

# **Bifurcations of Planar Vector Fields**

015/24 55 9261562

B591  
1989

01-5  
D622  
V.1455

# Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold, B. Eckmann and F. Takens

1455

J.-P. Francoise R. Roussarie (Eds.)



## Bifurcations of Planar Vector Fields

Proceedings of a Meeting held in Luminy, France,  
Sept. 18-22, 1989



E9261562



**Springer-Verlag**

Berlin Heidelberg New York London

Paris Tokyo Hong Kong Barcelona

**Editors**

Jean-Pierre Francoise  
Université de Paris VI  
U.F.R. 920, Mathématiques  
45-46, 5ème étage  
4 Place Jussieu  
75252 Paris, France

Robert Roussarie  
Université de Bourgogne  
Laboratoire de Topologie  
U.F.R. Sciences et Techniques  
Bât. Mirande, BP 138  
21004 Dijon, France

Mathematics Subject Classification (1980): 34CXX, 58F14, 32C05

ISBN 3-540-53509-8 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York  
ISBN 0-387-53509-8 Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically the rights of translation, reprinting, re-use of illustrations, recitation, broadcasting, reproduction on microfilms or in other ways, and storage in data banks. Duplication of this publication or parts thereof is only permitted under the provisions of the German Copyright Law of September 9, 1965, in its current version, and a copyright fee must always be paid. Violations fall under the prosecution act of the German Copyright Law.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1990  
Printed in Germany

Printing and binding: Druckhaus Beltz, Hemsbach/Bergstr.  
2146/3140-543210 - Printed on acid-free paper

## PREFACE

The meeting held in Luminy in September 18-22, 1988 brought together most of the world's specialists in bifurcations of vector fields of the plane. The main subjects of the theory were discussed, including:

- Finiteness of the number of limit cycles of ordinary differential equations in the plane. The problem of Dulac is that of determining whether polynomial vector fields have a finite number of limit cycles. One solution is presented in this volume in the framework of new and much farther-reaching methods for the study of differential equations, such as accelerosummation.
- Multiplicity of polycycles. Their definition seems to be a first step towards the solution of Hilbert's 16th problem produced to prove the existence of a uniform bound, dependent only on degree, for the number of limit cycles.
- Zeroes of abelian integrals. This is a topic which links up directly to real algebraic geometry. It intervenes in an infinitesimal version of Hilbert's 16th problem, and also in the question of enumeration of critical points of the period for which is important in the study of bifurcations.
- Numerical simulation and symbolic computation on computer in the study of differential equations.
- The work (in particular of Chinese groups of researchers) on quadratic equations, that pick up again classical methods of bifurcation theory such as the method of rotations.
- Modelling of predator-prey ecological systems. The subject is in widespread use in biomathematics to describe biological cycles.
- The use of methods of non-standard analysis in the study of bifurcation with delay.

The articles in this volume will initiate the reader quickly to the most recent result in this field at the interface of fundamental mathematics and of its applications, currently in full development.

We enjoyed the support of the Centre National de la Recherche Scientifique, of the Ministère des Affaires Etrangères (Direction Générale des relations culturelles, scientifiques et techniques), of the Société Mathématique de France through the intermediary of the Centre International de Rencontre Mathématiques at Luminy, of the Union des Assurances de Paris and of the Université de Bourgogne.

We are grateful to Miss Courtial and Mrs. Gadenne for their assistance in the preparation of the manuscripts.

We thank Springer-Verlag for the care and competence shown in the publication of these proceedings.

## LISTE DES ARTICLES

<b>B. Candelpergher, F. Diener, M. Diener</b>	
- Retard à la bifurcation ; du local au global. . . . .	1
<b>C. Chicone</b>	
- On bifurcation of limit cycles from centers. . . . .	20
<b>F. Dumortier, R. Roussarie</b>	
- On the saddle loop bifurcation. . . . .	44
<b>J. Ecalle</b>	
- Finitude des cycles limites et accéléro-sommation de l'application de retour. . . . .	74
<b>L. Gavrilov, E. Horozov</b>	
- Limit cycles and zeros of abelian integrals satisfying third order Picard-Fuchs equations. . . . .	160
<b>A. Gasull, J. Sotomayor</b>	
- On the basin of attraction of dissipative planar vector fields. . . . .	187
<b>G. Gutierrez, J. Sotomayor</b>	
- Periodic lines of curvature bifurcating from Darbouxian umbilical connections. . . . .	196
<b>N.G. Lloyd, J.M. Pearson</b>	
- Conditions for a centre and the bifurcation of limit cycles in a class of cubic systems. . . . .	230
<b>J. Moulin Ollagnier, J.M. Strelcyn</b>	
- On first integrals of linear systems, Frobenius integrability theorem and linear representations of lie algebras. . . . .	243
<b>A. Mourtada</b>	
- Cyclicité finie des polycycles hyperboliques des champs de vecteurs du plan : mise sous forme normale. . . . .	272

<b>L.M. Perko</b>	
- Bifurcation of limit cycles. . . . .	315
<b>C. Rousseau</b>	
- Universal unfolding of a singularity of a symmetric vector field with 7-jet $C^\infty$ equivalent to $y \frac{\partial}{\partial x} + (\pm x^3 \pm x^6 y) \frac{\partial}{\partial y}$ . . . . .	334
<b>F. Rothe, D.S. Shafer</b>	
- Bifurcation in a quartic polynomial system arising in Biology. . . . .	356
<b>Shi Songling</b>	
- On the finiteness of certain boundary cycles for $n^{\text{th}}$ degree polynomial vector fields. . . . .	369
<b>D. Schlomiuk</b>	
- Algebraic integrals of quadratic systems with a weak focus. . . . .	373
<b>Ye Yanquian</b>	
- Rotated vector fields decomposition method and its applications. . . . .	385
<b>H. Zoladek</b>	
- Remarks on the delay of the loss of stability of systems with changing parameter. . . . .	393

