В. Л. МАКАРОВ, В. В. ХЛОБЫСТОВ

Сплайн-аппроксимация функций

В. Л. МАКАРОВ, В. В. ХЛОБЫСТОВ

СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов высших технических
учебных заведений

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1983

ББК 22.16
М 15
УДК 517

Рецензенты:
кафедра высшей математики МИФИ;
проф. В. А. Садовничий

Макаров В. Л., Хлобыстов В. В.

М 15 Сплайн-аппроксимация функций: Учеб. пособие для студентов вузов. — М.: Высш. шк., 1983. — 80 с.

10 к.

В пособии рассматриваются вопросы конструктивного построения интерполяционных сплайнов, порядки приближения на некоторых классах функций, а также экстремальные свойства сплайнов нечетной степени в метрике пространства L_2 и параболических сплайнов в метрике пространства ограниченных функций. Кроме того, рассматривается применение сплайн-функций в задачах численного анализа

Для студентов технических вузов, инженеров, аспирантов. Может быть полезно лицам, интересующимся прикладными вопросами аппарата сплайн-аппроксимации

М $\frac{1702050000-484}{001(01)-83}$ 55 — 83

ББК 22.16
517.2

Владимир Леонидович Макаров
Владимир Владимирович Хлобыстов

СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ

Зав редакцией Е. С Гридасова. Редактор А М. Суходский. Младшие редакторы С. А. Доровских, Н. П Майкова. Художественный редактор В И. Пономаренко. Технический редактор Э. М. Чижевский. Корректор Г. И. Кострикова

ИБ № 4175

Изд № ФМ-753. Сдано в набор 06 06 83. Подп в печать 04.11 83
Формат 84×108 1/32. Бум тип. № 3 Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 4,2 усл печ л 4,31 усл кр отт Уч.-изд л. 3,62. Тираж 8000 экз. Зак № 1873. Цена 10 коп.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул , д. 29/14.

Московская типография № 8 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 101898, Москва, Центр, Хохловский пер , 7

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время теория аппроксимации функций находит все более широкое применение в различных задачах практики. При этом особенной популярностью пользуются многочленная и дробно-рациональная аппроксимации. Однако можно с уверенностью сказать, что аппарат сплайн-приближений, успешно развиваемый в последние годы, является серьезным конкурентом этих аппроксимаций. И дело тут не в «моде», а в реально существующих преимуществах аппарата сплайн-приближений по сравнению с другими. К числу основных преимуществ можно отнести следующие:

1) устойчивость сплайнов относительно локальных возмущений, т. е. поведение сплайна в окрестности точки не сказывается на поведении сплайна в целом, как, например, это имеет место при полиномиальной интерполяции;

2) хорошая сходимость сплайн-интерполяции в отличие от многочленной. В частности, для функций с нерегулярными свойствами гладкости целесообразно использовать сплайн-интерполяцию, а не обычную полиномиальную.

Помимо перечисленных свойств сплайны обладают интересными экстремальными свойствами. Например, сплайны являются решениями задач минимизации функционалов, оценивающих гладкость функций в гильбертовой норме и в норме пространства ограниченных функций.

Кроме того, следует отметить весьма простую реализацию сплайн-функций на ЭВМ. Например, построение интерполяционных сплайнов степени не выше третьей сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, для которых известны эффективные методы решений (метод прогонки).

Все это в совокупности вызывает несомненный интерес теоретиков и прикладников к аппарату сплайн-приближений. В настоящее время сплайн-функции широко применяются в задачах вычислительной математики. К этим задачам можно отнести численное интегрирование и дифференцирование, решение задачи Коши и краевых задач, решение интегральных уравнений и др.

Развитию теории сплайн-приближений содействовали работы таких математиков, как И. Шенберг, Дж. Уолш, Дж. Алберг, Э. Нильсон, Де Бур (США). Из трудов отечественных математиков отметим работы В. М. Тихомирова, Ю. Н. Субботина, Н. П. Корнейчука, В. А. Морозова, Ю. С. Завьялова и др.

Настоящее учебное пособие написано на основании курса лекций, который читался на факультете кибернетики Киевского государственного университета студентам, специализирующимся по прикладной математике.

Данное пособие будет также полезно студентам технических вузов и лицам, интересующимся применением теории сплайнов в инженерных расчетах. Этот интерес может быть проявлен при описании физических процессов, не обладающих регулярными свойствами гладкости, при аппроксимации процессов с приближенно заданными количественными характеристиками, а также в задачах численного анализа. Для чтения пособия вполне достаточно знаний математики в объеме двух курсов технических вузов.

