ISSN 0321-4117

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Σ

ВЫПУСК 50 · 1983

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР
КИЕВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Т. Г. ШЕВЧЕНКО

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

РЕСПУБЛИКАНСКИЙ
МЕЖДУВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ СБОРНИК

ОСНОВАН В 1965 г.

ВЫПУСК 50

КИЕВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ КИЕВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ «ВИЩА ШКОЛА»
1983

УДК 518:517.944/947

В сборнике помещены статьи, посвященные приближенным аналитическим и численным методам решения краевых задач математической физики, теории управления, прикладной статистики. Рассматриваются задачи, возникающие в механике твердого деформируемого тела.

Для математиков, механиков, кибернетиков, научных работников и инженеров, занимающихся решением краевых задач математической физики, теоретическими исследованиями вычислительных методов и их внедрением, преподавателей вузов, студентов.

Адрес редакционной коллегии: 252601, ГСП, Киев-17, Владимирская, 64, университет, кафедра вычислительной математики, тел. 66-40-74.

Редакция естественной литературы
Зав. редакцией Б. Н. Фляшников

В $\frac{1702070000\text{-}069}{\text{М}224(04)\text{-}83}$ 461-83

УДК 518:517.944/947

С. А. ВОЙЦЕХОВСКИЙ, И. П. ГАВРИЛЮК, кандидаты физ.-мат. наук,
В. Л. МАКАРОВ, д-р физ.-мат. наук,
Киев. ун-т

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ПРЯМЫХ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

В настоящей работе с использованием метода фиктивных областей (МФО) построена и исследована схема метода прямых (СМП) для параболического уравнения с решением из класса $W_2^{2,1}$ (Q_T) в случае произвольной ограниченной области Ω с границей из класса C^2. Исходная область Ω погружается в прямоугольную область Ω_0, затем используется вариант МФО с продолжением при неизвестной функции, и к получаемой таким образом задаче в канонической области применяется метод прямых. До сих пор обоснование такого метода с помощью традиционной техники разностных схем (РС) было затруднено из-за того, что как исходное, так и продолженное решения имеют невысокую гладкость $(W_2^{2,1}(Q_T),\ W_2^{2,1}(Q_T^0))$. В работе [5] было положено начало новой методики построения РС для случая обобщенных решений, связанной с применением операторов точных РС. Дальнейшее развитие этой методики представлено в статьях [2—4].

В настоящей работе получены оценки скорости сходимости СМП порядка $O(h^{4/7})$, в сеточной норме $L_2(\omega_T)$, и $O(h^{1/6})$ в сеточной норме $W_2^{1,0}(\omega_T)$.

1. Пусть Ω — ограниченная область на плоскости переменных $x = (x_1, x_2)$ и пусть граница Γ области Ω принадлежит классу C^2. Обозначим через $Q_T = \{(x, t) : x \in \Omega,\ t \in (0, T)\}$ цилиндр в пространстве R_3, а через $\partial Q_T = \{(x, t) : x \in \Gamma,\ t \in (0, T)\}$ — его боковую поверхность.

Рассмотрим первую начально-краевую задачу

$$\partial u/\partial t - \Delta u + a(x, t)\, u = f(x, t),\ (x, t) \in Q_T; \tag{1}$$

$$u|_{\partial Q_T} = 0; \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{3}$$

где $f(x, t) \in L_2(Q_T)$; $\varphi(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$; функция $a(x, t)$ измерима, неотрицательна и ограничена.

Задача (1)—(3) имеет единственное решение из класса $W_2^{2,1}(Q_T)$, и для него справедлива оценка [1]

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \leqslant M\left(\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|\varphi\|_{W_2^1(\Omega)}\right). \tag{4}$$

В дальнейшем через M будем обозначать константы, которые не зависят от ε, h, u, f, u_ε, φ и y_ε.

2. Дополним область Ω некоторой областью Ω_1 до прямоугольника $\Omega_0 = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_\alpha < l_\alpha,\ \alpha = 1, 2\}$ с границей Γ_0. Введем следующие обозначения: $Q_T^0 = \{(x, t) : x \in \Omega_0,\ t \in (0, T)\}$; $\partial Q_T^0 = \{(x, t) : x \in \Gamma_0,\ t \in (0, T)\}$. В цилиндре Q_T^0 рассмотрим задачу

$$\partial u_\varepsilon/\partial t - \Delta u_\varepsilon + a_\varepsilon(x, t)\, u_\varepsilon = f(x, t),\ (x, t) \in Q_T^0; \tag{5}$$

$$u_\varepsilon |_{\partial Q_T^0} = 0; \tag{6}$$

$$u_\varepsilon |_{t=0} = \tilde{\varphi}(x), \tag{7}$$

где $f(x, t)$ продолжена на весь цилиндр Q_T^0 с сохранением класса, например, продолжена нулем; $\tilde{\varphi}(x) = \chi_\Omega(x)\, \varphi(x)$; $a_\varepsilon(x, t) = \chi_{Q_T}(x, t)\, a(x, t) + \varepsilon^{-2} \chi_{Q_T^1}(x, t)$; $\chi_\Omega(x)$ —характеристическая функция множества Ω; $Q_T^1 = Q_T^0 - Q_T$; ε — достаточно малое положительное число.

В дальнейшем будем использовать обобщенную постановку задачи (5) — (7)

$$\begin{gathered}\int\limits_{Q_T^0} (-u_\varepsilon v_t)\, dxdt + \int\limits_{Q_T^0} \left(\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dxdt + \\ + \int\limits_{Q_T} a u_\varepsilon v dxdt + \varepsilon^{-2} \int\limits_{Q_T^1} u_\varepsilon\, v dxdt = \int\limits_{Q_T^0} f v dxdt + \end{gathered} \tag{8}$$

$$+ \int\limits_\Omega \varphi(x)\, v(x, 0)\, dx, \quad \forall v \in W_{2,0}^1(Q_T^0) \text{ и равной нулю при } t = T.$$

Задача (8) однозначно разрешима в классе $\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q_T^0)$ [1].