# Retard à la bifurcation : du local au global

Bernard Candelpergher

Laboratoire de Mathématiques  
Parc Valrose  
06034 Nice Cedex

Francine Diener

Laboratoire de Mathématiques  
Parc Valrose  
06034 Nice Cedex

Marc Diener

U.F.R. de Mathématiques  
Université Paris 7  
75251 Paris Cedex 05

C'est Claude Lobry qui, lors d'un colloque en 1985 [8] avait attiré notre attention sur le phénomène de "retard à la bifurcation" par des expérimentations numériques où il devinait une intervention des canards. Nous abordons ici cette question sur une équation modèle due à G. Wallet, où le lien avec la question de sommation de séries divergentes apparaît de manière remarquablement élémentaire, et à travers laquelle se profile la confirmation d'une très ancienne conjecture de J-P. Ramis sur le caractère Gevrey des séries intervenant dans diverses études de canards. Nous remercions vivement F. Pham et J. Ecalle pour nous avoir patiemment aidés à découvrir et appliquer les méthodes de sommation.

## 1 Etude numérique du retard à la bifurcation

Considérons l'exemple de G. Wallet :

$$\begin{cases} \mu' &= \varepsilon \\ u_1' &= \mu u_1 - u_2 + \varepsilon \\ u_2' &= u_1 + \mu u_2 \end{cases} \quad (1)$$

pour  $\varepsilon = 0.05$ . Le terme de "retard à la bifurcation" est dû à l'écart entre le comportement des trajectoires d'un système tel que (1) et le raisonnement (heuristique et inapproprié) suivant :

Comme  $\varepsilon$  est petit, on étudie le système (1) pour  $\varepsilon = 0$ . Dans ce cas  $\mu = Cste$  est un simple paramètre, et le système satisfait par  $u = (u_1, u_2)$  présente un unique point stationnaire :  $(0, 0)$ . Ce point stationnaire est un foyer stable pour  $\mu < 0$  et instable pour  $\mu > 0$ . On peut penser que, si l'on choisit  $\varepsilon = 0.05$ , et une condition "initiale"  $(\mu_-, u_-)$  telle  $\mu_- = -1.3$ , et  $\|u_-\| = 1$  (Fig. 1),  $\mu$  va croître lentement avec la variable indépendante, disons  $t$  ( $' = d/dt$ ),  $u$  va s'enrouler rapidement vers le



Figure 1: Trajectoires issues de points tels que  $\|u\| = 1$ , pour  $\mu = -1.3$  et divers angles (à gauche), ou divers  $\mu \leq -1.3$  (à droite). On observera la sortie en  $\mu \approx +1$  (c'est le retard), commune à toutes ces trajectoire (c'est la butée).

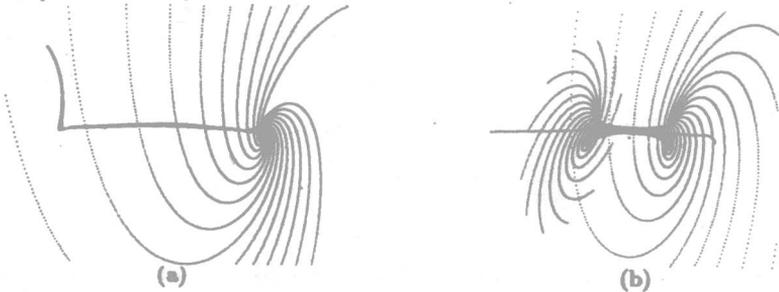


Figure 2: (a) Superposition de trajectoires d'un même point pour diverses valeurs petites de  $\epsilon > 0$  : les comportements différent appréciablement lors de la déstabilisation, qui a toutefois toujours lieu pour  $\mu \approx +1$ . (b) La relation entrée-sortie  $\mu_+ = -\mu_-$  pour  $|\mu_{\pm}| \ll 1$ .

“point stationnaire”  $\left(-\frac{\mu\epsilon}{1+\mu^2}, \frac{\epsilon}{1+\mu^2}\right) \approx (0,0)$ , tant que  $\mu < 0$ , puis se dérouler dès que  $\mu$  franchira la valeur de bifurcation  $\mu = 0$ .

C'est cette dernière affirmation, en italiques, qui est démentie par l'expérience (et la théorie). L'erreur du raisonnement heuristique réside dans le fait que pour obtenir une portion de trajectoire correspondant à une variation appréciable de  $\mu$ , il convient de faire parcourir à la variable  $t$  un intervalle de l'ordre de  $1/\epsilon$  : pour le problème envisagé, le système (1) est une fausse perturbation régulière du cas  $\epsilon = 0$  : on constate en effet un retard dans la déstabilisation de la solution, qui ne quitte l'équilibre instable que pour  $\mu$  voisin de  $+1$  (Fig. 1).

Outre ce retard à la bifurcation, nous observons un second phénomène, nouveau à notre connaissance : toutes les trajectoires calculées se déstabilisent ensemble : bien qu'issues de points bien distincts, elles quittent l'équilibre pour une même valeur de  $\mu$  et sous un même angle. C'est ce retard maximal, ou butée, que nous souhaitons également expliquer, d'autant que la valeur  $\mu \approx +1$  est insensible au choix de  $\epsilon > 0$  petit. Observons toutefois que l'“angle de sortie” est, lui, sensible au choix de  $\epsilon > 0$  petit (Fig. 2.a).