Авторы

ГЛАВА I

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ СПЛАЙНЫ

Под сплайном понимают функцию, «склеенную» из различных кусков обобщенных многочленов по заданному базису. Наибольшее распространение получили полиномиальные сплайны, для которых в качестве базисных функций выбраны функции $1, x, x^2, \ldots$.

В этом пособии мы ограничимся рассмотрением полиномиальных сплайнов.

§ 1.1. Интерполяционные полиномиальные сплайны

Дадим строгое определение полиномиального сплайна. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана сетка

$$\bar{\Delta} : a = \bar{x}_0 < \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \ldots < \bar{x}_l = b. \qquad (1.1.1)$$

Обозначим через P_m множество полиномов степени не выше m, а через $C^{(m)}[a, b]$ — множество вещественных функций, определенных на $[a, b]$ и имеющих непрерывную m-ю производную.

Функция $s_m(x)$ называется *полиномиальным сплайном* степени m дефекта $k (1 \leqslant k \leqslant m)$ с узлами (1.1.1), если:

1^0. $s_m(x) \in P_m, \ \forall x \in [\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}], \ i = \overline{0, l-1}$.

2^0. $s_m(x) \in C^{(m-k)}[a, b]$.

Из определения следует, что $(m-k+1)$-я производная может быть разрывной на $[a, b]$. В дальнейшем будем рассматривать сплайны дефекта 1, т. е. при $k=1$.

Пусть теперь кроме сетки $\bar{\Delta}$ заданы сетка

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b \qquad (1.1.2)$$

и некоторые вещественные числа y_i, $i = \overline{0, n}$.

Сплайн $s_m(x)$ называется *интерполирующим некоторую функцию* $f(x)$ *на сетке* Δ, если он удовлетворяет следующим условиям:

1^0. $s_m(x) \in P_m, \ \forall x \in [\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}], \ i = \overline{0, l-1}$.

2^0. $s_m(x) \in C^{(m-1)}[a, b]$. 3^0. $s_m(x_i) = y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$.

При этом узлы сетки $\bar{\Delta}$ называются *узлами сплайна,* а узлы сетки Δ — *узлами интерполяции.*

Для сплайнов нечетной степени будем полагать, что сетки Δ и $\bar{\Delta}$ совпадают. Для сплайнов же четной степени по соображениям, которые будут изложены ниже, $\Delta \neq \bar{\Delta}$.

В качестве простейшего примера интерполяционных сплайнов рассмотрим интерполяционный сплайн первой степени.

Функция $s(x) = s_1(x)$ называется *сплайном первой степени,* интерполирующим некоторую заданную функцию $f(x)$ в узлах сетки Δ, если выполнены следующие условия:

1^0. $s(x) \in P_1,\ \forall x \in [x_i, x_{i+1}],\ i = \overline{0, n-1}$.

2^0. $s(x) \in C[a, b]$. 3^0. $s(x_i) = y_i = f(x_i),\ i = \overline{0, n}$.

Таким образом, в этом простейшем случае мы получаем обыкновенную кусочно-линейную интерполяцию.

В дальнейшем нам понадобится понятие модуля непрерывности функции. Функция $\omega(\delta, f)$ называется *модулем непрерывности* функции $f(x) \in C[a, b]$, если

$$(\delta, f) = \max_{\substack{x, x+t \in [a,b] \\ |t| \leqslant \delta}} |f(x+t) - f(x)|,\quad 0 \leqslant \delta \leqslant b-a.$$

Теорема 1.1.1. *Если* $f(x) \in C^{(1)}[a, b]$ и $s(x)$ — *интерполяционный сплайн первой степени для функции* $f(x)$ *на сетке* Δ, *то имеют место оценки*

$$\|f^{(j)}(x) - s^{(j)}(x)\|_{C[a,b]} \leqslant K_j \cdot \|\Delta\|^{1-j} \cdot \omega(\|\Delta\|, f'),\quad j = 0, 1,$$

где

$$\|\varphi\|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |\varphi(x)|,\quad \|\Delta\| = \max_i (x_{i+1} - x_i),\quad 2K_0 = K_1 = 1,$$

а под $s'(x_i)$ *понимается одна из производных* $s'(x_i \pm 0)$.