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Решение задачи (5)—(7) сходится при $\varepsilon \to 0$ к решению задачи (1)—(3), причем выполняется оценка

$$\| u - u_\varepsilon \|_{L_2(Q_T)} \leqslant M\varepsilon \left(\| f \|_{L_2(Q_T)} + \| \varphi \|_{W_2^1(\Omega)} \right).$$

Доказательство. Введем функцию $w_\varepsilon(x, t) = \bar{u}(x, t) - u_\varepsilon(x, t)$, где $\bar{u}(x, t) = \chi_{Q_T}(x, t)\, u(x, t)$, $(x, t) \in Q_T^0$; $u(x, t)$ совпадает в Q_T с решением задачи (1) — (3). Очевидно, что $w_\varepsilon(x, t) \in \overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q_T^0)$. Функция $u(x, t($ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T} (-u v_t)\, dxdt + \int\limits_{Q_T} \left(\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dxdt + \int\limits_{Q_T} a u v dxdt =$$

$$= \int\limits_{Q_T} fvdxdt + \int\limits_{\Omega} \varphi(x)\, v(x, 0)\, dx + \int\limits_{\partial Q_T} \frac{\partial u}{\partial n} vdxdt, \qquad (9)$$

$\forall v \in W^1_{2,0}(Q^0_T)$, равной нулю при $t = T$, где n — внешняя нормаль к Γ.

Вычитая интегральное тождество (8) из интегрального тождества (9), получаем

$$\int\limits_{Q^0_T} (-w_\varepsilon v_t)\, dxdt + \int\limits_{Q^0_T} \left(\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dxdt + \int\limits_{Q_T} a w_\varepsilon\, vdxdt +$$

$$+ \varepsilon^{-2} \int\limits_{Q^1_T} w_\varepsilon\, vdxdt = \int\limits_{\partial Q_T} \frac{\partial u}{\partial n} vdxdt - \int\limits_{Q^1_T} fvdxdt \qquad (10)$$

$\forall v \in W^1_{2,0}(Q^0_T)$, равной нулю при $t = T$.

Для задачи (10) уравнение энергетического баланса имеет вид

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} w^2_\varepsilon(x, t)\, dx + \int\limits_{Q^0_T} \left(\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i} \right)^2 \right) dxdt + \int\limits_{Q_T} a w^2_\varepsilon dxdt +$$

$$+ \varepsilon^{-2} \int\limits_{Q^1_T} w^2_\varepsilon dxdt = \int\limits_{\partial Q_T} \frac{\partial u}{\partial n} w_\varepsilon\, dxdt - \int\limits_{Q^1_T} f w_\varepsilon\, dxdt, \qquad (11)$$

$\forall t \in [0, T]$.

Используя неравенство Коши—Буняковского, из уравнения (11) находим

$$\int\limits_0^T |w_\varepsilon|^2_{W^1_2(\Omega_1)} dt + \varepsilon^{-2} \int\limits_0^T \| w_\varepsilon \|^2_{L_2(\Omega_1)}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant M \left(\| W_\varepsilon \|_{L_2(\partial Q_T)} \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L_2(\partial Q_T)} + \| f \|_{L_2(Q_T)} \| w_\varepsilon \|_{L_2(Q^1_T)} \right). \qquad (12)$$

Далее нам понадобятся следующие неравенства [6]:

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L_2(\partial Q_T)} \leqslant M \| u \|_{W^{2,1}_2(Q_T)};$$

$$\| w_\varepsilon \|_{L_2(\partial Q_T)} \leqslant M \left(\varepsilon^{-1} \int\limits_0^T \| w_\varepsilon \|^2_{L_2(\Omega_1)}\, dt + \varepsilon \int\limits_0^T | w_\varepsilon |^2_{W^1_2(\Omega_1)} dt \right)^{1/2};$$

$$\| w_\varepsilon \|_{L_2(Q^1_T)} \leqslant (\varepsilon^{-1} \| w_\varepsilon \|^2_{L_2(Q^1_T)})^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\varepsilon^{-1} \int\limits_0^T \| w_\varepsilon \|^2_{L_2(\Omega_1)} dt + \varepsilon \int\limits_0^T | w_\varepsilon |^2_{W^1_2(\Omega_1)} dt \right)^{1/2}.$$

Подставляя последние неравенства в неравенство (12) и используя оценку (4), получаем

$$\int_0^T \| w_\varepsilon \|^2_{L_2(\Omega_1)} dt \leqslant M\varepsilon^3 (\| f \|_{L_2(Q_T)} + \| \varphi \|_{W_2^1(\Omega)})^2;$$

$$\int_0^T \| w_\varepsilon \|^2_{W_2^1(\Omega_1)} dt \leqslant M\varepsilon (\| f \|_{L_2(Q_T)} + \| \varphi \|_{W_2^1(\Omega)})^2.$$

Следовательно,

$$\| w_\varepsilon \|_{L_2(\partial Q_T)} \leqslant M\varepsilon (\| f \|_{L_2(Q_T)} + \| \varphi \|_{W_2^1(\Omega)}. \tag{13}$$

В цилиндре Q_T для функции w_ε справедлива оценка [1]

$$\| w_\varepsilon \|_{L_2(Q_T)} \leqslant M \| w_\varepsilon \|_{L_2(\partial Q_T)}.$$

Теперь из оценки (13) окончательно получаем

$$\| w_\varepsilon \|_{L_2(Q_T)} \leqslant M\varepsilon (\| f \|_{L_2(Q_T)} + \| \varphi \|_{W_2^1(\Omega)}),$$

что и требовалось доказать. Заметим, что решение задачи (5) — (7) принадлежит классу $W_2^{2,1}(Q_T^0)$ [1], и для него справедлива оценка

$$\| u_\varepsilon \|_{W_2^{2,1}(Q_T^0)} \leqslant M\varepsilon^{-1/2} (\| f \|_{L_2(Q_T)} + \| \varphi \|_{W_2^1(\Omega)}). \tag{14}$$

