В. Т. ВОДНЕВ,
А. Ф. НАУМОВИЧ,
Н. Ф. НАУМОВИЧ

ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

В. Т. ВОДНЕВ,
А. Ф. НАУМОВИЧ,
Н. Ф. НАУМОВИЧ

Основные математические формулы

Под редакцией профессора
Ю. С. Богданова

МИНСК
«ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»
1980

Воднев В. Т. и др.

В62 Основные математические формулы / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович; Под ред. Ю. С. Богданова.— Мн.: Выш. школа, 1980.—336 с., ил.

В пер.: 90 коп.

В справочнике собраны основные формулы из начальных разделов математики, дифференциального и интегрального исчислений, аналитической и дифференциальной геометрии, линейной алгебры, векторного анализа, теории дифференциальных уравнений, математической логики, теории вероятностей и математической статистики.

Рассчитан на студентов вузов и техникумов, инженеров и техников, а также на школьников старших классов, абитуриентов и лиц, занимающихся математическим самообразованием.

$\text{В}\,\frac{20200-126}{\text{М }304(05)-80}\,17-80$ **1702010000**

ББК 22.1я2
51

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время все большее значение приобретает подготовка специалистов по фундаментальным научным дисциплинам, в том числе по математике. В связи с этим на разных уровнях расширяется и углубляется содержание занятий по математике, что требует привлечения новых методических средств. В частности, оказывается целесообразным широкое применение различных подручных пособий.

Одним из таких пособий призван служить сборник «Основные математические формулы», составленный на основе разработок, ведшихся в Белорусском государственном университете на кафедре высшей математики факультета прикладной математики. Эти разработки предназначены в первую очередь для использования при работе над учебным материалом, а также на занятиях различных типов.

Вместе с тем необходимо подчеркнуть, что пособия такого рода должны способствовать усвоению содержательного математического материала, но никак не заменять его. Свободное владение материалом предполагает, разумеется, наличие твердых навыков в проведении рассуждений и выкладок в основных случаях непосредственно, без использования справочных материалов.

Справочник «Основные математические формулы» рассчитан и на читателей, закончивших какой-то цикл обучения, которые, помня о существовании нужных формул, могут быстро найти их для практического использования. Здесь мы имеем в виду в первую очередь абитуриентов, готовящихся к поступлению в вуз, студентов, инженеров и др.

Справочник «Основные математические формулы» состоит из тринадцати глав. Включая в каждую главу соответствующий материал, авторы не заботились ни о делении материала на школьный и вузовский, ни о логической связи между главами.

Внутри каждой главы вводятся необходимые обозначения и приводятся основные формулы, зачастую без исчерпывающего объяснения условий их применения. Как правило, не указываются и естественные ограничения на переменные.

В тексте используется прямоугольная декартова система координат (если не оговорено противное). Для упрощения формулировок изредка привлекаются символы $\forall$ («любой»), $\exists$ («существует»), $\Rightarrow$ («следует»), $\Leftrightarrow$ («равносильно», «тогда и только тогда»), $\neg$ (отрицание) и некоторые другие.

Авторы выражают благодарность доцентам С. В. Новикову и А. И. Калинину, оказавшим существенную помощь при написании соответственно глав «Математическая логика» и «Теория вероятностей и математическая статистика».

Мы уверены, что издание не лишено недостатков, и будем очень благодарны всем, кто пришлет свои замечания и пожелания. Наш адрес: 220080, Минск, 80, БГУ им. В. И. Ленина, кафедра высшей математики факультета прикладной математики.

НЕКОТОРЫЕ ПОСТОЯННЫЕ

(с точностью до 0,0001)