□ На отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ имеем

$$|s'(x) - f'(x)| = \left| \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} - f'(x) \right| = |f'(\xi) - f'(x)| \leqslant \omega(\|\Delta\|, f'),$$

$$\xi \in (x_i, x_{i+1}),\quad \Delta y_i = y_{i+1} - y_i,\quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i.$$

Далее, получаем

$$|s(x) - f(x)| = \left| \int_y^x (s'(t) - f'(t))\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_y^x |s'(t) - f'(t)|\, dt \right| \leqslant \frac{1}{2} \|\Delta\| \cdot \omega(\|\Delta\|, f').$$

Здесь y — ближайший к x конец отрезка $[x_i, x_{i+1}]$.

Замечание. Если рассмотреть последовательность сеток

$$\Delta_m : a = x_0^m < x_1^m < \ldots < x_{n_m}^m = b$$

и последовательность сплайнов $s(\Delta_m, x)$, интерполирующих функцию $f(x) \in C^{(1)}[a, b]$ в узлах сеток Δ_m, то при выполнении условия $\|\Delta_m\| \to 0$ при $m \to \infty$ из предыдущей теоремы следует равномерная сходимость сплайнов $s(\Delta_m, x)$ к функции $f(x)$ и их производных $s'(\Delta_m, x)$ — к $f'(x)$.

§ 1.2. Кубические интерполяционные сплайны

Пусть заданы сетка Δ и некоторые действительные числа y_i, $i = \overline{0, n}$.

Функция $s(x)$ называется *кубическим сплайном*, интерполирующим функцию $f(x)$ в узлах сетки Δ, если выполняются следующие условия:

$$1^0.\ s(x) \in P_3,\quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}],\ i = \overline{0, n-1}.$$

$$2^0.\ s(x) \in C^{(2)}[a, b],\quad 3^0.\ s(x_i) = y_i = f(x_i),\ i = \overline{0, n}.$$

Интерполяционный кубический сплайн $s(x)$ называется *периодическим*, если $s^{(j)}(a+0) = s^{(j)}(b-0)$, $j = \overline{0, 2}$.

В дальнейшем для простоты выкладок мы будем рассматривать лишь равномерные сетки, т. е. сетки, для которых $x_{k+1} - x_k = h = \mathrm{const}$, $k = \overline{0, n-1}$. Основные из приведенных здесь результатов имеют место и для случая произвольных сеток.

Рассмотрим вопросы существования и единственности интерполяционного кубического сплайна. Доказательство существования проведем конструктивно. Введем обозначение $s''(x_i) = m_i$, $i = \overline{0, n}$. Тогда на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ ввиду линейности $s''(x)$ имеем

$$s''(x) = s''(x_i) + \frac{s''(x_{i+1}) - s''(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i),$$

или

$$s''(x) = m_i + \frac{\Delta m_i}{h}(x - x_i),\quad \Delta m_i = m_{i+1} - m_i. \qquad (1.2.1)$$

Проинтегрировав дважды соотношение (1.2.1) в пределах от x_i до x, получим

$$s'(x)=s'(x_i)+m_i(x-x_i)+\frac{\Delta m_i}{2h}(x-x_i)^2, \tag{1.2.2}$$

$$s(x)=y_i+s'(x_i)(x-x_i)+\frac{m_i}{2}(x-x_i)^2+\frac{\Delta m_i}{6h}(x-x_i)^3. \tag{1.2.3}$$

Полагая в равенстве (1.2.3) $x=x_{i+1}$, находим

$$\Delta y_i=s'(x_i)h+\frac{m_i}{2}h^2+\frac{\Delta m_i}{6h}h^3,$$

откуда следует, что

$$s'(x_i)=\frac{\Delta y_i}{h}-\frac{h}{6}(2m_i+m_{i+1}), \tag{1.2.4}$$

$$s(x)=y_i+\left[\frac{\Delta y_i}{h}-\frac{h}{6}(2m_i+m_{i+1})\right](x-x_i)+$$

$$+\frac{m_i}{2}(x-x_i)^2+\frac{\Delta m_i}{6h}(x-x_i)^3. \tag{1.2.5}$$

Подставив теперь выражение для $s'(x_i)$ из формулы (1.2.4) в (1.2.2), на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ получим

$$s'(x)=\frac{\Delta y_i}{h}-\frac{h}{6}(2m_i+m_{i+1})+m_i(x-x_i)+\frac{\Delta m_i}{2h}(x-x_i)^2. \tag{1.2.6}$$