Действительно, так как функция $f(x, t) - a_\varepsilon(x, t) u_\varepsilon(x, t) \in L_2(Q_T)$, то воспользовавшись оценкой (4), а также очевидными оценками

$$\| u_\varepsilon \|_{L_2(Q_T)} \leqslant M (\| f \|_{L_2(Q_T)} + \| \varphi \|_{W_2^1(\Omega)});$$

$$\| u_\varepsilon \|_{L_2(Q_T^1)} = \| w_\varepsilon \|_{L_2(Q_T^1)} \leqslant M\varepsilon^{3/2} (\| f \|_{L_2(Q_T)} + \| \varphi \|_{W_2^1(\Omega)}),$$

получаем

$$\| u_\varepsilon \|_{W_2^{2,1}(Q_T^0)} \leqslant M\varepsilon^{-1/2} (\| f \|_{L_2(Q_T)} + \| \varphi \|_{W_2^1(\Omega)}).$$

3. В области Ω_0 введем сетку $\omega_0 = \omega_1 \times \omega_2$; $\omega_\alpha = \{x_{\alpha_{i_\alpha}} = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = \overline{1, N_\alpha - 1}, h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2$, границу которой обозначим γ_0, $\alpha = 1, 2$.

Для приближенного решения задачи (5) — (7) применим следующую СМП:

$$\frac{dy_\varepsilon}{dt} - \Lambda_\varepsilon y_\varepsilon = \mathrm{T}_1^2 \mathrm{T}_2^2 (f(\cdot, t)), \ (x, t) \in \omega_T^0 = \omega_0 \times (0, T);$$

$$y_\varepsilon |_{\partial\omega_T^0} = 0; \quad y_\varepsilon |_{t=0} = \mathrm{T}_1^2 \mathrm{T}_2^2 (\widetilde{\varphi}(\cdot)), \tag{15}$$

где $\partial\omega_T^0 = \gamma_0 \times (0, T)$;

$$\mathrm{T}_\alpha^2(u) = \int_{-1}^{0} (1+s)\, u\,(x_1 + (2-\alpha)\, sh_1,\ x_2 + (\alpha-1)\, sh_2)\, ds +$$

$$+ \int_0^1 (1-s)\, u\,(x_1 + (2-\alpha)\, sh_1,\ x_2 + (\alpha-1)\, sh_2)\, ds,\ \alpha = 1, 2;$$

$$\Lambda_\varepsilon y_\varepsilon \equiv (\Lambda_1 + \Lambda_2 - \mathrm{B}_\varepsilon)\, y_\varepsilon;\quad \Lambda_\alpha y_\varepsilon = y_{\varepsilon \bar{x}_\alpha x_\alpha},\quad \alpha = 1, 2;$$

$$\mathrm{B}_\varepsilon y_\varepsilon = \mathrm{T}_1^2 \mathrm{T}_2^2 (a_\varepsilon(\cdot, t)\, \mathrm{P}_2 y_\varepsilon);$$

$$\mathrm{P}_2 y_\varepsilon = \begin{cases} y_{\varepsilon ij} + (x_1 - x_{1,i})\, y_{\varepsilon \bar{x}_1 ij} + (x_2 - x_{2j})\, y_{\varepsilon \bar{x}_2 ij}, & x_{1,i-1} \leqslant x_1 \leqslant x_{1,i},\\ & x_{2,j-1} \leqslant x_2 \leqslant x_{2,j};\\ y_{\varepsilon ij} + (x_1 - x_{1,i})\, y_{\varepsilon \bar{x}_1 ij} + (x_2 - x_{2,j})\, y_{\varepsilon x_2 ij}, & x_{1,i-1} \leqslant x_1 \leqslant x_{1,i},\\ & x_{2,j} \leqslant x_2 \leqslant x_{2,j+1};\\ y_{\varepsilon ij} + (x_1 - x_{1,i})\, y_{\varepsilon x_1 ij} + (x_2 - x_{2,j})\, y_{\varepsilon \bar{x}_2 ij}, & x_{1,i} \leqslant x_1 \leqslant x_{1,i+1},\\ & x_{2,j-1} \leqslant x_2 \leqslant x_{2,j};\\ y_{\varepsilon ij} + (x_1 - x_{1,i})\, y_{\varepsilon x_1 ij} + (x_2 - x_{2,j})\, y_{\varepsilon x_2 ij}, & x_{1,i} \leqslant x_1 \leqslant x_{1,i+1},\\ & x_{2,j} \leqslant x_2 \leqslant x_{2,j+1}. \end{cases}$$

Для погрешности $z_\varepsilon = y_\varepsilon - u_\varepsilon$ имеем задачу

$$\frac{dz_\varepsilon}{dt} = \Lambda_1 z_\varepsilon + \Lambda_2 z_\varepsilon - \mathrm{B}_\varepsilon z_\varepsilon + \psi,\ (x, t) \in \omega_T^0;$$

$$z_\varepsilon|_{\partial\omega_T^0} = 0;\ z_\varepsilon|_{t=0} = \mathrm{T}_1^2 \mathrm{T}_2^2 (\tilde{\varphi}(\cdot) - \tilde{\varphi}(x)),\ x \in \omega_0, \tag{16}$$

где

$$\psi = \frac{d}{dt}(\mathrm{T}_1^2 \mathrm{T}_2^2 (u_\varepsilon) - u_\varepsilon) + (u_\varepsilon - T_2^2(u_\varepsilon))_{\bar{x}_1 x_1} + (u_\varepsilon -$$

$$- \mathrm{T}_1^2(u_\varepsilon))_{\bar{x}_2 x_2} + \mathrm{T}_1^2 \mathrm{T}_2^2 (a_\varepsilon(\cdot, t)\,(u_\varepsilon(\cdot, t) - \mathrm{P}_2 u_\varepsilon(x, t))).$$