Nous n'avons envisagé jusqu'ici que le cas de trajectoires telles que  $\mu_- \ll -1$ . Pour  $-1 \ll \mu_- \ll 0$ , on observe également un retard, mais celui-ci est modulé par la valeur de  $\mu_-$  : il y a déstabilisation pour  $\mu_+ \approx -\mu_-$  (Fig. 2.b), et donc existence d'une fonction entrée-sortie : ceci sera facile à analyser en termes de canards dans le prochain



Figure 3: Trajectoires des deux cercles  $\mu_{\pm} = \pm 1.3, \|u_{\pm}\| = 1$  ; à gauche le tracé "exact", à droite un schéma topologique.

paragraphe. Sur la figure 3 ont été représentées des trajectoires de points  $(\mu_+, u_+)$  avec  $\mu_+ = +1.3$  et toujours  $\|u_+\| = 1$  : on trouve une symétrie prévisible. On a également représenté schématiquement les "cylindres", réunion des trajectoires des deux cercles  $\mu_{\pm} = \pm 1.3, \|u_{\pm}\| = 1$  : ils constituent deux "trompettes" enlacées ; ce schéma permet de comprendre qu'il n'y a aucune obstruction  $C^\infty$  pour que la torsade centrale soit de longueur infiniment petite, ce qui suggère le caractère analytique du phénomène de retard, que nous allons étudier maintenant sur un plan plus théorique.

## 2 Relation avec les canards

Posons dorénavant  $x := \mu$  et supposons  $\varepsilon > 0$  infinitésimal. Réécrivons le système (1), après changement de temps  $t \mapsto \tau = \varepsilon t$ , en

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \varepsilon \dot{u}_1 = x u_1 - u_2 + \varepsilon \\ \varepsilon \dot{u}_2 = u_1 + x u_2 \end{cases} \quad (2)$$

où  $\dot{\phantom{x}} = d/d\tau$ . C'est un champ lent-rapide de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$  [5] du type

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \varepsilon \dot{u} = f(x, u) \end{cases} \quad (3)$$

dont les images des solutions sont des graphes de solutions de l'équation

$$\varepsilon \frac{du}{dx} = f(x, u) \quad (4)$$

où  $u = u_1 + i u_2$ , et où  $f$  est supposée  $C^1$  (donc analytique en  $u$ ), et  $S^1$  en  $u$  (i.e.  $f'_u$  est  $S$ -continue). La courbe  $\mathcal{L}$  de  $\mathbb{R}_x \times \mathbb{C}_u$  d'équation  ${}^o f(x, u) = 0$  est appelée la *courbe lente* de (3) ou (4). Dans l'exemple (2) il s'agit de la droite  $u = 0$ . Un point standard  $(x_0, u_0)$  de  $\mathcal{L}$  est dit *attractif* si la partie réelle de  ${}^o f'_u(x_0, u_0)$  est strictement négative, et *répulsif* si cette même partie réelle est strictement positive. Dans l'exemple (2) les points de la courbe lente tels que  $x < 0$  sont attractifs, et ceux tels que  $x > 0$  sont répulsifs. On dit qu'une solution  $x \mapsto \bar{u}(x)$  de (4) est *lente* sur l'intervalle  $I = ]x_-, x_+[$  si, pour tout  $x \in I$ ,  $f(x, \bar{u}(x)) \simeq 0$ , c'est-à-dire si elle reste infiniment voisine de  $\mathcal{L}$  sur

cet intervalle. Enfin on dit que  $\bar{u}$  est un *canard* sur  $I$  [2,14], si  $\bar{u}$  est lente sur  $I$ , et s'il existe un  $x_0$  standard,  $x_- \ll x_0 \ll x_+$  tel que  ${}^0\bar{u}(x)$  est attractif pour tout  $x \ll x_0$  et répulsif pour tout  $x \gg x_0$  ( $x \in I$ ). Si  $u_0 = {}^0\bar{u}(x_0)$ , on dit encore que  $\bar{u}$  est un canard au point  $(x_0, u_0)$ .

Le phénomène de retard à la bifurcation correspond donc précisément à l'existence de canards. Or cette existence pour des systèmes lents-rapides tels que (3) n'est pas élémentaire. Etablie sur un exemple par Shishkova [12], elle a été prouvée par Neishtadt [9,10], comme nous l'indiquons ci-dessous. Nous y reviendrons au prochain paragraphe. Notons que même pour le cas du système (2), où, en posant toujours  $u = u_1 + iu_2$ , les (images des) trajectoires satisfont à l'équation

$$\varepsilon \frac{du}{dx} = (x+i)u + \varepsilon \quad (5)$$

et ont donc pour expression

$$u(x) = e^{\frac{(x+i)^2}{2\varepsilon}} \left( K + \int_0^x e^{-\frac{(t+i)^2}{2\varepsilon}} dt \right), \quad K \in \mathbb{C}$$

il n'est guère plus simple de déduire l'existence de canards de cette quadrature que d'utiliser la sommation des séries divergentes que nous proposons ci-dessous.

