к мысли, что элементарные функции имеют пределом в точке свое значение в этой точке. Эта гипотеза подтверждается и последующим решением примеров на вычисление. Для такого случая вводится понятие непрерывности функции в точке и из предыдущего учащиеся замечают геометрически наглядный факт непрерывности элементарных функций в области определения. Использование этого факта позволит при отыскании правил дифференцирования проводить только естественные преобразования, без искусственных приемов. Некоторые примеры функций, не имеющих предела в отдельных точках, а также примеры (см. ниже $f(x) = \frac{\sin x}{x}$) с устранимым разрывом помогут выяснить главное в вопросе о непрерывности — наличие предела функции в точке.

В пособии учтен опыт работы автора в вузе и с группой учащихся IX—X классов школ г. Витебска. В работе использованы некоторые идеи проф. А. И. Маркушевича. Для окончательной редакции большое значение имели ценные замечания проф. Ф. Д. Гахова. Автор благодарит также Е. А. Иванова и А. П. Машковского за замечания при просмотре рукописи и других лиц, принимавших участие в подготовке издания.

Примерное распределение времени при изучении производной

1. Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной функции, ее механический и геометрический смысл — 3 часа,

2. Непосредственное отыскание производной, ее применение в различных областях естествознания — 3 часа.

3. Уравнение касательной к кривой линии — 1 час.

4. Вывод правил дифференцирования функций, практика дифференцирования — 8 часов.

5. Понятие о второй производной. Ускорение—1 час.

6. Контрольная работа — 1 час.

7. Формула бинома Ньютона и ее применение к приближенным вычислениям — 3 часа.

8. Применение производной к изучению функций (признаки монотонности, максимума и минимума функции) — 4 часа.

9. Построение графиков функций с использованием производной, приложения к графическому решению уравнений — 8 часов.

10. Решение задач на отыскание наибольшего или наименьшего значения величин — 5 часов.

11. Контрольная работа — 1 час.

Учитель, знающий возможности своего класса, может и более целесообразно распределить время, а также принять и иной порядок изучения отдельных вопросов. Приведенное распределение времени было использовано в работе с учащимися IX—X классов и оправдало себя. При этом имеется в виду, что всюду параллельно с рассмотрением теории, выводом законов, формул решаются примеры и задачи на применение соответствующего правила, что уже позволяет показывать простейшее применение производной.

Повторение сведений о функциях

Программа предусматривает обобщение и систематизацию тех сведений о функциях, которые сообщались учащимся в течение предыдущих лет обучения. Известно, что выпускники средней школы часто не имеют четкого представления о функции, ее графике, способах построения графика функции. Одной из причин этого является то, что все эти сведения, полученные в различных классах, не систематизируются. Этот пробел можно ликвидировать при изучении функции в XI классе, где подводится итог всему изученному ранее.

Используя известные учащимся примеры из физики, механики, химии, нужно еще раз остановиться на выяснении сущности понятий постоянной и переменной величин и понятия функции. Подчеркнув в каждом из приведенных примеров существенные моменты в определении понятия функции (область определения и закон соответствия), необходимо повторить определение функции, которое может быть дано учащимся в следующей форме, согласующейся с научным определением этого понятия.

Если каждому допустимому значению одной величины x по некоторому закону соответствует вполне определенное значение другой величины y, то y называется функцией x.

Одновременно (в связи с примерами) учащиеся повторяют и всю связанную с этим понятием терминологию: *аргумент* или независимое переменное *x*, *область определения* функции (множество допустимых значений *x*), *множество значений* (область значений) функции.[1]

Следует отметить, что идея этого определения принадлежит выдающемуся русскому ученому Н. И. Лобачевскому.[2]

В связи с определением понятия функции следует сообщить учащимся, что математика изучает функции, аргументами которых являются элементы различной природы. В частности, аргументом функции могут быть совокупности чисел. Примеры таких функций нескольких переменных известны учащимся: площади треугольника, параллелограмма, длина гипотенузы, объемы и поверхности цилиндра, пирамиды, конуса как функции нескольких величин, величины из некоторых законов физики и др. В школьном курсе математики подробно изучаются только основные функции одного аргумента, которым является действительное число,

---

[1] Если учащиеся в предыдущих классах овладели понятиями «множество» и «соответствие» достаточно хорошо, то сейчас лучше всего, конечно, дать принятое в современной математике определение понятия функции: «Если каждому элементу x множества A соответствует определенный элемент y множества B, то говорят, что на множестве A определена функция $f(x)$, и пишут: $y = f(x)$».