Для оценки z_ε в норме $L_2(\omega_T^0)$ применим метод выделения «стационарных неоднородностей» [3]. Представим z_ε в виде суммы двух функций $z_\varepsilon = z_1 + z_2$, где z_1 и z_2 — решения следующих задач:

$$\mathrm{B}_\varepsilon z_2 - (z_{2\bar{x}_1 x_1} + z_{2\bar{x}_2 x_2}) = (u_\varepsilon - \mathrm{T}_2^2(u_\varepsilon))_{\bar{x}_1 x_1} +$$

$$+ (u_\varepsilon - \mathrm{T}_1^2(u_\varepsilon))_{\bar{x}_2 x_2} + \eta^*(x),\ x \in \omega_0;\ z_2|_{\gamma_0} = 0; \tag{17}$$

$$\eta^*(x) = \mathrm{T}_1^2 \mathrm{T}_2^2 (a_\varepsilon(\cdot, t)\,(u_\varepsilon(\cdot, t) - \mathrm{P}_2 u_\varepsilon(x, t)));$$

$$\frac{dz_1}{dt} = z_{1\bar{x}_1 x_1} + z_{1\bar{x}_2 x_2} - \mathrm{B}_\varepsilon z_1 + \frac{d}{dt}(\mathrm{T}_1^2 \mathrm{T}_2^2 (u_\varepsilon) - u_\varepsilon) - \frac{dz_2}{dt},$$

$$(x, t) \in \omega_T^0;\quad z_1|_{\partial\omega_T^0} = 0;\quad z_1|_{t=0} = \mathrm{T}_1^2 \mathrm{T}_2^2 (\tilde{\varphi}) - \tilde{\varphi}(x). \tag{18}$$

Далее нам понадобится следующая лемма.

Лемма. :ть A_α, B — линейные операторы, действующие в вещественном ›бертовом пространстве H и пусть выполнены следующие условия $_\iota = A_\alpha^* \geqslant \nu_\alpha E$, $\alpha = 1, 2$; $B = B^*$; $B \geqslant \nu_0 E$; $A_1 + A_2 + B \geqslant \nu_3 E$, ν_α $(\alpha = \overline{1, 3})$ — положительные постоянные, не зависящие от h. да

$$\| (A_1 \quad _2 + B)^{-1} A_\alpha \| \leqslant \left(1 + \frac{\nu_0 - |\nu_0|}{2(\nu_1 + \nu_2)}\right)^{-1}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Учитывая ле , для функции z_2 получаем оценку

$$\| z_2 \|_{L_2(\omega_0)} \leqslant \quad | u_\varepsilon - T_2^2 (u_\varepsilon) \|_{L_2(\omega_0)} + \| u_\varepsilon - T_1^2 (u_\varepsilon) \|_{L_2(\omega_0)} + \| \eta^* \|_{L_2(\omega_0)}). \tag{19}$$

Для функци ıа $\eta^*(x)$ имеем оценку $|\eta^*(x)| \leqslant M\varepsilon^{-2}\bar\eta(x)$, где $\bar\eta(x) = T_1^2 T_2^2 (| u_\varepsilon(\cdot, t) - P_2 u_\varepsilon(x, t)|)$. Функционалы $\eta_\alpha(x) = u_\varepsilon - T_{3-\alpha}^2(u_\varepsilon)$, $\alpha = 1, 2$ и $\bar\eta(x)$ обращаются в нуль на множестве π_1 многочленов не выше первой степени. Поэтому из леммы Брэмбла—Гильберта [8] следует

$$|\eta_\alpha(x)| \leqslant Mh^2 (h_1 h_2)^{-1/2} | u_\varepsilon |_{W_2^2(e)}, \quad \alpha = 1, 2;$$

$$|\eta^*(x)| \leqslant M\varepsilon^{-2} h^2 (h_1 h_2)^{-1/2} | u_\varepsilon |_{W_2^2(e)},$$

где $e \equiv e(x) = (x_1 - h_1,\ x_1 + h_1) \times (x_2 - h_2,\ x_2 + h_2)$. Из последних неравенств находим

$$\| \eta_\alpha \|_{L_2(\omega_0)} \leqslant Mh^2 | u_\varepsilon |_{W_2^2(\Omega_0)}, \quad \alpha = 1, 2;$$

$$\| \eta^* \|_{L_2(\omega_0)} \leqslant M\varepsilon^{-2} h^2 | u_\varepsilon |_{W_2^2(\Omega_0)}.$$

Учитывая эти неравенства, из неравенства (19) получаем

$$\left(\int_0^T \| z_2 \|^2_{L_2(\omega_0)} dt \right)^{1/2} \leqslant M\varepsilon^{-2} h^2 | u_\varepsilon |_{W_2^2(Q_T^0)}, \tag{20}$$

где

$$| u_\varepsilon |_{W_2^2(Q_T^0)} = \left(\int_0^T | u_\varepsilon |^2_{W_2^2(\Omega_0)} dt \right)^{1/2}.$$

Переходим к оценке функции z_1. Проинтегрируем равенство (18) от 0 до τ, затем умножим его скалярно на $z_1(t)$ и воспользуемся положительной определенностью оператора $-\Lambda_1 - \Lambda_2 + B_\varepsilon$. Полученное неравенство проинтегрируем от 0 до t, в результате имеем

$$\int_0^t \| z_1(\tau) \|^2_{L_2(\omega_0)} d\tau \leqslant \int_0^t \| T_1^2 T_2^2 (u_\varepsilon) - u_\varepsilon \|_{L_2(\omega_0)} \| z_1(\tau) \|_{L_2(\omega_0)} d\tau +$$

$$+ \int_0^t \| z_1(\tau) \|_{L_2(\omega_0)} \| z_2(\tau) \|_{L_2(\omega_0)} d\tau.$$

Отсюда получаем

$$\int_0^T \| z_1(\tau) \|^2_{L_2(\omega_0)} d\tau \leqslant M \left(\int_0^T \| \mathrm{T}_1^2 \mathrm{T}_2^2 (u_\varepsilon) - u_\varepsilon \|^2_{L_2(\omega_0)} d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_0^T \| z_2(\tau) \|^2_{L_2(\omega_0)} d\tau \right).$$