Un point des théories existentes des canards s'adapte toutefois ici sans difficultés : c'est le calcul de la *fonction entrée-sortie* [1]. Comme pour toute solution lente, on peut [5] associer à chaque canard de (4) un *point (standard) d'entrée dans le halo* de la courbe lente, et un *point de sortie du halo*, caractérisés, dans le cas du système (2), par leur abscisse  $x_-$  et  $x_+$  (éventuellement égales à  $\pm\infty$ ). Voici comment sont reliées  $x_-$  et  $x_+$  (pour le système (2) on aura  $x_- = -x_+$ ) :

### Proposition 2.1 (Fonction entrée-sortie)

On suppose que le système (2) possède un canard dont l'image est le graphe d'une fonction  $x \mapsto \bar{u}(x)$  définie pour tout  $x \in ]a, b[$ ,  $a$  et  $b$  standard. Soient  $x_-, x_+ \in ]a, b[$  standard tels que

$$\int_{x_-}^{x_+} {}^0f'_u(x, {}^0\bar{u}) dx = 0.$$

Alors toute solution de (4) qui atteint le halo de  $\mathcal{L}$  au point d'abscisse  $x_-$  en ressort au point d'abscisse  $x_+$ .

**Preuve :** Pour  $r = |u|$ , considérer la loupe de Benoit  $R = \varepsilon \log r$ . □

*Application à l'exemple (1) :* Ici  ${}^0f'_u(x, {}^0\bar{u}) = (x+i)$  : la fonction entrée-sortie est une simple symétrie autour de l'origine des abscisses.

**Notation :** Soit  $\varepsilon \neq 0$  infinitésimal. On dira que  $\mu \in \mathbb{C}$  est un  $\varepsilon$ -exponentiellement petit, s'il existe  $h \in \mathbb{C}$  de partie réelle positive non infinitésimale tel que  $\mu = e^{-\frac{h}{\varepsilon}}$  ou si  $\mu = 0$ . On notera  $\mathcal{M}_\varepsilon$  ou simplement  $\mathcal{M}$  l'ensemble (externe) des  $\varepsilon$ -exponentiellement petits.

**Proposition 2.2 (Stabilité des canards par microperturbation)**

Soient  $f \in C^1$  et  $S^1$  en  $u$ , et  $l$  deux fonctions localement lipschitziennes. Supposons que l'équation  $\varepsilon \frac{du}{dx} = f(x, u)$  admette un canard  $x \mapsto \bar{u}(x)$  au point  $(x_0, u_0)$  et que pour tout  $(x, u)$  infiniment proche du canard on ait  $|l(x, u)| \in \mathcal{M}_\varepsilon$ . Alors l'équation suivante admet un canard au point  $(x_0, u_0)$ .

$$\varepsilon \frac{du}{dx} = f(x, u) + l(x, u).$$

**Preuve :** Considérons, pour  $(x, u)$  tel que  $0 < |u - \bar{u}(x)| < 1$ , le revêtement défini par

$$(x, U) = (x, \varepsilon \log(u - \bar{u}(x)))$$

à valeurs sur  $\operatorname{Re} U < 0$ . L'équation  $\varepsilon du/dx = f(x, u)$  devient

$$\frac{dU}{dx} = \frac{f(x, u) - f(x, \bar{u}(x))}{u - \bar{u}(x)} + \frac{l(x, u)}{u - \bar{u}(x)}$$

Or, pour  $\operatorname{Re} U < 0$  appréciable, on a  $u = \bar{u}(x) + e^{U/\varepsilon} \simeq \bar{u}(x)$ , et donc, comme  $f'_u(x, u) \neq 0$ ,  $f(x, u) - f(x, \bar{u}(x)) = f'_u(x, \bar{u}(x))[u - \bar{u}(x)](1 + \phi)$ , avec  $\phi \simeq 0$ .

D'autre part, par le principe de Fehrele [6], il existe  $k$  réel positif non infiniment petit tel que  $|l(x, u)| < e^{-\frac{k}{\varepsilon}}$  pour tout  $(x, u)$  infiniment voisin du graphe du canard. Donc, toujours pour  $\operatorname{Re} U < 0$ ,

$$\left| \frac{l(x, u)}{u - \bar{u}(x)} \right| = \left| \frac{l(x, u)}{e^{U/\varepsilon}} \right| \leq e^{-\frac{\operatorname{Re} U + k}{\varepsilon}}.$$

Donc, pour  $-k \ll \operatorname{Re} U \ll 0$ ,  $\frac{l(x, u)}{u - \bar{u}(x)} \simeq 0$  et finalement

$$\frac{dU}{dx} \simeq f'_u(x, \bar{u}(x))$$

d'où  $U(x) \simeq U_0 + \int_{x_0}^x f'_u(\xi, \bar{u}(\xi)) d\xi$  tant que cette expression garde sa partie réelle comprise entre  $-k$  et  $0$ , et non infiniment voisine de ces valeurs, ce qui est assuré sur tout un voisinage standard  $[x_-, x_+]$  de  $x_0$  pourvu que l'on choisisse  $U_0$  satisfaisant à ces conditions. En revenant à l'échelle  $(x, u)$  initiale, on voit que la solution issue de  $u(x_0) := \bar{u}(x_0) + e^{\frac{U_0}{\varepsilon}}$  est, sur  $[x_-, x_+]$ , le canard cherché.  $\square$

**Remarque :** On notera que l'équation  $\varepsilon \frac{du}{dx} = (x+i)u + \varepsilon$  n'est pas une microperturbation (au sens de la proposition (2.2)) de l'équation linéaire  $\varepsilon \frac{du}{dx} = (x+i)u$  qui, elle, possède bien un canard évident. La proposition (2.2) ne peut donc pas lui être appliquée. Cependant, le changement d'inconnue  $\varepsilon u = u_1 - \frac{\varepsilon}{x+i}$  transforme cette équation en

$$\varepsilon \frac{du_1}{dx} = (x+i)u_1 - \frac{\varepsilon^2}{(x+i)^2}$$

dont le terme perturbatif  $-\frac{\varepsilon^2}{(x+i)^2}$  n'est plus d'ordre  $\varepsilon$ , mais  $\varepsilon^2$ . Un nouveau changement d'inconnue  $\varepsilon u_1 = u_2 + \varepsilon^2/(x+i)^2$  permettrait de diminuer encore l'ordre de grandeur du

terme perturbatif. On comprend qu'il est ainsi facile de construire une suite  $(u_n)$  de changements de variables de telle sorte que l'équation obtenue après  $N$  changements d'inconnue soit une microperturbation de l'équation à canard évident  $\varepsilon \frac{du}{dx} = (x+i)u$ . Bien entendu,  $N$  sera infiniment grand :  $N = \frac{1}{\varepsilon}$  par exemple convient. C'est à partir de cette remarque facile à comprendre que Neishtadt est parvenu à montrer l'existence de canards et expliquer le retard à la bifurcation.