[2] Приведенное определение не является дословным определением, данным Н. И. Лобачевским. Смысл определения Лобачевского ближе к определению, принятому в современной науке. В связи с этим учителю при возможности следует рассказать учащимся, хотя бы кратко, историю развития понятия функции.

о чем и следует сказать учащимся во избежание превратного толкования понятия.

Если при определении понятия функции в VIII классе не была введена символическая запись, то требуется ее обязательно ввести теперь. При этом следует иметь в виду, что при первом знакомстве с символикой не очень ясна ее необходимость, а потому необходимость и целесообразность ее введения следует аргументировать. Сделать это можно по аналогии с введением букв для обозначения чисел. Так, функции x^2, x^4, $\cos x$ и некоторые другие обладают одним общим свойством: при смене знака аргумента значение функции не изменяется. Если любую из этих функций обозначить через $f(x)$, то запись $f(-x)=f(x)$ есть запись свойства, общего для всех этих функций. Такие функции называются *четными*. Значит, привлечение символа функции позволяет записать это свойство сразу для всего класса четных функций и избавляет от необходимости записывать его в отдельности для каждой такой функции: $\cos(-x)=$ $=\cos x$, $(-x)^2=x^2$ и т. д. Аналогично запись $\varphi(x+2\pi)=$ $=\varphi(x)$ есть запись свойства, общего для всех тригонометрических функций, имеющих общий период 2π. Такой подход приведет к более сознательному использованию учащимися символической записи.

Для сознательного пользования символом функции при его введении обязательно выяснить, что запись $f(a)$ наряду с записью $f(x)$ означает числовое значение функции при значении аргумента, равном a. Например, если $f(x)=x^3+1$, то $f(2)=2^3+1=9$, $f(a)=a^3+1$, $f(k+2)=(k+2)^3+1$.

Сразу следует установить, что если в одной задаче рассматривается несколько функций, то для их обозначения нужно привлекать различные символы, что отвечает различным законам соответствия. Например, если в задаче рассматриваются функции $y=\sin x$, $u=x^2$ и $v=\log_a x$ и введено обозначение $\sin x=f(x)$, то для обозначения зависимости x^2, $\log_a x$ необходимо использовать другую букву: $x^2=u(x)$, $\log_a x=\varphi(x)$. Все это следует четко уяснить, сопровождая введение символа упражнениями.

Повторяя определение функции, обязательно надо остановиться и на различных способах задания функции, предупреждая возможность отождествления функции с формулой, что часто наблюдается. Следует подчеркнуть, что формула, график, таблица — только *формы установления соответствия между аргументом и функцией.* Каждый из этих способов имеет свои достоинства и недостатки, с учетом которых и используется в каждом конкретном случае. Более отчетливому уяснению этого помогут соответственно подобранные примеры. Особое внимание нужно обратить на график функции, которым в дальнейшем придется часто пользоваться при изучении темы.

Обобщая сведения о функциях, при рассмотрении каждой функции следует строить ее график, на котором отражаются свойства функции. С другой стороны, у учащегося должно быть отчетливое представление о том, как график функции говорит о ее свойствах; он должен уметь «читать» график.

Учебным планом не отводится много времени на повторение, и потому его следует тщательно продумать и спланировать, учитывая подготовку данного класса. Формальное повторение страниц учебника вряд ли даст нужный эффект. Необходимо так организовать работу, чтобы по возможности исключить заучивание учащимися записанных в книге истин без отчетливого представления о смысле заученного. Систематизации сведений поможет разбор конкретных примеров, основных элементарных функций ($y = 2x - 1$, $y = \frac{3}{x-2}$, $y = \frac{1}{\ }\,x^2$, $y = 2\sqrt{x} + 1$, $y = x^2 - 2x + 3$, $y = \lg(x - 4)$, $y = \sin 2x$ и т. п.), построение их графиков и рассмотрение свойств на базе повторения учебника. Следует при этом учитывать и то обстоятельство, что в ближайшем будущем учащиеся получат более совершенные средства исследования этих функций.