Учитывая оценку (20), из последнего неравенства находим

$$\left(\int_0^T \| z_1(\tau) \|^2_{L_2(\omega_0)} d\tau \right)^{1/2} \leqslant M \varepsilon^{-2} h^2 | u_\varepsilon |_{W_2^2(Q_T^0)}.$$

Следовательно, для функции z_ε получаем оценку

$$\left(\int_0^T \| y_\varepsilon(\tau) - u_\varepsilon(\tau) \|^2_{L_2(\omega_0)} d\tau \right)^{1/2} \leqslant M \varepsilon^{-2} h^2 | u_\varepsilon |_{W_2^2(Q_T^0)}. \qquad (21)$$

Из очевидного неравенства

$$\left(\int_0^T \| y_\varepsilon(\tau) - u(\tau) \|^2_{L_2(\omega)} d\tau \right)^{1/2} \leqslant \left(\int_0^T \| y_\varepsilon(\tau) - u_\varepsilon(\tau) \|^2_{L_2(\omega)} d\tau \right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\int_0^T \| u_\varepsilon(\tau) - u(\tau) \|^2_{L_2(\omega)} d\tau \right)^{1/2},$$

теоремы 1 и неравенств (21), (14) находим

$$\left(\int_0^T \| y_\varepsilon(\tau) - u(\tau) \|^2_{L_2(\omega)} d\tau \right)^{1/2} \leqslant M (\varepsilon^{-5/2} h^2 + \varepsilon) (\| f \|_{L_2(Q_T)} + \| \varphi \|_{W_2^1(\Omega)}). \qquad (22)$$

Выбрав $\varepsilon = h^{4/7}$, из неравенства (22) получаем

$$\left(\int_0^T \| y_\varepsilon(\tau) - u(\tau) \|^2_{L_2(\omega)} d\tau \right)^{1/2} \leqslant M h^{4/7} (\| f \|_{L_2(Q_T)} + \| \varphi \|_{W_2^1(\Omega)}),$$

где $\omega = \{ x \in \omega_0 \colon x \in \Omega \}$.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть Ω — ограниченная область с границей $\Gamma \in C^2$, $f(x, t) \in L_2(Q_T)$, $\varphi(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, $a(x, t)$ — измеримая неотрицательная ограниченная функция $\varepsilon = h^{4/7}$. Тогда решение СМП (15) сходится к решению задачи (1) — (3), причем справедлива оценка

$$\left(\int_0^T \| y_\varepsilon(\tau) - u(\tau) \|^2_{L_2(\omega)} d\tau \right)^{1/2} \leqslant M h^{4/7} \left(\| f \|_{L_2(Q_T)} + \| \varphi \|_{W_2^1(\Omega)} \right).$$

Замечание. Имеет место оценка

$$\| u - u_\varepsilon \|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \leqslant M \sqrt{\varepsilon} (\| f \|_{L_2(Q_T)} + \| \varphi \|_{W_2^1(\Omega)}).$$

Фактически она установлена при доказательстве теоремы 1. Используя оценку из леммы 1 [7, с. 315], нетрудно видеть, что

$$\left(\int_0^T \| y_\varepsilon (\tau) - u_\varepsilon (\tau) \|^2_{W_2^1(\omega_0)} d\tau \right)^{1/2} \leqslant M\varepsilon^{-2} h \mid u_\varepsilon |_{W_2^2(Q_T^0)} .$$

Повторяя предыдущие рассуждения, получаем такое неравенство:

$$\left(\int_0^T \| y_\varepsilon (\tau) - u (\tau)^2_{W_2^1(\omega)} d\tau \right)^{1/2} \leqslant M (\varepsilon^{-5/2} h + \sqrt{\varepsilon}) (\| f \|_{L_2(Q_T)} + \| \varphi |_{W_2^1(\Omega)}).$$

Выбрав $\varepsilon = h^{1/3}$, убеждаемся в справедливости утверждения теоремы 2 с оценкой

$$\left(\int_0^T | y_\varepsilon (\tau) - u (\tau) \|^2_{W_2^1(\omega)} d\tau \right)^{1/2} \leqslant M h^{1/6} (\| f \|_{L_2(Q_T)} + \| \varphi \|_{W_2^1(\Omega)}).$$

1. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967. 736 с. 2. *Лазаров Р. Д., Макаров В. Л.* Разностная схема второго порядка точности для осесимметрического уравнения Пуассона на обобщенных решениях из W_2^2.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1981, т. 21 № 5, с. 1168—1179. 3. *Лазаров Р. Д., Макаров В. Л.* Сходимость метода сеток и метода прямых для многомерных задач математической физики в классах обобщенных решений.— Докл. АН СССР, 1981, т. 259, № 2, с. 282—286. 4. *Макаров В. Л., Гаврилюк И. П., Пирназаров С. П.* О сходимости разностных решений к решениям бигармонического уравнения из классов W_2^k.— Вестн. Каракалп. фил. АН УзССР, 1980, № 1 (79), с. 3—10. 5. *Макаров В. Л., Самарский А. А.* Применение точных разностных схем к оценке скорости сходимости метода прямых.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1980, т. 20, № 2, с. 381—397. 6. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1976. 392 с. 7. *Самарский А. А., Андреев В. Б.* Разностные методы для эллиптических уравнений. М., 1976. 350 с. 8. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М., 1980. 512 с.

Поступила в редколлегию 22.04.82

УДК 517.948:517.52

Р. И. МИХАЛЬЧУК, канд. физ.-мат. наук, М. С. СЯВАВКО, ассист.,
Луц. фил. Львов. политехн. ин-та

НОВЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ДВУХСТОРОННИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ДВОЙНОГО АРГУМЕНТА

Определения и обозначения. Пусть $\tau_i = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_i) \in [a; b]^i = G_i$, а $C(G_i)$ — пространство функций, непрерывных в области G_i.

