

Справочник

ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ
МЕХАНИКЕ
КОРАБЛЯ

ТОМ

2

ПЛАСТИНЫ.
ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ,
ПЛАСТИЧНОСТИ
И ПОЛЗУЧЕСТИ.
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ.

Справочник

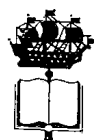
**ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ
МЕХАНИКЕ
КОРАБЛЯ**

В ТРЕХ ТОМАХ

ПЛАСТИНЫ.
ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ,
ПЛАСТИЧНОСТИ
И ПОЛЗУЧЕСТИ.
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ.

ТОМ

2



ЛЕНИНГРАД
«СУДОСТРОЕНИЕ»
1982

ББК 39.427

С74

УДК [629.12.001.11 : 539.3/.4] (031)

Научный редактор проф. докт. техн. наук *О. М. Палий*

С $\frac{3605030000-036}{048(01)-82}$ 18—82

© Издательство [Судостроение], 1982 г.

Повседневная деятельность инженеров-проектировщиков, строителей судов, работников исследовательских учреждений, преподавателей и студентов вузов — всех, кому приходится иметь дело с выполнением расчетов прочности, — немыслима без справочных материалов. Более того, она требует в каждый момент времени наличия справочника, в котором была бы кратко, систематически и на современном уровне изложена сумма сведений, которые отражают всемногочисленные методы и подходы, применяющиеся при расчетах прочности корпусов судов самых различных типов. Судостроители 20-х годов хорошо знали «Справочную книгу корабельного инженера» Ю. А. Шиманского и М. Ф. Гарденина, в 30—40-х годах использовались 2-й и 3-й тома «Справочника по судостроению» под редакцией В. Л. Поздюнина, в 50-х годах были изданы под редакцией Ю. А. Шиманского три тома «Справочника по строительной механике корабля».

Подобная смена справочных изданий закономерна — она отражает развитие судостроения в целом и соответствующее ему развитие комплекса дисциплин, рассматривающих прочность корпуса. Эта же причина побудила авторов приступить к работе над новым «Справочником по строительной механике корабля».

Настоящий «Справочник» существенно отличается от ранее издававшихся. В нем отсутствует ряд устаревших подходов и расчетных схем, но отведено значительное место прогрессивным методам, при реализации которых используется современная вычислительная техника. Фактический справочный материал подвергся тщательному отбору: в нем содержатся те основные сведения, которые часто нужны практическому работнику. Наряду с этим в «Справочнике» достаточно внимания уделено общим сведениям по всем важнейшим аспектам строительной механики, физическим представлениям, смыслу и выводу уравнений.

«Справочник» состоит из трех томов, в которых рассматриваются расчеты всех основных элементов конструкции: балок, стержневых систем, криволинейных стержней, пластин и т. д.

Том 2 содержит три раздела, которые объединяют двадцать одну главу. Каждая глава имеет самостоятельную нумерацию параграфов, которые включают пункты и подпункты. В обозначениях внутритекстовых ссылок на пункты первая цифра указывает порядковый номер главы.

Настоящий том подготовлен к печати В. А. Постновым. Отдельные главы написаны: гл. 1—6 (за исключением п. 1.3 и § 3 гл. 5) — А. З. Локшиным; гл. 7 — С. В. Петинным; гл. 8, 9, 11—17, а также п. 1.3 и § 3 гл. 5 — В. А. Постновым; гл. 10 — В. С. Екельчиком; гл. 18—21 — В. С. Калинин.

Раздел I ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ, ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- x_i — прямоугольные лагранжевы координаты;
 ξ_i — прямоугольные эйлеровы координаты;
 α_i — ортогональные криволинейные координаты;
 u_i — проекции вектора перемещения точки на ось x_i ;
 H_i — параметры Ляме;
 $I_i (T_\varepsilon)$ — инварианты деформированного состояния в точке;
 $I_i (T_\sigma)$ — инварианты напряженного состояния в точке;
 E_i — модули упругости в направлении осей x_i ;
 $f_i (i = 1, 2, 3)$ — проекции заданных поверхностных усилий, отнесенных к единице поверхности недеформированного тела;
 ε_{ij} — компоненты тензора деформации;
 σ_{ij} — компоненты напряжений, действующие в площадках, перпендикулярных к осям ξ_i ;
 σ_{ij} — компоненты напряжений, действующие в площадках, которые до деформации были перпендикулярны к осям x_i ;
 $\Phi_{ij} (i \neq j)$ — углы сдвига;
 $\nu_{ij} (i \neq j)$ — коэффициенты Пуассона, характеризующие сокращение в направлении оси x_j при растяжении в направлении оси x_i ;
 $G_{ij} (i \neq j)$ — модули сдвига;
 $(i, j = 1, 2, 3)$
 r, φ, z — цилиндрические координаты;
 z, φ, θ — сферические координаты;
 E_r, E_φ, E_z — модули упругости в направлении цилиндрических координат;
 u_r, u_φ, u_z — проекции вектора перемещения точки на оси цилиндрической системы;