На основе известных учащимся свойств основных элементарных функций необходимо провести простейшее исследование элементарных функций на нескольких примерах. С одной стороны, такое элементарное исследование имеет большое познавательное значение, способствует устранению формализма в знаниях. С другой стороны, это исследование надо вести так, чтобы учащиеся вспомнили основные понятия: область определения функции, область изменения функции (множество значений), четные и нечетные функции и их графики, периодические функций и их графики, возрастание и убывание функции, максимум и минимум и др. Эти свойства теперь можно уже записать, пользуясь символом функции. Например, определение возрастающей функции примет такой вид.

Определение. *Функция $f(x)$ называется возрастающей на интервале (a, b), если для любых двух значений аргумента из этого интервала большему из них соответствует и большее значение функции, т. е. из $a < x_1 < x_2 < b$ следует $f(x_1) < f(x_2)$.*

Учащимся известно отражение этого свойства на графике. Если ввести теперь нужные в дальнейшем понятия приращения аргумента $\Delta x = x - x_0$ и приращения функции $\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$, то этому определению можно придать следующую, эквивалентную предыдущей, форму.

Определение. Функция $f(x)$ *называется возрастающей на промежутке, если приращения аргумента и функции имеют одинаковые знаки для любой точки этого промежутка* (или *отношение приращения функции к приращению аргумента положительно в любой точке промежутка*).[1]

Эта форма определения тоже легко истолковывается. В самом деле, рассматривая приращения Δx и Δy как отрезки, имеющие направление от начальной к конечной точке, мы видим, что в треугольнике приращений они одновременно направлены в положительном (отрицательном) направлении оси координат, соответствующей каждому отрезку: в положительном для случая $x > x_0$ и в отрицательном при $x < x_0$.

Аналогично с определением убывающей функции. В этой форме определение монотонности функции выгодно будет использовать в дальнейшем.

Исследование функций элементарными средствами целесообразнее вести, отправляясь от известных учащимся функций, свойства которых тем самым будут повторяться и закрепляться. Приведем несколько примеров $\left(\text{см. также ниже исследование } f(x) = \frac{\sin x}{x}\right)$.

[1] Соответствующее предложение можно получить как теорему из предыдущего определения. Но желательно ознакомить учащихся с возможностью различного определения одного и того же понятия, так как этот вопрос тесно связан с важным для логического развития понятием необходимых и достаточных условий.

Пример 1. $f(x) = \frac{1}{x-4}$.

Область определения функции — все действительные числа, кроме числа $4: x \neq 4$. Функция не является ни четной, ни нечетной. Так как функция $f_1(x) = x - 4$ возрастает при всех x, то функция $f(x) = \frac{1}{x-4}$ убывает во всей области определения, ибо ее значения есть числа, обратные по величине значениям $f_1(x)$ при тех же x.

При $x < 4$ $f(x) < 0$, при $x > 4$ $f(x) > 0$.

Когда значение аргумента x — число, близкое к числу 4, $f(x)$ может стать как угодно большим по абсолютной величине (соответствующего знака). Если значение x велико по абсолютной величине, то $f(x)$ как угодно мало по абсолютной величине.

Результаты исследования отражены на графике (рис. 1), для построения которого нужно вычислить