Аналогично, на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ имеем

$$s'(x)=\frac{\Delta y_i}{h}-\frac{h}{6}(2m_{i-1}+m_i)+m_{i-1}(x-x_{i-1})+$$

$$+\frac{\Delta m_{i-1}}{2h}(x-x_{i-1})^2. \tag{1.2.7}$$

Далее, так как $f(x)\in C^{(2)}[a, b]$, то $s'(x_i+0)=s'(x_i-0)$ и из соотношений (1.2.6) и (1.2.7) следует

$$\frac{\Delta y_i}{h}-\frac{h}{6}(2m_i+m_{i+1})=\frac{\Delta y_{i-1}}{h}-\frac{h}{6}(2m_{i-1}+m_i)+$$

$$+hm_{i-1}+\frac{h}{2}\Delta m_{i-1}.$$

Это можно переписать в другой форме:

$$m_{i-1}+4m_i+m_{i+1}=12f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1});\quad i=\overline{1,\ n-1}, \tag{1.2.8}$$

где $f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ — вторая разделенная разность функции $f(x)$.

Итак, получаем систему $n-1$ линейных алгебраических уравнений (1.2.8) относительно $n+1$ неизвестных $m_0, m_1, \ldots, m_n$.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть сплайн $s(x)$ — периодический. Тогда поступим следующим образом. К системе уравнений (1.2.8) добавим еще одно уравнение при $i=n$:

$$m_{n-1}+4m_n+m_{n+1}=12f(x_{n-1}, x_n, x_{n+1}) \tag{1.2.9}$$

и два краевых условия:

$$m_0=m_n,\ m_1=m_{n+1}\,(x_{n+1}=x_n+h;\ y_{n+1}=y_1). \tag{1.2.10}$$

Система (1.2.8) с учетом равенств (1.2.9) и (1.2.10) примет вид

$$\begin{aligned}
&4m_1+m_1+m_n=12f(x_0, x_1, x_2),\\
&m_1+4m_2+m_3=12f(x_1, x_2, x_3),\\
&m_2+4m_3+m_4=12f(x_2, x_3, x_4),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&m_{n-2}+4m_{n-1}+m_n=12f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n).\\
&m_{n-1}+4m_n+m_1=12f(x_{n-1}, x_n, x_{n+1}),
\end{aligned} \tag{1.2.11}$$

или в матричной форме

$$Am=f, \tag{1.2.12}$$

где

$$m=(m_1,\ m_2, \ldots, m_n)^{\mathrm{T}},$$

$$f=(12f(x_0, x_1, x_2),\ 12f(x_1, x_2, x_3), \ldots$$
$$\ldots, 12f(x_{n-1}, x_n, x_{n+1})^{\mathrm{T}},$$

$$A=\begin{pmatrix} 4\ 1\ 0\ 0 \ldots 0\ 0\ 1\\ 1\ 4\ 1\ 0 \ldots 0\ 0\ 0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ 0\ 0\ 0\ 0 \ldots 1\ 4\ 1\\ 1\ 0\ 0\ 0 \ldots 0\ 1\ 4 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\|a_{ij}\|$ называется *матрицей с доминирующей главной диагональю,* если для ее элементов справедливо соотношение $R:\ \min\limits_i\left(|a_{ii}|-\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|\right)=q>0.$

В дальнейшем нам понадобится следующий результат.

Лемма 1.2.1. *Матрица с доминирующей главной диагональю невырождена.*

□ Предположим противное, т. е. что матрица $\|a_{ij}\|$ с условием R вырождена. Тогда система линейных однородных уравнений $Ax=0$ имеет нетривиальное решение. Запишем эту систему в координатной форме:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=0, \quad i=\overline{1, n}.$$

Пусть индекс k таков, что $|x_k|=\|x\|\geqslant|x_i|$, $i=\overline{1, n}$. Тогда из k-го уравнения системы получим

$$|a_{kk}|\,\|x\|\leqslant\sum_{j\neq k}|a_{kj}|\,|x_j|\leqslant\|x\|\sum_{j\neq k}|a_{kj}|.$$

Из последнего неравенства, учитывая, что $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\text{т}}$ — нетривиальное решение ($\|x\|\neq 0$), имеем $|a_{kk}|\leqslant\sum\limits_{j\neq k}|a_{kj}|$.

Полученное с условием R противоречие и доказывает утверждение леммы. ■

Вернемся теперь к вопросу о существовании и единственности кубического сплайна с периодическими краевыми условиями. Легко видеть, что в этом случае $q=2$ и, следовательно, система линейных уравнений (1.2.12) на основании леммы 1.2.1 имеет единственное решение и соответственно сплайн $s(x)$ — единственный. Решив систему (1.2.12), найдем $m_0, m_1, \ldots, m_n$. Затем, подставив их в формулу (1.2.5), получим искомое выражение для сплайна. Существование и единственность доказаны.