Определение 1. Выражение вида

$$b_0 + \int_a^b \frac{a_1 (\tau^1)\, dq_1 (\tau_1)}{b_1 (\tau_1) + \int_a^b \frac{a_2 (\tau^2)\, dq_2 (\tau_2)}{b_2 (\tau^2) + \ldots}} + \int_a^b \frac{a_i (\tau^i)\, dq_i (\tau_i)}{b_i (\tau^i) + \ldots}, \qquad (1)$$

где $a_i(\tau^i)$, $b_i(\tau^i) \in C(G_i)$, $q_i(\tau_i)$ — функции ограниченного изменения; b_0 — постоянная; $i = \overline{1, \infty}$, а интегралы, рассматриваемые в смысле Стилтьеса, назовем интегральной цепной дробью (ИЦД).

Для сокращенного обозначения этой дроби будем использовать записи

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty} \int_a^b [a_i(\tau^i)\, dq_i(\tau_i)/b_i(\tau^i)]$$

или

$$b_0 + \int_a^b \frac{a_1(\tau^1)\, dq_1(\tau_1)}{b_1(\tau_1) + \ldots} \int_a^b \frac{a_2(\tau^2)\, dq_2(\tau_2)}{b_2(\tau^2) + \ldots} \int_a^b \frac{a_i(\tau^i)\, dq_i(\tau_i)}{b_i(\tau^i) + \ldots}.$$

Частным случаем ИЦД (1) является дробь

$$b_0 + \int_a^b \frac{a_1(\tau^1)\, dq_1(\tau_1)}{b_1(\tau_1) + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=2}^{\infty} \int\limits_a^{\tau_{i-1}} [a_i(\tau^i)\, dq_i(\tau_i)/b_i(\tau^i)]}. \tag{2}$$

Определение 2. Если элементы $a_i(\tau^i)$ и $b_i(\tau^i)$ дроби (1) соответственно неотрицательны и положительны, принадлежат пространству $C(G_i)$, $q_i(\tau_i)$ — неубывающие в промежутке $[a; b]$ функции, то эту дробь будем называть ИЦД с положительными компонентами (ПИЦД).

В дальнейшем будем рассматривать только дроби с положительными компонентами.

Определение 3. Конечную цепную дробь

$$f_i = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{m=1}^{i} \int_a^b [a_m(\tau^m)\, dq_m(\tau_m)/b_m(\tau^m)] \tag{3}$$

назовем i-й подходящей дробью для дроби (1).

Цепная дробь (1), у которой существует и конечен предел последовательности $\{f_i\}$, называется сходящейся.

Значение дроби тогда принимается равным этому пределу.

Положим

$$Q_k^{(i)}(\tau^k) = b_k(\tau^k) + \mathop{\mathrm{D}}_{m=k+1}^{i} \int_a^b [a_m(\tau^m)\, dq_m(\tau_m)/b_m(\tau^m)]. \tag{4}$$

Легко убедиться в справедливости соотношений

$$Q_k^{(i)}(\tau^k) = b_k(\tau^k) + \int_a^b \frac{a_{k+1}(\tau^{k+1})\, dq_{k+1}(\tau_{k+1})}{Q_{k+1}^{(i)}(\tau^{k+1})} \qquad (k = \overline{1, i-1});$$

$$Q_0^{(i)} = f_i; \qquad Q_i^{(i)}(\tau^i) = b_i(\tau^i).$$

Методом математической индукции устанавливается формула разности f_i и f_j:

$$f_i - f_j = (-1)^j \int\limits_{G_{i+1}} \frac{\prod\limits_{k=1} a_k(\tau^k)\, dq_k(\tau_k)}{\prod\limits_{k=1}^{i+1} Q_k^{(i)}(\tau^k) \prod\limits_{k=1}^{j} Q_k^{(j)}(\tau^k)}. \quad (5)$$

Кроме того, заметим, что элементарными преобразованиями дробь (1) может быть приведена, например, к виду

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty} \int\limits_a^b [c_i(\tau^i)\, dq_i(\tau_i)/1], \quad (6)$$

где $c_1(\tau_1) = \dfrac{a_1(\tau_1)}{b_1(\tau_1)}$; $c_i(\tau^i) = \dfrac{a_i(\tau^i)}{b_{i-1}(\tau^{i-1})\, b_i(\tau^i)}$ $(i \geqslant 2)$.

Установим теперь связь между интегральной и ветвящейся [3] дробями. С этой целью, приняв для простоты изложения $a_0 = 0$, $b = 1$, произведем сначала вычисление интегралов дроби (1) по формуле

$$\int\limits_0^1 f(\tau^m)\, dq(\tau_m) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\tau^{m-1}, \frac{i-1}{n}\right) \Delta q\left(\frac{i-1}{n}\right) + R_{m-1}(\tau^{m-1}),$$

где $\lim R_{m-1}(\tau^{m-1}) = 0$ для всех $\tau^{m-1} \in G_{m-1}$, $m \geqslant 2$. Тогда f_{i+1}-я подходящая дробь дроби (1) будет эквивалентна выражению

$$b_0 + \int\limits_0^1 \frac{a_1(\tau_1)\, dq_1(\tau_1)}{\bar{b}_1(\tau_1) + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{m=2}^{i+1} \sum \dfrac{a_m\left(\tau_1, \frac{i_2-1}{n}, \ldots, \frac{i_m-1}{n}\right) \Delta q_m\left(\frac{i_m-1}{n}\right)}{\bar{b}_m\left(\tau_1, \frac{i_2-1}{n}, \ldots, \frac{i_m-1}{n}\right)}}, \quad (7)$$

где $\bar{b}_m = b_m + r_m$; $\lim\limits_{n\to\infty} r_m = 0$; $m = \overline{1, i+1}$. Подынтегральную функцию в выражении (7) при помощи преобразования (6) запишем в виде

$$\bar{c}(\tau_1)/\left[1 + \mathop{\mathrm{D}}_{m=1}^{i} \sum_{i_m=1}^{n} \bar{c}_m\left(\tau_1, \frac{i_2-1}{n}, \ldots, \frac{i_{m+1}-1}{n}\right) \Delta q_{m+1}\left(\frac{i_{m+1}-1}{n}\right)/1\right], \quad (8)$$

где $\bar{c}(\tau_1) = a_1/\bar{b}_1$; $\bar{c}_m = a_{m+1}/(\bar{b}_{m+1} \bar{b}_m)$.