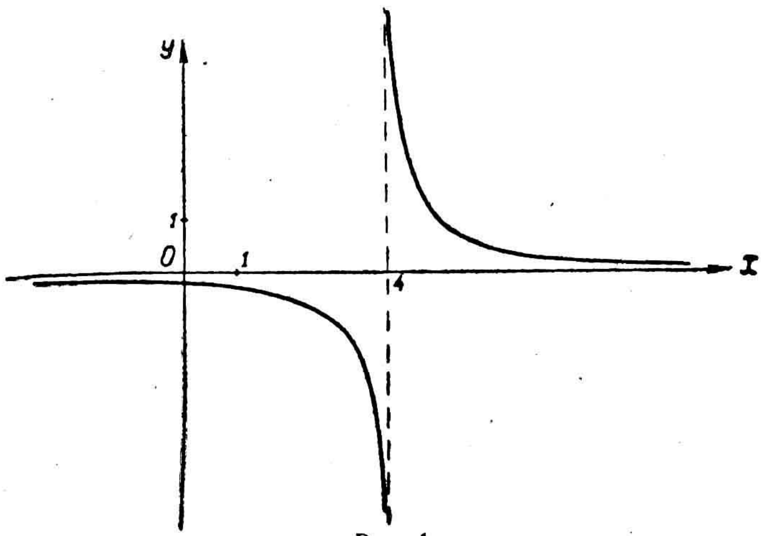

Рис. 1

только значения функции в нескольких точках с целью уточнения хода кривой. Для этой функции точка $x = 4$ является точкой разрыва. Во всех же остальных точках функция является непрерывной, что геометрически выражается сплошным графиком.

Пример 2. $\varphi(x) = \frac{x+2}{x-4}$, $x \neq 4$.

Представив функцию в виде $\varphi(x) = 1 + \frac{6}{x-4}$, можно сразу определить поведение этой функции на основе изучения функции $f(x) = \frac{1}{x-4}$.

Заметим, что изучение функции $f(x)$ из примера 1 (а тем самым и $\varphi(x)$ из примера 2) легко также провести на основании свойств функции $y = \frac{k}{x}$.

Пример 3. $$F(x) = x + \frac{1}{x}.$$

Область определения — все действительные числа, кроме нуля: $x \neq 0$.

$$F(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -F(x),$$

т. е. функция $F(x)$ нечетная. Из нечетности функции следует, что всякой точке (x, y) ее графика будет обязательно соответствовать и точка $(-x, -y)$ на графике, т. е. график $F(x)$ симметричен относительно начала координат. Поэтому достаточно провести исследование функции только при положительных значениях аргумента. Это можно сделать так. При $x > 0$

$$F(x) = x + \frac{1}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2 \geqslant 2,$$

причем равенство возможно только при $x = 1$ (минимум). Всегда $F(x) = x + \frac{1}{x} > x$, т. е. график выше биссектрисы.

Если $1 < x_1 < x_2$,

то $$F(x_2) - F(x_1) = \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) - \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) =$$

$$= (x_2 - x_1)\left(1 - \frac{1}{x_1 x_2}\right) > 0,$$

т. е. $F(x_1) < F(x_2)$.

Следовательно, при $x > 1$ функция $F(x)$ возрастает. Если же $0 < x_1 < x_2 < 1$, то $F(x_2) - F(x_1) < 0$ (что видно из предыдущего представления), т. е. $F(x)$ убывает. Установив поведение функции в окрестности точки $x = 0$, при неограниченном возрастании x, можно изобразить график функции, уточнив его поведение вычислением значений функции в нескольких точках (рис. 2).

График $F(x)$ при $x<0$ получается из симметрии относительно начала координат с построенной частью. А из построенного при $x<0$ графика можно видеть поведение этой функции при $x<0$: промежутки возрастания и убывания, максимум при $x = -1$ и др. Точка $x = 0$ называется точкой разрыва.

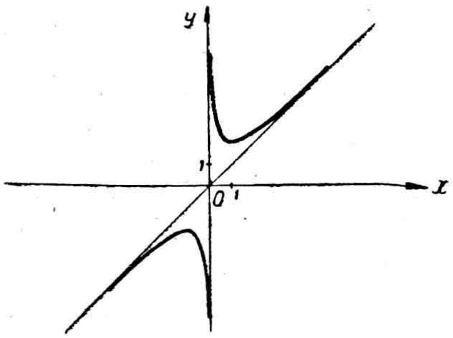

Рис. 2

Таким же путем можно провести исследование и построить графики функций

$$y = \sin 2x, \quad y = 3^{-x},$$

$$y = |x|, \; y = \lg \frac{1}{x+2}$$

и т. п.