2. Пусть теперь сплайн $s(x)$ — непериодический. Тогда к системе уравнений (1.2.8) добавим два краевых условия:

$$4m_0+\lambda m_1=d_\lambda, \quad \mu m_{n-1}+4m_n=d_\mu$$

и получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&4m_0+\lambda m_1=d_\lambda,\\
&m_0+4m_1+m_2=12f(x_0, x_1, x_2),\\
&m_1+4m_2+m_3=12f(x_1, x_2, x_3),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&m_{n-2}+4m_{n-1}+m_n=12f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n), \quad \mu m_{n-1}+4m_n=d_\mu.
\end{aligned}$$

Ее можно записать в матричной форме:

$$B\overline{m}=\overline{f}, \tag{1.2.13}$$

где

$$\overline{m}=(m_0, m_1,\dots, m_n)^{\text{т}},$$

$$\overline{f}=(d_\lambda,\ 12f(x_0, x_1, x_2),\dots,\ 12f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)\,d_\mu)^{\text{т}},$$

$$B=\begin{pmatrix} 4 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu & 4 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что в квадрате $(|\lambda|<4,\ |\mu|<4)$ матрица B невырождена; следовательно, система (1.2.13) имеет единственное решение и соответственно сплайн $s(x)$ существует и единствен. Решив систему (1.2.13) и воспользовавшись формулами (1.2.3) и (1.2.4), построим сам сплайн.

Замечание 1. Если для интерполируемой функции значения ее первых производных на концах отрезка $[a, b]$ известны: $f'(a)=y_0'$, $f'(b)=y_n'$, то в приведенных выше краевых условиях следует положить

$$\lambda=\mu=2,\ d_\lambda=\frac{12}{h}\left(\frac{\Delta y_0}{h}-y_0'\right),\ d_\mu=\frac{12}{h}\left(y_n'-\frac{\Delta y_{n-1}}{h}\right)$$

Это непосредственно вытекает из равенства (1.2.7) при $x=a$, $i=1$ и $x=b$, $i=n$.

Замечание 2. Для решения трехдиагональных систем вида (1.2.13) эффективным методом является метод прогонки. Он заключается в следующем. Для системы уравнений

$$Ax=y,\ x, y\in R_n,$$

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & a_3 & b_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_n & a_n \end{pmatrix}$$

будем искать решение в виде следующей рекуррентной процедуры:

$$x_i=p_ix_{i+1}+q_i,\ i=\overline{1,\ n-1}. \tag{1.2.14}$$

Из i-го уравнения системы имеем

$$c_i x_{i-1} + a_i x_i + b_i x_{i+1} = y_i. \qquad (1.2.15)$$

Далее исключаем неизвестное x_{i-1} из уравнений (1.2.15) и (1.2.14), заменяя в последнем i на $i-1$. После элементарных преобразований получим

$$(a_i + c_i p_{i-1}) x_i + b_i x_{i+1} = y_i - c_i q_{i-1}.$$

Сравнивая теперь данное соотношение с (1.2.14), получим рекуррентные формулы для определения коэффициентов p_i, q_i (прямая прогонка):

$$p_i = -\frac{b_i}{a_i + c_i p_{i-1}}, \quad q_i = \frac{y_i - c_i q_{i-1}}{a_i + c_i p_{i-1}}, \quad p_0 = q_0 = 0.$$

Поскольку $x_n = q_n$, остальные неизвестные определяем из соотношения (1.2.14) (обратная прогонка). Можно показать (см., например, [9]), что для матрицы с диагональным преобладанием данный алгоритм устойчив в смысле накопления погрешностей округления ($|p_i| < 1$). Там же (см. [9]) можно найти аналогичную процедуру для решения систем уравнений в случае периодического сплайна.

Лемма 1.2.2. *Если матрица A имеет доминирующую главную диагональ, то*

$$\|A^{-1}\| \leqslant \left\{\min_i \left(|a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\right)\right\}^{-1} = q^{-1},$$

где $\|A\|$ — операторная норма матрицы, индуцированная первой нормой вектора.