Пусть $c = a_1/b_1$ и $c_m = a_{m+1}/(b_{m+1} b_m)$ — приближенные значения элементов $\bar{c}$ и $\bar{c}_m$, а δ и δ_m — их относительные погрешности при вычислении, т. е. $\delta = (\bar{c} - c)/c$; $\delta_m = (\bar{c}_m - c_m)/c_m$. Выражая $\bar{b}_m$ через b_m, получаем

$$\delta = -\frac{r}{b_1 + r_1}; \qquad \delta_m = -\frac{r_m b_{m+1} + r_{m+1} b_m + r_m r_{m+1}}{(b_m + r_m)(b_{m+1} + r_{m+1})},$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \delta = \lim\limits_{n\to\infty} \delta_m = 0$ для всех $m = \overline{1, i}$.

Рассмотрим разность

$$r_i = c(\tau_1)/\left[1 + \overset{i}{\underset{m=1}{\mathrm{D}}} \sum^{n} c_m \left(\tau_1, \frac{i_2-1}{n}, \ldots, \frac{i_{m+1}-1}{n}\right) \Delta q_{m+1} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{i_{m+1}-1}{n}\right)/1\right] - \bar{c}(\tau_1)/\left[1 + \overset{i}{\underset{m=1}{\mathrm{D}}} \sum_{i_m=1}^{n} \bar{c}_m \left(\tau_1, \frac{i_2-1}{n}, \ldots, \frac{i_{m+1}-1}{n}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \Delta q_{m+1} \left(\frac{i_{m+1}-1}{n}\right)/1\right].$$

Используя результаты, представленные в работе [2], получаем оценку разности

$$|r_i \leqslant |c| \delta^{(i)} \sum_{k=0}^{i} \sum_{i_1, \ldots, i_k=1}^{n} \prod_{s=1}^{k} |c_s|, \tag{9}$$

где

$$\delta^{(i)} = \max_{0 \leqslant k \leqslant i} \max_{i_1, i_2, \ldots, i_k} \left| \prod_{s=1}^{k-[k/2]} (1 + \delta_{2s-1}) - \prod_{s=0}^{[k/2]} (1 + \delta_{2s}) \right|,$$

а $[k/2]$ — наибольшая целая часть числа $k/2$. Переходя в неравенстве (4) к пределу при стремлении n к бесконечности, получаем, что $\lim_{n\to\infty} r_i = 0$.

Значит, интегральная цепная дробь — континуальный аналог ветвящейся цепной дроби [3], полученной в результате замены в этой дроби символов суммирования на символы интегрирования.

Признаки сходимости. Прежде всего заметим, что для дроби (1) с положительными компонентами выполняется система неравенств

$$f_0 < f_2 < \ldots < f_{2p} < \ldots < f_{2p+1} < \ldots < f_3 < f_1. \tag{10}$$

Это свойство вилки вытекает из формулы (5) при $j = i - 2$. Оно также позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 1. Если дробь (1) сходится, то сходящейся будет также дробь

$$b_k(\tau^k) + \overset{\infty}{\underset{i=k+1}{\mathrm{D}}} \int_a^b [a_i(\tau^i)\, dq_i(\tau_i)/b_i(\tau^i)], \tag{11}$$

являющаяся частью дроби (1).

Существуют следующие необходимый и достаточный признаки сходимости дроби (1).

Теорема 2. Если в дроби (1) элементы $a_i(\tau^i)$ положительны в кубе G_i, то эта дробь расходится, если сходится ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \max_{\tau^i} c_i(\tau^i)$, где

$$c_{2i-1}(\tau^{2i-1}) = \frac{b_{2i-1}(\tau^{2i-1}) \prod\limits_{k=2}^{i} a_{2k-2}(\tau^{2k-2}) \operatorname*{var}\limits_{a}^{b} q_{2k-2}(\tau_{2k-2})}{\prod\limits_{k=1}^{i} a_{2k-1}(\tau^{2k-1})};$$

$$c_{2i}(\tau^{2i}) = \frac{b_{2i}(\tau^{2i}) \prod\limits_{k=1}^{i} a_{2k-1}(\tau^{2k-1}) \operatorname*{var}\limits_{a}^{b} q_{2k-1}(\tau_{2k-1})}{\prod\limits_{k=2}^{i+1} a_{2k-2}(\tau^{2k-2}) \operatorname*{var}\limits_{a}^{b} q_{2k-2}(\tau_{2k-2})}.$$

Теорема 3. Дробь (1) сходится, если

$$\sum_{i=1}^{\infty} \min_{\tau^i} \left\{ b_i(\tau^i) \Big/ \int_a^b [a_{i+1}(\tau^{i+1})\, dq_{i+1}(\tau_{i+1})/b_{i+1}(\tau^{i+1})] \right\}. \tag{12}$$

При реализации цепных дробей на ЭВМ наиболее целесообразно проводить вычисления «снизу вверх», этим достигается выигрыш как в количестве программных операций, так и в машинном времени. Поэтому возникает задача предыдущей оценки достаточного для вычислений числа звеньев дроби.

Теорема 4. Пусть для дроби (1) с положительными компонентами существует число

$$m_0 = \inf_i \min_{\tau^i} \left\{ b_i(\tau^i) \Big/ \int_a^b [a_{i+1}(\tau^{i+1})\, dq_{i+1}(\tau_{i+1})/b_{i+1}(\tau^{i+1})] \right\} > 0. \tag{13}$$

Тогда (1) сходится и число n звеньев дроби, достаточное для вычисления этой дроби с заданной точностью ε, находится из соотношения

$$n \geqslant n_0 = 1 - \ln(\varepsilon/M)/\ln(1 + m_0), \tag{14}$$

где $M = \int\limits_a^b a_1(\tau_1)\, dq_1(\tau_1)/b_1(\tau_1)$.