J. Martinet a attiré notre attention sur le fait qu'un point de vue Gevrey sur la question permet d'obtenir cette existence des canards de manière très naturelle. C'est l'objet du prochain paragraphe.

### 3 Le point de vue Gevrey

La difficulté dans la preuve du théorème de Neishtadt réside dans le fait que, très généralement, la suite des changements d'inconnue mentionnée conduit à une série divergente, et sa preuve a consisté à maîtriser par des majorations la somme des  $\frac{1}{\varepsilon}$  premiers termes de cette série. Le fait que cela soit possible peut se comprendre, dans le cas analytique, par les propriétés du développement des solutions lentes au voisinage d'un point  $(x_0, u_0)$  où  ${}^q(f'_u)(x_0, u_0)$  est inversible : un tel développement est en effet Gevrey (d'ordre 1). Il est donc naturel d'appliquer des méthodes de sommation qui sont bien adaptées à une telle situation et d'obtenir une preuve par aveu spontané ...

**Theorème 3.1** Soit  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(x, u, \varepsilon) \mapsto F(x, u, \varepsilon)$ , une fonction standard, analytique au voisinage d'un point standard  $(x_0, u_0, 0)$  tel que  $F(x_0, u_0, 0) = 0$ . On considère la situation où la partie réelle de  $F'_u(x_0, u_0, 0)$  est du signe de  $x - x_0$ , et on suppose que la partie imaginaire  $\omega(x_0)$  de  $F'_u(x_0, u_0, 0)$  est non nulle. Soit  $\varepsilon > 0$  infinitésimal, et posons  $f(x, u) := F(x, u, \varepsilon)$ . Il existe  $R \gg 0$  et une solution  $\bar{u}$  de

$$\varepsilon \frac{du}{dx} = f(x, u) \quad (6)$$

définie pour tout  $|x - x_0| < R$ , telle que  $\bar{u}(x_0) \simeq u_0$  et  $f(x, \bar{u}(x)) \simeq 0$  pour tout  $|x - x_0| < R$ .

Rappelons qu'un développement  $\hat{u} = \sum_{p \geq 0} \hat{u}_p \varepsilon^{p+1}$ , où les  $\hat{u}_p$  appartiennent à une algèbre normée (ici les fonctions analytiques définies sur un voisinage de  $x_0$  munies de la norme uniforme), est dit *Gevrey d'ordre  $k$*  (ici  $k = 1$ ) si et seulement s'il existe des réels  $C$  et  $M$  tels que pour tout  $p \geq 0$  on ait  $|\hat{u}_p| \leq CM^p (p!)^k$  [11]. Une fonction  $\tilde{u}(x, \varepsilon)$  définie pour  $x \in I = ]x_-, x_+[$  pour  $\varepsilon$  dans un secteur de sommet 0 (et, ici, contenant le demi-axe réel positif) est appelée une *solution-Gevrey* de  $\varepsilon \frac{du}{dx} = F(x, u, \varepsilon)$  si  $\tilde{\mu}(x, \varepsilon) := \varepsilon \frac{d\tilde{u}(x, \varepsilon)}{dx} - F(x, \tilde{u}(x, \varepsilon), \varepsilon)$  est *exponentiellement petite*, c'est-à-dire que pour elle et chacune de ses dérivées  $\tilde{\mu}^{(n)}$  par rapport à  $x$ , il existe des constantes  $h > 0$  et  $K$  telles que  $\tilde{\mu}^{(n)}(x, \varepsilon) \leq K e^{-h/\varepsilon}$ . Supposons  $F$  standard et soit  $\varepsilon > 0$  infiniment petit. Posons  $\hat{u}(x) = \tilde{u}(x, \varepsilon)$ . On dira que la fonction  $\hat{u}$  est un *canard-Gevrey* au point standard

$(x_0, u_0)$ ,  $x_- \ll x_0 \ll x_+$  et  $\tilde{u}(x_0) \simeq u_0$ , si, de plus, la partie réelle de  $F'_u(x, u_0, 0)$  est du signe de  $x - x_0$  et  $f(x, \tilde{u}(x)) \simeq 0$ .

**Preuve :** Quitte à procéder au changement d'inconnue  $v = u - \hat{u}_{-1}$  où  $\hat{u}_{-1}$  est la fonction implicite locale définie par  $F(x, \hat{u}_{-1}(x), 0) = 0$  telle que  $\hat{u}_{-1}(x_0) = u_0$ , on peut supposer que  $F(x, u_0, 0) = 0$  pour tout  $x$  dans un voisinage de  $x_0$ , puisque  $F'_u(x_0, u_0, 0)$  est inversible ( $\omega(x_0) \neq 0$ ). Cette même hypothèse de régularité de  $F$  permet d'appliquer un théorème de Y. Sibuya [13] assurant que l'équation (6)  $\varepsilon \frac{du}{dx} = F(x, u, \varepsilon)$  admet une solution formelle  $\hat{u} = \sum_{p \geq 1} \hat{u}_p \varepsilon^p$ , où les  $\hat{u}_p$  sont des fonctions analytiques définies sur un même voisinage compact de  $x_0$ , et que cette solution formelle est Gevrey d'ordre 1.