$G_{r\varphi}$, G_{zr} , $G_{\varphi z}$ — модули сдвига в цилиндрической системе;
 E — модуль упругости для изотропного материала;
 G — модуль сдвига для изотропного материала;
 ν — коэффициент Пуассона для изотропного материала;

$$\lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{ — коэффициент Ляме;}$$

E_{x_l} — относительное удлинение в направлении оси x_l ;

u_z , u_φ , u_θ — проекции вектора перемещения точки на оси сферической системы;

$\nu_{r\varphi}$, ν_{zr} , $\nu_{\varphi z}$, ν_{rz} , $\nu_{\varphi z}$ — коэффициенты Пуассона в цилиндрической системе;

D_e — девиатор деформации;

D_σ — девиатор напряжения;

ε_l — интенсивность деформации;

σ_l — интенсивность напряжения;

σ_1 , σ_2 , σ_3 — главные значения тензора напряжения;

ε_1 , ε_2 , ε_3 — главные значения тензора деформации;

μ_{13} , μ_{23} — компоненты моментных напряжений в декартовой системе;

M_3 — объемный момент, приходящийся на единицу площади;

$$\tau_s = \frac{\sigma_{12} + \sigma_{21}}{2} \text{ — симметричная часть касательных напряжений;}$$

$$\tau_A = \frac{\sigma_{12} - \sigma_{21}}{2} \text{ — антисимметричная часть касательных напряжений;}$$

κ_1 , κ_2 — кривизны;

$\mu_{\varphi z}$, μ_{rz} — моментные напряжения в полярной системе координат;

K_t — коэффициент концентрации напряжений (теоретический);

λ — отношение напряжений, соответствующих нагружению пластины в своей плоскости в двух взаимно перпендикулярных направлениях;

β — параметр, принятый для характеристики концентрации напряжений у отверстия в цилиндрической оболочке;

$$\beta = [3(I - \mu^2)]^{1/4} [r/(Rt)^{1/2}]/2;$$

K_I — коэффициент интенсивности напряжений, соответствующий нормальному раскрытию трещины;

K_{II} — коэффициент интенсивности напряжений, соответствующий скольжению поверхностей трещины в плоскости пластины;

K_{III} — коэффициент интенсивности напряжений, соответствующий скольжению поверхностей трещины нормально к плоскости пластины;

G^* — освобождение энергии деформации при подрастании трещины на единицу длины;

δ — раскрытие трещины, определяемое как нормальное расхождение поверхностей трещины и измеряемое обычно у боковой поверхности объектов стандартных очертаний (образцов);

Φ — эллиптический интеграл второго рода:

$$\Phi(a/c) = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{c^2 - a^2}{c^2} \sin^2 \varphi \right)^{1/2} d\varphi \approx 1,178 + 0,392(a/c);$$

σ_T — предел текучести материала;

Q — параметр формы полуэллиптической трещины:

$$Q = (\Phi^2 - 0,212\sigma^2/\sigma_T^2)^{1/2}.$$

Теория упругости ставит своей целью получение строгих и полных решений задач, связанных с определением напряжений, деформаций и перемещений, возникающих в упругих телах при действии заданной системы внешних сил в известных условиях закрепления этих тел.