□ Известно (см., например, [6]), что операторная норма матрицы, индуцированная первой нормой вектора, имеет вид $\|A\| = \max_i \sum_{j=1} |a_{ij}|$. Для матрицы A с доминирующей главной диагональю имеем $Ax = y$, $x = A^{-1}y$. Пусть $\|x\| = \max_i |x_i| = |x_k|$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Тогда

$$\|y\| = \|Ax\| = \max_i \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right| \geqslant \left|\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j\right| =$$

$$= \left|a_{kk} x_k + \sum_{j \neq k} a_{kj} x_j\right| \geqslant |x_k| \cdot |a_{kk}| - \left|\sum_{j \neq k} a_{kj} x_j\right| \geqslant$$

$$\geqslant |x_k| \cdot |a_{kk}| - |x_k| \sum_{j \neq k} |a_{kj}| \geqslant \|x\| \cdot \min_i \left(|a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\right) = \|x\| q.$$

Далее, получаем

$$\|A^{-1}\| = \sup_{y\neq 0} \frac{\|A^{-1}y\|}{\|y\|} = \sup_{Ax\neq 0} \frac{\|x\|}{\|Ax\|} \leqslant q^{-1}. \blacksquare$$

В случае периодического сплайна для обратной матрицы системы (1.2.12) справедлива оценка

$$\|A^{-1}\| \leqslant 0{,}5 \quad (q=2),$$

а в случае непериодического сплайна — оценка

$$\|B^{-1}\| \leqslant q^{-1}, \; q = \min(2,\; 4-|\lambda|,\; 4-|\mu|),\; |\lambda|<4,\; |\mu|<4.$$

Рассмотрим теперь некоторые оценки точности приближения функции $f(x)$ сплайном $s(x)$. Обозначим через $\tilde{C}^{(n)}[a, b]$ множество $(b-a)$-периодических функций, имеющих на $(-\infty, \infty)$ непрерывную n-ю производную.

Ограничиваясь случаем периодического сплайна, докажем справедливость следующих теорем.

Теорема 1.2.1. *Пусть кубический сплайн $s(x)$ интерполирует в узлах равномерной сетки Δ функцию $f(x) \in \tilde{C}^{(2)}[a, b]$ и удовлетворяет периодическим краевым условиям* (1.2.10). *Тогда справедливы оценки*

$$\|f^{(i)}(x) - s^{(i)}(x)\|_{C[a,b]} \leqslant K_i h^{2-i} \omega(h, f''),$$

$$i = 0, 1, 2, \quad K_2 = K_1 = 8K_0 = 5.$$

□ Учитывая равенство (1.2.1), на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ имеем

$$|f''(x) - s''(x)| = \left| f''(x) - m_i - \frac{\Delta m_i}{h}(x - x_i) \right| =$$

$$= \left| \frac{x_{i+1}-x}{h}(f''(x) - f''(x_i)) + \frac{x-x_i}{h}(f''(x) - f''(x_{i+1})) + \right.$$

$$\left. + \frac{x_{i+1}-x}{h}(f''(x_i) - m_i) + \frac{x-x_i}{h}(f''(x_{i+1}) - m_{i+1}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \omega(h, f'') + \max_i |f''(x_i) - m_i|. \tag{1.2.16}$$

Оценим $\max\limits_i |f''(x_i) - m_i|$. Для этого систему (1.2.8) перепишем в виде

$$m_{i-1} - f''(x_{i-1}) + 4(m_i - f''(x_i)) + m_{i+1} - f''(x_{i+1}) =$$

$$= 6f''(\xi_i) - f''(x_{i-1}) - 4f''(x_i) - f''(x_{i+1}) = a_i, \tag{1.2.17}$$

$$\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1}).$$

Матрица A системы (1.2.17) имеет главную диагональ и $\|A^{-1}\| \leqslant 0{,}5$. Поэтому

$$\max_i |m_i - f''(x_i)| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \max_i |a_i| \leqslant 0{,}5 \max_i |a_i|. \qquad (1.2.18)$$

Далее, получаем

$$\max_i |a_i| \leqslant \max_i |f''(\xi_i) - f''(x_{i-1})| +$$

$$+ 4 \max_i |f''(\xi_i) - f''(x_i)| + \max_i |f''(\xi_i) - f''(x_{i+1})| \leqslant$$

$$\leqslant \omega(2h, f'') + 4\omega(h, f'') + \omega(2h, f'') \leqslant 8\omega(h, f'').$$

Учитывая соотношения (1.2.18) и (1.2.16), находим

$$|f''(x) - s''(x)| \leqslant \omega(h, f'') + 4\omega(h, f'') = 5\omega(h, f''),$$

что и доказывает одну из оценок при $i=2$.