On en déduit dès lors une solution-Gevrey  $\tilde{u}(x)$  admettant  $\hat{u}$  pour développement asymptotique, au moyen d'une sommation de Borel-Laplace-tronquée. Rappelons brièvement comment :

La transformation de Borel  $\mathcal{B}$  convertit la série formelle  $\hat{u}$  en la série

$$\tilde{u} = \mathcal{B} \left( \sum_{p \geq 0} \hat{u}_p \varepsilon^{p+1} \right) := \sum_{p \geq 0} \hat{u}_p \frac{\lambda^p}{p!},$$

qui, du fait que  $\hat{u}$  est Gevrey d'ordre 1, est une série convergente et définit donc une fonction  $u$  sur un voisinage de  $x_0$  indépendant du choix de  $\varepsilon$  voisin de 0. Il est dès lors possible d'appliquer à  $u$  une transformation de Laplace-tronquée, c'est-à-dire étendue à un chemin d'intégration  $\Gamma$  (indépendant du choix de  $\varepsilon$ ) joignant  $\lambda = 0$  à un point non nul  $\lambda_0$  dans le domaine de  $u$ .

La transformation de Borel est un homomorphisme de l'algèbre des séries Gevrey d'ordre 1 (munie du produit formel des séries) dans l'algèbre des séries convergentes (munie du produit de convolution), et cet homomorphisme commute avec la dérivation par rapport au "paramètre"  $x$  :  $\mathcal{B} \left( \frac{d\hat{u}}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \mathcal{B}(\hat{u})$  (puisque, par les formules de Cauchy, la dérivée en  $x$  d'une série Gevrey (en puissances de  $\varepsilon$  à coefficients analytiques) est encore Gevrey). La transformation de Laplace  $\mathcal{L}$  ayant les mêmes propriétés (du produit de convolution vers le produit ordinaire cette fois), on est assuré que  $\bar{u} := \mathcal{L} \circ \mathcal{B}(\hat{u})$  satisfait aux mêmes équations algèbro-différentielles que  $\hat{u}$ , et, par densité, les mêmes équations analytico-différentielles. Toutefois, faute de pouvoir choisir  $\lambda_0 = \infty$ , la transformation de Laplace-tronquée n'est un homomorphisme qu'à exponentiellement petit près, et donc, si  $\varepsilon \frac{d\hat{u}}{dx} - F(x, \hat{u}, \varepsilon) = 0$ , on n'aura pour  $\bar{u} := \mathcal{L}_\Gamma \circ \mathcal{B}(\hat{u})$  que  $\varepsilon \frac{d\bar{u}}{dx} - F(x, \bar{u}(x), \varepsilon) =: \bar{\mu}(x, \varepsilon)$  où  $\bar{\mu}$  est une fonction exponentiellement petite. Par transfert, on peut supposer que  $\bar{u}$  et  $\bar{\mu}$  sont standard et donc, si  $\varepsilon > 0$  est infinitésimal,  $\bar{\mu}(x, \varepsilon) \in \mathcal{M}_\varepsilon$ . La fin de la preuve est alors la conséquence du corollaire suivant de la proposition (2.2).

**Corollaire 3.1** Soit  $\varepsilon > 0$  infinitésimal ; posons  $f(x, u) := F(x, u, \varepsilon)$ . Si l'équation  $\varepsilon \frac{du}{dx} = f(x, u)$  admet un canard-Gevrey au point  $(x_0, u_0)$ , alors elle admet également un canard en ce point.

**Preuve :** Soit  $\bar{u}$  le canard-Gevrey défini sur un voisinage standard  $]x_-, x_+[$  de  $x_0$  ; posons  $(x, v) = (x, u - \bar{u}(x))$ . Par hypothèse  $\varepsilon \frac{dv}{dx} = f(x, \bar{u}(x)) + \mu(x)$ , où  $\mu(x)$  est une

fonction exponentiellement petite sur  $]x_-, x_+[$ , et il existe donc des constantes  $k > 0$  et  $k' > 0$  telles que  $\mu(x) \leq e^{-\frac{k}{\varepsilon}}$  et  $\mu'(x) \leq e^{-\frac{k'}{\varepsilon}}$ . On a donc

$$\varepsilon \frac{dv}{dx} = f(x, \bar{u}(x) + v) - f(x, \bar{u}(x)) - \mu(x) = vg(x, v) - \mu(x) \quad (7)$$

où  $g(x, v) \simeq f'_u(x, \bar{u}(x))$  pour tout  $v \simeq 0$ . L'équation (7) est une microperturbation de l'équation  $\varepsilon \frac{dv}{dx} = vg(x, v) =: h(x, v)$  qui admet la solution lente évidente  $v(x) = 0$ ; c'est un canard de cette équation, puisque  $(h'_v)_v(x, 0) \simeq h'_v(x, 0) = g(x, 0) \simeq f'_u(x, \bar{u}(x)) \simeq ({}^0f)'_u(x, ({}^0\bar{u})(x))$ , qui est par hypothèse du signe de  $x - x_0$  sur  $]x_-, x_+[$ . D'après la proposition 2.2, l'équation (7) admet donc elle aussi un canard au point  $(x_0, u_0)$ .  $\square$

## 4 Local ou global ?

Jusqu'à présent nous avons parlé du problème de l'existence locale des canards, qui correspond, comme nous l'avons dit, à la présence d'un retard à la bifurcation. Abordons à présent le problème de leur taille maximale, c'est-à-dire le problème de déterminer la longueur du retard, pour une condition initiale donnée.