$\pi = 3{,}1416.$

$2\pi = 6{,}2832.$

$\frac{\pi}{2} = 1{,}5708.$

$\frac{\pi}{3} = 1{,}0472.$

$\frac{\pi}{4} = 0{,}7854.$

$\frac{\pi}{6} = 0{,}5236.$

$\frac{1}{\pi} = 0{,}3183.$

$\pi^2 = 9{,}8696.$

$\pi^3 = 31{,}0063.$

$\pi^4 = 97{,}4091.$

$\sqrt{\pi} = 1{,}7725.$

$\frac{\pi}{180} = 0{,}0175.$

$\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 = 0{,}0003.$

$e = 2{,}7183.$

$e^2 = 7{,}3891.$

$\frac{1}{e} = 0{,}3679.$

$\sqrt{e} = 1{,}6487.$

$M = \lg e = 0{,}4343.$

$\ln 2 = 0{,}6931.$
$\ln 3 = 1{,}0986.$
$\ln 4 = 1{,}3863.$
$\ln 5 = 1{,}6094.$

$\frac{1}{M} = \ln 10 = 2{,}3026.$

$\ln 6 = 1{,}7918.$
$\ln 7 = 1{,}9459.$
$\ln 8 = 2{,}0794.$
$\ln 9 = 2{,}1972.$

$$\sqrt{2} = 1,4142.$$
$$\sqrt{3} = 1,7321.$$
$$\sqrt{5} = 2,2361.$$
$$\sqrt{6} = 2,4495.$$
$$\frac{1}{3} = 0,3333.$$
$$\frac{1}{6} = 0,1667.$$
$$\frac{1}{2!} = \frac{1}{2} = 0,5000.$$
$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{6} = 0,1667.$$
$$\frac{1}{4!} = \frac{1}{24} = 0,0417.$$
$$\sqrt{7} = 2,6458.$$
$$\sqrt{8} = 2,8284.$$
$$\sqrt{10} = 3,1623.$$
$$\frac{1}{7} = 0,1429.$$
$$\frac{1}{9} = 0,1111.$$
$$\frac{1}{5!} = \frac{1}{120} = 0,0083.$$
$$\frac{1}{6!} = \frac{1}{720} = 0,0014.$$
$$\frac{1}{7!} = \frac{1}{5040} = 0,0002.$$

Глава I. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. МНОЖЕСТВА

Множества

Множество A, состоящее из элементов x, y, ...,

$$A = \{x,\ y,\ \ldots\},\ x \in A,\ y \in A,\ \ldots$$

Множество A, состоящее из элементов x, удовлетворяющих условию P,

$$A = \{x \mid x \text{ удовлетворяет условию } P\}.$$

$\varnothing$ — пустое множество.

$A \subset B$ — A подмножество множества B.

$A = B$ — множества A и B совпадают.

Объединение множеств

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\},$$
$$A \cup B = B \cup A,$$
$$A \cup A = A,$$
$$A \cup \varnothing = A,$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$A \subset A \cup B,\ B \subset A \cup B.$$

Пересечение множеств

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и одновременно } x \in B\},$$
$$A \cap B = B \cap A,$$
$$A \cap A = A,$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing,$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

$$A \cap B \subset A, \ A \cap B \subset B,$$
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Разность множеств

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\},$$
$$A \setminus A = \varnothing,$$
$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C),$$
$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B),$$
$$A = (A \cap B) \cup (A \setminus B).$$

Дополнение множества до основного множества S

$$CA = S \setminus A \quad (A \subset S),$$
$$C(CA) = A,$$
$$A \subset B \Leftrightarrow CB \subset CA.$$

Принцип двойственности

$$C(A \cap B) = CA \cup CB,$$
$$C(A \cup B) = CA \cap CB.$$

§ 2. ПЛАНИМЕТРИЯ

Некоторые обозначения

$[AB]$ — отрезок с концами A и B,
$|AB|$ — длина отрезка $[AB]$,
(AB) — прямая, проходящая через A и B,
$[AB)$ — луч с началом A, проходящий через B,
$\angle ABC$ — угол с вершиной в точке B,
$\widehat{ABC}$ — величина угла,
d — величина прямого угла,
1° — один градус, $\frac{1}{180}$ часть развернутого угла, $\alpha \cdot 1^\circ = \alpha^\circ$,

$1'$ — 1 минута, $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ = \frac{1}{60} \cdot 1^\circ$,

$1''$ — 1 секунда, $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \frac{1}{60} \cdot 1'$,

1 рад — 1 радиан, 1 рад $= \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57^\circ 17' 45''$.

Связь между радианной и градусной мерами

$$\alpha^\circ = \alpha \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад}.$$

Треугольник (рис. 1)

Сумма внутренних углов

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Теорема косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

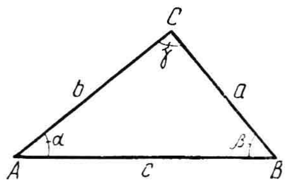

Рис. 1

Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

(R — радиус описанной окружности).

Длина медианы m_a, проведенной из вершины A,

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Длина высоты h_a, проведенной из вершины A,

$$h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$$

$\left(p = \frac{a+b+c}{2} \text{ — полупериметр}\right)$.