При выводе основных уравнений, решающих поставленную задачу, в теории упругости используются общие предпосылки, которые касаются свойств рассматриваемых тел, но не зависят от формы тела, характера нагрузки и т. д. Рассматриваемым в теории упругости телам приписывают свойство сплошности, т. е. предполагают, что тело полностью заполняет занимаемый им объем как до деформации, так и после нее. Свойство сплошности позволяет применять к изучению напряженного и деформированного состояния тел анализ бесконечно малых величин. Погрешность, связанная с использованием указанного свойства, практически всегда допустима, поскольку она может оказаться существенной при определении взаимного перемещения точек, первоначальное расстояние между которыми соизмеримо с расстоянием между молекулами и при определении напряжений в площадках, размеры сторон которых также соизмеримы с расстоянием между молекулами.

Изложению общих зависимостей теории упругости при использовании лишь свойства сплошности, предположения о линейной зависимости между напряжениями и деформациями посвящены первые три главы раздела. В гл. 4—7 приведены решения частных задач линейной теории упругости, которые имеют важное практическое значение. Здесь рассмотрены плоская деформация и плоское напряженное состояние, концентрация напряжений в пластинах с вырезами.

В гл. 8 дается краткое изложение основных теорий пластичности и методов решения упругопластических задач. Учету деформаций ползучести материалов посвящены гл. 9 и 10.

ГЛАВА 1. ДЕФОРМАЦИЯ

§ 1. Перемещения. Тензор деформации

Действующие на тело силы вызывают изменение его размеров и формы. Эти изменения связаны с перемещением частиц (*материальных точек*) тела.

В теории деформации определяется относительное изменение расстояния между двумя бесконечно близкими точками и изменение угла между взаимно перпендикулярными направлениями.

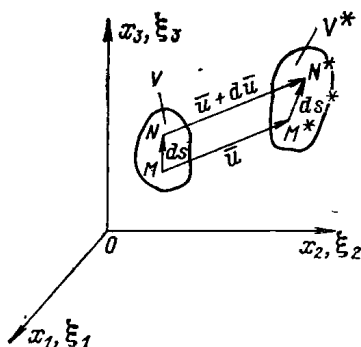


Рис. 1.1

Пусть система прямоугольных координатных осей Ox_i жестко связана с телом до его деформации. Обозначим перемещения точек по направлениям этих осей соответственно через u_1, u_2, u_3 ($\bar{u} = u_1\bar{i} + u_2\bar{j} + u_3\bar{k}$), эти перемещения в силу сплошности тела будут непрерывными функциями координат x_i ($i = 1, 2, 3$) (x_i — лагранжевы координаты; $\bar{u}$ — вектор перемещения).

Пусть $O\xi_1, O\xi_2, O\xi_3$ — система прямоугольных координатных осей, определяющая положение точек деформированного тела. Тогда, считая триэдры единичных базисных векторов обеих систем совпадающими, можно записать:

$$\xi_i = x_i + u_i(x_1, x_2, x_3) \quad (i = 1, 2, 3)$$

(ξ_i — эйлеровы координаты).

1.1. Относительные удлинения. Относительное приращение длины элемента (относительное удлинение) в точке M в направлении точки N (рис. 1.1, величины со звездочками соответствуют положению тела в его деформированном состоянии) равно

$$E_{MN} = \frac{ds^* - ds}{ds} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{MN}} - 1, \quad (1.1)$$

где

$$\varepsilon_{MN} = \varepsilon_{11}l^2 + \varepsilon_{22}m^2 + \varepsilon_{33}n^2 + 2\varepsilon_{12}lm + 2\varepsilon_{23}mn + 2\varepsilon_{31}nl; \quad (1.2)$$

$$l = \cos(\widehat{MN}, x_1); \quad m = \cos(\widehat{MN}, x_2); \quad n = \cos(\widehat{MN}, x_3)$$

— направляющие косинусы линейного элемента MN до деформации;

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right]; \\ 2\varepsilon_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Остальные значения ε_{ij} получаем круговой перестановкой индексов i и j ($i, j = 1, 2, 3$).

Формулы (1.3) могут быть записаны в виде

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right). \quad (1.3')$$

[Здесь предполагается, что члены, содержащие одинаковые индексы (в данном случае индекс k), принимают все значения, соответствующие каждому значению индекса ($k = 1, 2, 3$), и суммируются (соглашение о суммировании).