Замечание. Условие (13) для дроби (1) будет выполняться, например, если для всех $\tau^i \in G_i$ $(i = \overline{1, \infty})$

$$\int_a^b a_i(\tau^i)\, dq_i(\tau_i)/b_i(\tau^i) \leqslant 1, \quad b_i(\tau^i) \geqslant d > 0.$$

Дробь (1) может быть получена с помощью такой последовательности преобразований:

$$\begin{gathered} t_0(w_0) = b_0 + w_0; \quad t_p(w_p; \tau^{p-1}) = \int_a^b \frac{a_p(\tau^p)\, dq_p(\tau_p)}{b_p(\tau^p) + w_p(\tau_p)}; \\ T_0(w_0) = t_0(w_0); \qquad T_p(w_p) = T_{p-1}(t_p(w_p; \tau^{p-1})), \quad p \geqslant 1. \end{gathered} \tag{15}$$

Тогда i-я подходящая дробь выражения (1) система неравенств (10). $= T_i(0)$ для всех $i \geqslant 0$.

Теорема 5. Если дробь, которая является фо образова В данном ем функционала $f = T_i(u_i)$ с неотрицательн Кроме того, интегра $u_i(\tau^i)$, сходится, то значение данной дроби равно данном параграфе

Приложение интегральных цепных дробей к решению двух классов нелинейных операторных уравнений. В данном параграфе представлены решения двух классов операторных уравнений в виде интегральных цепных дробей. Для них последовательность подходящих дробей образует вилку, т. е. выполняется система неравенств (10). Это свойство подходящих дробей дает возможность образования двухсторонних приближений к решению поставленных задач. Кроме того, интегральные цепные дроби имеют много вычислительных достоинств. Среди них особое место принадлежит свойству ненакопления ошибок при приближении значений интегралов, которое отражает вычислительную устойчивость таких дробей.

Нелинейное интегральное уравнение типа двойного аргумента. Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$f(t) = 1/\left[b(t) + \int_a^b \psi(t, \tau) f(\tau)\, d\tau\right], \tag{16}$$

где $b(t)$ и $\psi(t, \tau)$ есть непрерывные положительные функции в $[a;\ b]$ и $[a;\ b]^2$. Частным случаем (16) является уравнение Амбарцумяна — Чандрасекара [1, 5, 6] для радиоактивного излучения

$$\varphi(t) = 1/\left[b + \int_0^1 \frac{\tau\psi(\tau)}{t+\tau}\varphi(\tau)\, d\tau\right], \tag{17}$$

где $b = \left(1 - 2\int_0^1 \psi(\tau)\, d\tau\right)^{1/2}$.

Рассмотрим последовательность преобразований

$$t_p(w(\cdot), \tau_{p-1}) = 1/\left[b(t) + \int_a^b \psi(\tau_{p-1}, \tau_p)\,\omega(\tau_p)\, d\tau_p\right], \quad p \geqslant 1, \quad \tau_0 = t;$$

$$T_p(w(\cdot); t) = T_{p-1}(t_p(w(\cdot);\ \cdot); t), \quad p \geqslant 2; \quad T_1(w(\cdot)) = t_1(w(\cdot), t).$$

Из (16) следует, что

$$f(t) = T_p(f(\cdot); t). \tag{18}$$

В интегральной цепной дроби с положительными компонентами

$$1/\left\{b(t) + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty} \int_a^b [\psi(\tau_{i-1}; \tau_i)\, d\tau_i / b(\tau_i)]\right\} \tag{19}$$

все подходящие дроби $f_i(t) = T_i(0;\ t)$ $(i \geqslant 1)$. Исследуем эту дробь на сходимость. На основании достаточного признака (12) дробь (19) будет сходящейся при выполнении условия

$$\sum_{i=1}^{\infty} \min_{t\in[a;b]} \left\{ b(t) / \int_a^b [\psi(t, \tau)\, d\tau / b(\tau)] \right\} = \infty, \qquad (20)$$

которое в случае положительности функций $b(t)$ и $\psi(t; \tau)$ соответственно в $[a; b]$ и $[a; b]^2$ имеет место.

Значит, дробь (18) сходится для любых $t \in [a; b]$. Кроме того, учитывая положительность функции $f(t)$ в этом промежутке, на основании (18) и теоремы 5 утверждаем, что значение $f(t)$ сходящейся дроби (19) является решением интегрального уравнения (16).

Уравнение Абеля. Исследуем задачу Коши для нелинейного дифференциального уравнения Абеля второго рода

$$yy' = f_2(x)\, y + f_1(x); \qquad (21)$$

$$y(x_0) = y_0. \qquad (22)$$

Это уравнение эквивалентно нелинейному интегральному уравнению

$$y(x) = f_0(x) + \int_{x_0}^{x} [f_1(x)\, dx / y(x)], \qquad (23)$$

где $f_0(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f_2(x)\, dx.$

Рассмотрим последовательность преобразований

$$t_0(w_0; x) = f_0(x) + w_0(x); \quad t_p(w; x_{p-1}) = \int_{x_0}^{x_{p-1}} \frac{f_1(x_p)\, dx_p}{f_0(x_p) + w(x_p)};$$

$$T_0(w_0; x) = t_0(w_0; x); \qquad T_p(w; x) = T_{p-1}(t_p; x). \qquad (24)$$

Из (23) следует, что

$$y(x) = T_p \left(\int_{x_0}^{x_p} \frac{f_1(x_{p+1})\, dx_{p+1}}{y(x_{p+1})};\, x \right). \qquad (25)$$

Пусть $f_0(x)$ и $f_1(x)$ положительны в некотором интервале $(x_0; X)$. Тогда дробь

$$f_0(x) + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x_{i-1}} [f_1(x_i)\, dx_i / f_0(x_i)], \qquad (26)$$

подходящие дроби которой $y_i(x) = T_i(0; x)$, является сходящейся цепной дробью с положительными компонентами. Поскольку в этом случае выражение $\int_{x_0}^{x} [f_1(x)\, dx / y(x)] > 0$, то значение $y(x)$ дроби является решением задачи (21) — (22).