Предел функции

Понятие о пределе функции целесообразно ввести на основе уже изученного ранее учащимися понятия о пределе числовой последовательности. Вспомнив это понятие, следует рассмотреть несколько примеров функций с целью вычисления их пределов в заданной точке. Например,

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad x \neq -1.$$

Возьмем какую-нибудь последовательность значений аргумента

$$x_1, \; x_2, \; x_3, \ldots, \; x_n, \ldots$$

при условии, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2.$

Соответственно этому получим последовательность значений функции

$$f(x_1), \; f(x_2), \; f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots:$$

$$\frac{1}{x_1+1}, \; \frac{1}{x_2+1}, \; \frac{1}{x_3+1}, \ldots, \frac{1}{x_n+1}, \ldots$$

На основании теорем о пределах заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n+1} = \lim_{x_n\to 2} \frac{1}{x_n+1} = \frac{1}{3},$$

причем это верно для любой последовательности x_n, лишь бы x_n имела пределом 2. В этом случае говорят, что функция $f(x) = \frac{1}{x+1}$ имеет пределом число $\frac{1}{3}$ при x, стремящемся к 2, или в точке $x = 2$. Рассмотрев несколько таких примеров, даем определение понятия предела функции в точке.

Определение. *Если для любой последовательности значений аргумента*

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots,\ x_n, \ldots, \text{ где } x_n \neq a,$$

имеющей своим пределом число a, соответствующая последовательность значений функции сходится всегда к одному и тому же числу A, то говорят, что функция $f(x)$ имеет своим пределом число A при x, стремящемся к a, или в точке $x = a$, и записывают

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Такое определение, использующее уже знакомое понятие, облегчает восприятие нового. Определение нетрудно иллюстрировать, изображая на осях координат точки, соответствующие (по графику) последовательностям значений аргумента и функции. Это приводит к выводу об одинаковом смысле термина «предел» для изученных переменных: в процессе изменения разность между переменной и ее пределом становится сколь угодно малой:

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ или } |f(x) - A| < \varepsilon\ (\varepsilon > 0 \text{ — любое}).$$

Предшествующие определению примеры и само определение позволяют $\left(\text{см. выше } \lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x+1}\right)$ сделать заключение о способах вычисления предела функции в точке: имеют место теоремы об арифметических операциях над сходящимися последовательностями в аналогичной формулировке. Применение этих теорем при рассмотрении примеров (непрерывных) функций типа

$$\lim_{x \to \frac{1}{3}} (2x + 1) = \frac{5}{3}; \quad \lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 1}{2x - 4} = -\frac{1}{3} \text{ и т. п. дает}$$

следующее практическое правило: вместо x в выражение функции подставляется его предел и вычисляется значение функции в этой точке.

После этого следует вновь вернуться к определению для лучшего выяснения смысла утверждения «существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$». Как мы видели, обычно число A является значением функции при $x = a$: $A = f(a)$. В этом случае функцию называют непрерывной в точке a (при $x = a$). Такой термин оправдывается геометрическим смыслом, ибо это означает, что при движении по графику функции к точке с абсциссой a мы приходим к точке графика $(a, f(a))$. Следовательно, на графике при $x = a$ нет «просвета», «отверстия», разрыва. Если все точки области определения такие же, то график должен быть сплошным, непрерывным, что и наблюдалось для изученных функций. Этим заключением о непрерывности элементарных функций в их области определения мы в дальнейшем и пользуемся.

Для лучшего понимания нужно рассмотреть и другой вариант: существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, но функция не определена при $x = a$. Геометрически в таком случае на графике будет «просвет», «пробел». Возможность этого выясняется на примерах типа:

$$\lim_{x\to -4}\frac{x^2-16}{x+4}=\lim_{x\to -4}(x-4)=-8;\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{2}$$ и т. п. Нетрудно видеть, что в таком случае целесообразно положить $f(a)=A$, что делает функцию непрерывной. Аналогичен случай $f(a)\neq A$.

Из рассмотренного следует, что наличие предела функции в точке означает либо ее непрерывность в этой точке, либо возможность сделать ее непрерывной, что имеет большое значение в дальнейшем. В самом деле, при изучении производной мы имеем дело с функцией $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ переменного Δx, представляющей отношение бесконечно малых, а потому не определенной при $\Delta x = 0$. Говоря о производной функции в точке, мы как раз и определяем ее предельным значением при $\Delta x\to 0$.

Все эти рассуждения не должны, однако, создать ложного представления о непрерывности функций. Нужно привести и примеры функций, не имеющих предела