Согласно теореме Ролля, на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ найдется такая точка ξ, в которой $f'(\xi) - s'(\xi) = 0$. Принимая это во внимание, а также используя формулу Лагранжа для функции $f' - s'$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, получаем

$$|f'(x) - s'(x)| = |(f'(x) - s'(x)) - (f'(\xi) - s'(\xi))| =$$

$$= |(f''(\theta) - s''(\theta))(x - \xi)| \leqslant 5h\omega(h, f'') \text{ (где } \theta \in (\xi, x)).$$

Тем самым оценка при $i=1$ доказана. Наконец, оценим точность приближения функции $f(x)$ сплайном $s(x)$. Для этого введем вспомогательную функцию

$$g(z) = f(z) - s(z) - R(z - x_i)(z - x_{i+1}),$$

где постоянная R выбирается из условия $g(x) = 0$, $x \in (x_i, x_{i+1})$. Поскольку $g(x_i) = g(x) = 0$ и $g(x) = g(x_{i+1}) = 0$, существует такая точка ξ_1, что $g'(\xi_1) = 0$, и такая точка ξ_2, что $g'(\xi_2) = 0$; $\xi_1 \in (x_i, x)$, $\xi_2 \in (x, x_{i+1})$. Снова применяя теорему Ролля к функции $g'(z)$ на отрезке $[\xi_1, \xi_2]$, имеем $g''(\xi) = 0$, $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$. Следовательно,

$$f''(\xi) - s''(\xi) - 2R = 0, \quad |R| = \frac{1}{2} |f''(\xi) - s''(\xi)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{5}{2} \omega(h, f'').$$

Так как $g(x) = 0$, $x \in (x_i, x_{i+1})$, то

$$f(x) - s(x) = R(x - x_i)(x - x_{i+1}),$$

$$|f(x) - s(x)| \leqslant |R|(x - x_i)(x_{i+1} - x) \leqslant \frac{5}{8} h^2 \omega(h, f''). \quad \blacksquare$$

Теорема 1.2.2. *Пусть кубический сплайн $s(x)$ интерполирует в узлах равномерной сетки Δ функцию $f(x)\in C^{(1)}[a, b]$ и удовлетворяет периодическим краевым условиям* (1.2.10). *Тогда имеют место оценки*

$$\|f^{(i)}(x)-s^{(i)}(x)\|_{C[a,b]}\leqslant K_i h^{1-i}\omega(h, f'),\ i=0, 1,$$

$$K_1=2K_0=5.$$

□ Из соотношений (1.2.2) и (1.2.4) на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ имеем

$$|s'(x)-f'(x)|=\left|\frac{\Delta f_i}{h}-\frac{h}{6}(2m_i+m_{i+1})+m_i(x-x_i)+\right.$$

$$\left.+\frac{\Delta m_i}{2h}(x-x_i)^2-f'(x)\right|=$$

$$=\left|\alpha(t)m_i+\beta(t)m_{i+1}+\frac{\Delta f_i}{h}-f'(x)\right|,$$

где $\alpha(t)=-\frac{h}{3}+t-\frac{1}{2h}t^2$, $\beta(t)=-\frac{h}{6}+\frac{1}{2h}t^2$, $t=x-x_i\in[0, h]$.

Далее, принимая во внимание, что

$$\max_{t\in[0,h]}|\alpha(t)|=\max_{t\in[0,h]}|\beta(t)|=\frac{h}{3},$$

получим

$$|s'(x)-f'(x)|\leqslant|m_i||\alpha(t)|+|m_{i+1}||\beta(t)|+$$

$$+|f'(\xi)-f'(x)|\leqslant\frac{2h}{3}\|m\|+\omega(h, f').$$

Учитывая результат предыдущей леммы, имеем

$$\|m\|\leqslant\|A^{-1}\|\cdot\|f\|\leqslant 0{,}5\cdot 12\max_k|f(x_{k-1}, x_k, x_{k+1})|=$$

$$=6\max_k\frac{1}{2h^2}|(f(x_{k+1})-f(x_k))-(f(x_k)-f(x_{k-1}))|=$$

$$=\frac{3}{h^2}\max_k|f'(\xi_k)h-f'(\xi_{k-1})h|\leqslant\frac{3}{h}\omega(2h, f')\leqslant\frac{6}{h}\omega(h, f')$$

$$(\xi_k\in(x_k, x_{k+1}),\ \xi_{k-1}\in(x_{k-1}, x_k)),$$

Окончательно получим

$$|s'(x)-f'(x)|\leqslant\frac{2h}{3}\,\frac{6}{h}\,\omega(h, f')+\omega(h, f')=5\omega(h, f'),$$

$$|f(x)-s(x)|=\left|\int_y^x (f'(t)-s'(t))\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_y^x |f'(t)-s'(t)|\,dt\right|\leqslant \frac{5}{2}h\omega(h, f'),$$