Длина биссектрисы l_a треугольника, проведенной из вершины A,

$$l_a = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$$

(p — полупериметр).

Свойство биссектрисы угла A

Если D — точка пересечения биссектрисы со стороной BC, то

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Свойство средней линии

Если E и F — соответственно середины сторон $[AB]$ и $[BC]$, то $[EF] \parallel [AC]$, $|EF| = \frac{1}{2}|AC|$.

Площадь

$$S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c$$

(h_a, h_b, h_c — длины высот, проведенных из точек A, B, C соответственно),

$$S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma = \frac{1}{2} ac \sin\beta = \frac{1}{2} bc \sin\alpha,$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{(формула Герона)}$$

$\left(p = \frac{a+b+c}{2}\right)$,

$$S = \frac{abc}{4R}$$

(R — радиус описанной окружности),

$$S = pr$$

(r — радиус вписанной окружности).

Прямоугольный треугольник (рис. 2)

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Теорема Пифагора

$$a^2 + b^2 = c^2$$

(a, b — длины катетов, c — **длина гипотенузы).**

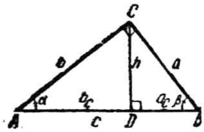

Рис. 2

Другие соотношения в **прямоугольном** треугольнике

$$b^2 = b_c \cdot c,$$

$$a^2 = a_c \cdot c,$$

$$h_c^2 = a_c \cdot b_c.$$

Соотношения между **сторонами и углами**

$$a = c \cdot \sin\alpha, \quad a = c \cdot \cos\beta,$$

$$b = c \cdot \sin\beta, \quad b = c \cdot \cos\alpha,$$

$$a = b \cdot \operatorname{tg}\alpha, \quad a = b \cdot \operatorname{ctg}\beta,$$

$$b = a \cdot \operatorname{tg}\beta, \quad b = a \cdot \operatorname{ctg}\alpha.$$

Параллелограмм (рис. 3)

Свойства сторон и углов

$$[AB] \parallel [CD], \quad [AB] \cong [CD],$$

$$[AD] \parallel [BC], \quad [AD] \cong [BC],$$

$$\widehat{BAD} = \widehat{BCD}, \quad \widehat{ABC} = \widehat{ADC},$$

$$\alpha + \beta = \pi.$$

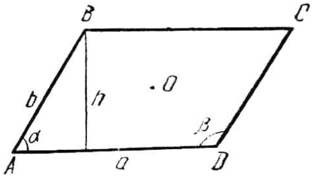

Рис. 3

Свойства диагоналей

$O = [AC] \cap [BD]$ — точка пересечения диагоналей, центр симметрии параллелограмма,

$$[AO] \cong [OC], \ [BO] \cong [OD],$$

$$|AC|^2 + |BD|^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Площадь

$$S = ah,$$

$$S = ab \sin\alpha,$$

$$S = \frac{1}{2} |AC| \cdot |BD| \sin\widehat{AOB}.$$

Ромб (рис. 4)

Свойства сторон

$$|AB| = |BC| = |CD| = |AD|,$$

$$[AB] \parallel [DC], \quad [BC] \parallel [AD].$$

Свойство диагоналей

$$[AC] \perp [BD].$$

Площадь

$$S = ah,$$
$$S = a^2 \sin\alpha,$$
$$S = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD|.$$

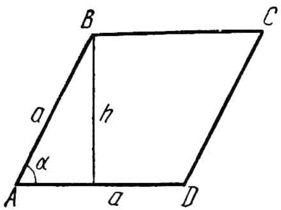

Рис. 4

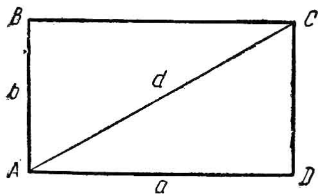

Рис. 5

Прямоугольник (рис. 5)

Свойства сторон и углов

$$|AB| = |CD|, \quad |AD| = |BC|,$$

$$[AB] \parallel [CD], \quad [AD] \parallel [BC],$$

$$\widehat{BAD} = \widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{ADC} = \frac{\pi}{2}.$$

Свойства диагоналей

$$d = \sqrt{a^2 + b^2},$$
$$|AC| = |BD|.$$

Площадь

$$S = ab.$$

Квадрат (рис. 6)

Свойства сторон и углов

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA|,$$

$$\widehat{BAD} = \widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDA} = \frac{\pi}{2}.$$