Une fois encore, nous obtiendrons ce renseignement en sommant la série formelle  $\sum_{p \geq 0} u_p(x) \varepsilon^{p+1}$ , généralement divergente, qui représente la solution canard considérée. Mais cette fois il ne suffit plus d'une *sommation tronquée* qui fournit une solution-Gevrey, il convient de calculer par sommation les *solutions exactes*, lorsque cela est possible.

Dans ce paragraphe, nous verrons comment mener ce programme à bien dans le cas simple d'une équation linéaire de la forme

$$\varepsilon u' = (x + i)u + \varepsilon g(x) \quad (8)$$

où  $g$  est une fonction entière. Le cas non linéaire sera abordé au paragraphe suivant mais par une méthode différente : on utilisera alors, non plus une sommation par rapport à  $\varepsilon$ , comme nous allons le faire à présent, mais une sommation par rapport à une variable ad hoc remplaçant  $x$ .

La première étape consiste à déterminer la série formelle  $\sum_{p \geq 0} u_p(x) \varepsilon^{p+1}$  qui vérifie l'équation, en portant cette série dans l'équation et en déterminant les coefficients  $u_0, u_1, \dots$  de proche en proche. On trouve en particulier  $u_0(x) = -g(x)/(x + i)$ . On calcule ensuite la transformée de Borel  $\mathcal{B}$  de cette série, par rapport à la variable  $\varepsilon$  :  $\frac{\lambda^p}{p!} = \mathcal{B}(\varepsilon^{p+1})$ . On obtient ainsi la série

$$\hat{u}(x, \lambda) = \sum_{p \geq 0} u_p(x) \frac{\lambda^p}{p!}$$

qui est convergente au voisinage de  $\lambda = 0$ , puisque comme nous l'avons dit la série initiale est Gevrey. Désignons par  $u(x, \lambda)$  le prolongement analytique de la fonction ainsi

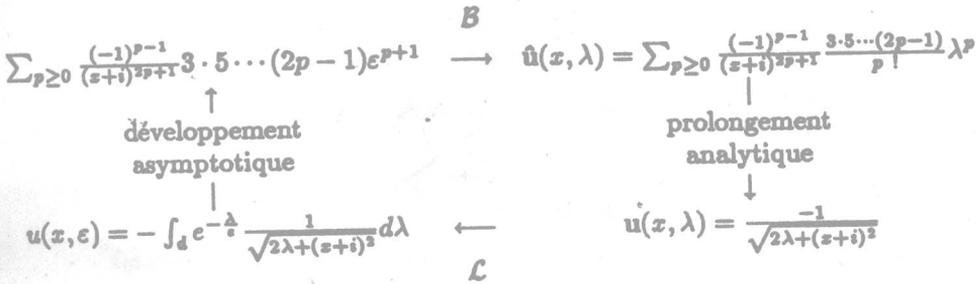


Figure 4: La sommation dans le cas de l'équation (5).

définie. Il s'agit d'étudier les singularités de cette fonctions de  $\lambda$  (ici  $x$  est à considérer comme un paramètre) et sa croissance à l'infini. Ces renseignements obtenus, on calcule une solution de l'équation en posant

$$u(x, \epsilon) = \int_d e^{-\frac{\lambda}{\epsilon}} u(x, \lambda) d\lambda$$

où  $d$  est une demi droite ne contenant aucune singularité de  $u$  et sur laquelle  $u$  est à croissance exponentielle en  $\lambda$ , c'est-à-dire sur laquelle il existe  $K \in \mathbb{R}$  et  $C \in \mathbb{R}$  tels que  $|u(x, \lambda)| \leq C e^{K|\lambda|}$ . Cette méthode de sommation [7,4,3] est schématisée sur la figure 4 dans le cas de l'équation (5).

En pratique, la partie délicate de ce procédé de sommation est le prolongement analytique  $\hat{u} \rightarrow u$ . A l'exception de quelques cas particuliers (tels que l'équation (5)), il est impossible de le calculer explicitement. On adopte alors une autre stratégie : on détermine la transformée de Borel non plus de la série initiale mais de l'équation elle-même. On obtient :

$$\partial_x u(x, \lambda) = (x + i)[\partial_\lambda u(x, \lambda) + u(x, 0)\delta] + g(x)\delta \tag{9}$$

où  $\delta$  est la mesure de Dirac en  $\lambda = 0$ , image par la transformation de Borel de la "série" constante 1. Comme

$$u(x, 0) = u_0(x) = -g(x)/(x + i),$$

on a simplement :

$$\begin{cases} \partial_x u = (x + i)\partial_\lambda u \\ u(x, 0) = -g(x)/(x + i). \end{cases} \tag{10}$$

La fonction  $u$  que nous cherchons à déterminer est donc simplement la solution de cette équation, c'est-à-dire la fonction

$$u(x, \lambda) = \frac{g(\sqrt{2\lambda + (x+i)^2} - i)}{\sqrt{2\lambda + (x+i)^2}}. \tag{11}$$

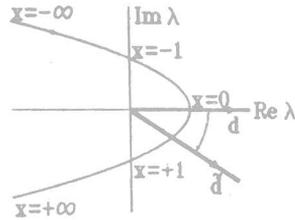


Figure 5: La singularité de  $u$  se déplace sur une parabole dans le plan de  $\lambda$ , lorsque  $x$  varie.

Les singularités de cette fonction proviennent d'une part du pôle ramifié  $\lambda = -(x+i)^2/2$  et d'autre part des singularités de  $g$ .