где y — ближайший к x конец отрезка $[x_i, x_{i+1}]$. Так как полученные оценки не зависят от отрезка $[x_i, x_{i+1}]$, $i=\overline{0, n-1}$, то можно утверждать, что теорема полностью доказана. ■

Замечание 1. Пусть выполнены условия предыдущей теоремы и, кроме того, $f'(x)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha\in(0, 1]$. Тогда из теоремы 1.2.2 следует, что

$$\|f^{(i)}(x)-s^{(i)}(x)\|_{C[a,b]}=O(h^{1+\alpha-i}),\quad i=0,\ 1.$$

Замечание 2. Если рассмотреть на $[a, b]$ последовательность равномерных сеток Δ_m таких, что $\lim\limits_{m\to\infty}\|\Delta_m\|=\lim\limits_{m\to\infty}h_m=0$, то на основании теоремы 1.2.2 последовательность кубических сплайнов, интерполирующих периодическую функцию $f(x)$ на последовательности сеток Δ_m, равномерно сходится к функции $f(x)$, а последовательность их производных равномерно сходится к $f(x)$.

Теорема 1.2.3. *Пусть $s(x)$ — кубический сплайн, интерполирующий функцию $f(x)\in\tilde{C}[a, b]$ на равномерной сетке Δ, удовлетворяет периодическим краевым условиям* (1.2.10). *Тогда*

$$\|f(x)-s(x)\|_{C[0,b]}\leqslant \frac{7}{4}\omega(h, f).$$

□ Вследствие равенств (1.2.3) и (1.2.4) на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ имеем

$$|s(x)-f(x)|=\left|y_i+\frac{\Delta y_i}{h}(x-x_i)-\frac{h}{6}(2m_i+m_{i+1})(x-x_i)+\right.$$

$$\left.+\frac{m_i}{2}(x-x_i)^2+\frac{\Delta m_i}{6h}(x-x_i)^3-f(x)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|f(x)-y_i-\frac{\Delta y_i}{h}(x-x_i)\right|+|m_i|\left(\frac{1}{6h}t^3-\frac{1}{2}t^2+\frac{h}{3}t\right)+$$

$$+|m_{i+1}|\left(-\frac{1}{6h}t^3+\frac{h}{6}t\right),\quad t=x-x_i\in[0, h];$$

$$|s(x)-f(x)|\leqslant\left|\frac{x_{i+1}-x}{h}(f(x)-y_i)\right|+\frac{x-x_i}{h}(f(x)-y_{i+1})\Big|+$$

$$+\|m\|\left(-\frac{1}{2}t^2+\frac{h}{2}t\right)\leqslant\omega(h,f)+\frac{h^2}{8}\|m\|;$$

$$\|m\|\leqslant\|A^{-1}\|\cdot 12\max_k|f(x_{k-1},x_k,x_{k+1})|\leqslant$$

$$\leqslant 6\max_k\frac{1}{2h^2}|(f(x_{k+1})-f(x_k))-(f(x_k)-f(x_{k-1}))|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{3}{h^2}\cdot 2\omega(h,f)=\frac{6}{h^2}\omega(h,f).$$

Окончательно на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ получаем

$$|s(x)-f(x)|\leqslant\omega(h,f)+\frac{3}{4}\omega(h,f)=\frac{7}{4}\omega(h,f). \blacksquare$$

§ 1.3. Параболические интерполяционные сплайны

Если следовать предыдущей схеме для построения параболических сплайнов (т. е. чтобы узлы сплайна совпадали с узлами интерполяции), то могут возникнуть следующие трудности:

1) можно показать (см. [12]), что при некоторых (например, периодических) краевых условиях сплайн $s(x)=s_2(x)$ не всегда существует;

2) для сетки

$$\Delta: a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$$

число параметров сплайна равно $3n$ (n участков, на каждом из которых сплайн имеет вид $a_ix^2+b_ix+c_i$), а число уравнений для их определения, как нетрудно видеть, равно $(2n-2)+(n+1)=3n-1$, т. е. имеется один свободный параметр. Поэтому, отдавая предпочтение одному из концов отрезка (краевое условие), можно получить неустойчивый вычислительный процесс для определения параметров сплайна (быстрый рост ошибки и сильную осцилляцию самого сплайна). Пример такого сплайна можно найти в [12].

В связи с этим узлы параболического сплайна $s(x)$ определяются сеткой

$$\bar{\Delta}: a=\bar{x}_0<\bar{x}_1<\ldots<\bar{x}_{n-1}<\bar{x}_n<b=\bar{x}_{n+1},$$

где $x_{i-1}<\bar{x}_i<x_i$, $i=\overline{1,n}$.