Длина диагонали

$$d = a\sqrt{2}.$$

Площадь

$$S = a^2 = \frac{1}{2} d^2.$$

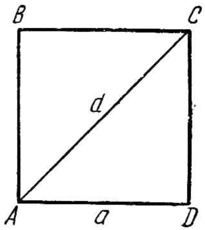

Рис. 6

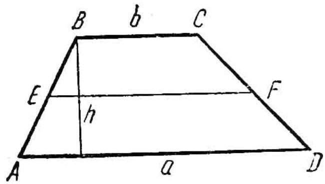

Рис. 7

Трапеция (рис. 7)

Свойства сторон

$$[AD] \parallel [BC], \quad [AB] \nparallel [CD].$$

Средняя линия

$$[EF] \parallel [AD], \quad |EF| = \frac{1}{2}(a + b).$$

Площадь

$$S = \frac{a+b}{2} h,$$

$$S = |EF| \cdot h.$$

Многоугольники

Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $\pi(n-2)$.
Сумма внешних углов выпуклого n-угольника равна 2π.

Вписанные и описанные многоугольники

(R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности, p — полупериметр многоугольника, S — его площадь).

Треугольник

$$R = \frac{abc}{4S}, \quad r = \frac{S}{p}$$

(a, b, c — длины сторон).

Четырехугольник

Если четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, то

$$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = \pi,$$

$$\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = \pi.$$

Если четырехугольник $ABCD$ описан около окружности, то

$$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|.$$

Подобные многоугольники

Если Φ_1 и Φ — подобные многоугольники с коэффициентом подобия k, а P_1 и P, S_1 и S — соответственно их периметры и площади, то

$$P_1 : P = k, \quad S_1 : S = k^2.$$

Правильные многоугольники

Величина α_n внутреннего угла правильного n-угольника

$$\alpha_n = \pi \frac{n-2}{n}.$$

Сторона a_n правильного n-угольника

$$a_n = 2R \sin \frac{\pi}{n}$$

(R — радиус описанной окружности).

В частности, сторона правильного **треугольника**

$$a_3 = R\sqrt{3},$$

сторона квадрата

$$a_4 = R\sqrt{2},$$

сторона правильного шестиугольника

$$a_6 = R.$$

Площадь правильного n-угольника

$$S_n = \frac{1}{2} nR^2 \sin\frac{2\pi}{n},$$

$$S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot r = \frac{1}{2} na_n r$$

(P_n — периметр n-угольника, r — апофема),

$$S_n = \frac{1}{2} P_n R \cos\frac{\pi}{n}.$$

Окружность и круг

(r — радиус окружности (круга), $d = 2r$ — диаметр)

Длина окружности

$$C = 2\pi R = \pi d.$$

Длина дуги в α радиан

$$l = \alpha r.$$

Длина дуги в $\beta°$

$$l = \frac{\pi r\beta}{180}.$$

Площадь круга

$$S = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Площадь сектора в α радиан

$$S_{сек} = \frac{1}{2} r^2\alpha.$$

Площадь сектора в $\beta°$

$$S_{сек} = \frac{\pi r^2\beta}{360}.$$

§ 3. СТЕРЕОМЕТРИЯ

Призма

Площадь поверхности

$$S_{\text{пр}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$$

($S_{\text{осн}}$ — площадь основания призмы, $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности призмы).

Площадь боковой поверхностк

$$S_{\text{бок}} = P \cdot l$$

(P — периметр перпендикулярного сечения, l — длина бокового ребра).

Объем

$$V = QH$$

(Q — площадь основания, H — высота призмы),

$$V = Q_1 l$$

(Q_1 — площадь перпендикулярного сечения, l — длина бокового ребра).

Прямоугольный параллелепипед (рис. 8)

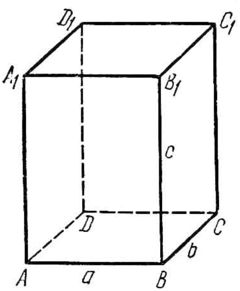

Рис. 8

Свойства диагоналей

$$|AC_1| = |BD_1| = |CA_1| = |DB_1| = d,$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Все диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

Площадь поверхности

$$S = 2(ab + bc + ac).$$

Объем

$$V = abc.$$

В частности, для куба

$$a = b = c,\ d = a\sqrt{3},$$

$$S = 6a^2,\ V = a^3.$$