#### Proposition 4.1 (Existence de la butée)

Si  $g$  est une fonction entière à croissance exponentielle et si  $g(-i) \neq 0$ , l'équation (8) possède une solution  $\bar{u}(x, \varepsilon)$  infinitésimale pour tout  $x \ll 1$ . Cette solution  $\bar{u}$  devient infiniment grande dès que  $x \gg 1$ . Enfin si  $u_1$  est une autre solution infinitésimale en un point  $x_- \ll 1$ , elle reste infiniment voisine de  $\bar{u}$  tant que  $x \ll x_+ = -x_-$ .

Cette proposition explique le phénomène de butée observée lors de l'étude numérique du premier paragraphe. Elle indique que, pour une solution de cette famille d'équations, le plus long retard possible est 1 puisque toutes les solutions devenues lentes avant  $-1$  restent lentes jusqu'en 1 puis cessent de l'être, en quittant l'équilibre pour des valeurs de  $x$  proches de 1, tout en restant infiniment voisines les unes des autres tant qu'elles restent limités.

On retrouve bien entendu ce même comportement symétriquement pour les trajectoires lentes au-delà de  $x = 1$ .

**Preuve :** Comme la fonction  $g$  est entière, la fonction  $u$  donnée par la formule (11) possède, pour chaque valeurs du paramètre  $x$ , une unique singularité au point  $\lambda = -(x+i)^2/2$ . Lorsque  $x$  varie, cette singularité se déplace sur une parabole, comme indiqué sur la figure 5.

On voit que pour toute valeur de  $x < 0$ , la demi-droite réelle positive  $d$  ne rencontre aucune singularité de  $u$  (et  $u$  est à croissance exponentielle par hypothèse) ; la fonction

$$\bar{u}(x, \varepsilon) = \int_d e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}} u(x, \lambda) d\lambda$$

est donc une solution de l'équation, définie pour tout  $x < 0$ . Lorsque  $x$  prend des valeurs positives, on peut encore définir cette solution par une formule analogue, à condition de faire pivoter la droite  $d$  en  $\bar{d}$ , comme indiqué sur la figure 5. Plus précisément l'intégrale

$$\int_{\bar{d}} e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}} u(x, \lambda) d\lambda$$

représente la même fonction  $\bar{u}(x, \varepsilon)$  aussi longtemps que la singularité, située sur la parabole, reste au dessus de la demi droite  $\bar{d}$ . Donc, dès que  $x > 0$ , on a :

$$\bar{u}(x, \varepsilon) = \int_d e^{-\frac{\lambda}{2\varepsilon}} u(x, \lambda) d\lambda + \int_{\bar{d}-d} e^{-\frac{\lambda}{2\varepsilon}} u(x, \lambda) d\lambda.$$

Estimons le second terme de cette somme que nous appelons *correction exponentielle*.

**Lemme 4.1** Pour tout  $\varepsilon > 0$  infinitésimal, on a

$$\int_{\bar{d}-d} e^{-\frac{\lambda}{2\varepsilon}} u(x, \lambda) d\lambda \simeq -2\sqrt{2\varepsilon\pi} g(-i) e^{\frac{(x+i)^2}{2\varepsilon}}.$$

**Preuve :** (du lemme)

Notons  $I = \int_{\bar{d}-d} e^{-\frac{\lambda}{2\varepsilon}} \frac{g(\sqrt{2\lambda+(x+i)^2-i})}{\sqrt{2\lambda+(x+i)^2}} d\lambda$  et posons  $s = 2\lambda + (x+i)^2$ . On a :

$$I = -2e^{\frac{(x+i)^2}{2\varepsilon}} \int_0^\infty e^{\frac{s}{2\varepsilon}} \frac{g(\sqrt{s}-i)}{\sqrt{s}} ds$$

d'où, en posant  $S = \frac{s}{2\varepsilon}$ ,

$$I = -2\sqrt{2\varepsilon} e^{\frac{(x+i)^2}{2\varepsilon}} \int_0^\infty e^{-S} S^{-\frac{1}{2}} g(\sqrt{2\varepsilon S}-i) dS.$$

Comme  $g(\sqrt{2\varepsilon S}-i) \simeq g(-i)$  pour tout  $S$  limité et  $\varepsilon \simeq 0$ , on peut évaluer cette intégrale par le théorème d'approximation dominée [6] et la formule d'Euler de  $\Gamma(1/2)$  ; on obtient :

$$I \simeq -2\sqrt{2\varepsilon} e^{\frac{(x+i)^2}{2\varepsilon}} g(-i) \sqrt{\pi}$$

ce qui achève la preuve du lemme. □

On déduit du lemme que la correction exponentielle est une quantité infinitésimale (c'est même un exponentiellement petit) aussi longtemps que  $\text{Re}((x+i)^2/2) < 0$ . Elle devient par contre infiniment grande dès que cette partie réelle est positive. On voit donc que son influence est négligeable aussi longtemps que  $x \ll 1$  et devient, au contraire, prépondérante lorsque  $x \gg 1$ . La solution  $\bar{u}(x, \varepsilon)$  a donc le comportement annoncé.

Il reste à montrer que si  $u_1$  est une autre solution infinitésimale en un point  $x_- \ll -1$ , elle reste infiniment voisine de  $\bar{u}$  tant que  $x \ll x_+ = -x_-$ . Compte tenu de la forme très particulière de l'équation (8) considérée, la différence  $u_1 - \bar{u}$  est de la forme

$$u_1(x, \varepsilon) - \bar{u}(x, \varepsilon) = C e^{\frac{(x+i)^2}{2\varepsilon}},$$

c'est donc une fonction paire de  $x$ . □