Величины ε_{ij} образуют симметричный тензор второго ранга — *тензор деформации*

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

и называются *компонентами деформации* (компонентами тензора деформации)

Введя обозначения

$$\left. \begin{aligned} e_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad \omega_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right); \\ \omega_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right); \quad \omega_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

формулы (1.3) можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} e_{11} &= e_{11} + \frac{1}{2} [e_{11}^2 + (e_{12} + \omega_3)^2 + (e_{13} - \omega_2)^2]; \\ 2e_{12} &= 2e_{12} + e_{11}(e_{12} - \omega_3) + e_{22}(e_{12} + \omega_3) + \\ &\quad + (e_{13} - \omega_2)(e_{23} + \omega_1). \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Параметр ω_i характеризует поворот бесконечно малого объемного элемента в окрестности рассматриваемой точки вокруг оси Ox_i , а параметр e_{ii} определяет величину относительного удлинения проекции на ось Ox_i линейного элемента MN .

Если направление MN совпадает с направлением одной из осей координат, то относительное удлинение по этому направлению соответственно равно

$$E_{x_i} = \sqrt{1 + 2e_{ii}} - 1. \quad (1.6)$$

1.2. Углы сдвига. Рассмотрим в недеформированном теле два взаимно перпендикулярных направления r_1 и r_2 , выходящих из данной точки M тела и параллельных осям Ox_1, Ox_2 . После деформации угол между этими направлениями изменится на величину φ_{12} . При этом

$$\sin \varphi_{12} = \frac{2e_{12}}{\sqrt{(1 + 2e_{11})(1 + 2e_{22})}} \quad (1.7)$$

и, следовательно,

$$\varphi_{12} = \arcsin \frac{2e_{12}}{\sqrt{(1 + 2e_{11})(1 + 2e_{22})}}.$$

Для направлений, параллельных другим координатным осям, величины изменений первоначально прямых углов могут быть получены с помощью формулы (1.7) путем круговой перестановки индексов.

Углы φ_{ij} ($i \neq j$) называются углами сдвига и считаются положительными, если происходит уменьшение прямого угла.

Непосредственно из формул (1.6) и (1.7) можно понять геометрический смысл компонентов тензора T_e : диагональные компоненты тензора e_{11}, e_{22} и e_{33} характеризуют относительные удлинения, а компоненты e_{ij} ($i \neq j$) — углы сдвига. Таким образом, тензор деформации полностью определяет деформированное состояние окрестности данной точки тела.

1.3. Преобразование компонентов тензора деформации при повороте координатных осей. Компоненты деформации при повороте координатных осей (x'_1, x'_2, x'_3 — новые оси) преобразуются по закону:

$$\left. \begin{aligned} e'_{11} &= e_{11}l_{11}^2 + e_{22}l_{12}^2 + e_{33}l_{13}^2 + 2e_{12}l_{11}l_{12} + 2e_{23}l_{13}l_{12} + 2e_{31}l_{11}l_{13}; \\ e'_{12} &= e_{11}l_{11}l_{21} + e_{22}l_{22}l_{12} + e_{33}l_{23}l_{13} + e_{12}(l_{11}l_{22} + l_{12}l_{21}) + \\ &\quad + e_{23}(l_{23}l_{12} + l_{22}l_{13}) + e_{31}(l_{23}l_{11} + l_{21}l_{13}), \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

где e'_{ij} — компоненты тензора деформации в новых осях x'_1, x'_2, x'_3 , $l_{ik} = \cos(x'_i, x_k)$.

Значения остальных компонентов e'_{ij} получаются путем круговой перестановки индексов.

Используя соглашение о суммировании, формулы (1.8) можно переписать в виде

$$\varepsilon'_{ij} = l_{ip} l_{jq} \varepsilon_{pq}. \quad (1.9)$$

Направляющие косинусы l_{rq} удовлетворяют условиям ортогональности:

$$l_{qr} l_{qk} = \delta_{rk}; \quad l_{rl} l_{kq} = \delta_{rk}, \quad (1.10)$$

где δ_{rk} — символ Кронкера;

$$\delta_{rk} = \begin{cases} \rightarrow 0 & \text{при } r \neq k; \\ \rightarrow 1 & \text{при } r = k. \end{cases}$$

Условие (1.10) позволяет выразить компоненты деформации в старых осях через компоненты в новых осях: $\varepsilon_{pk} = l_{ip} l_{jk} \varepsilon'_{ij}$.

§ 2. Главные значения и главные направления тензора деформации

Для каждой точки тела имеются три взаимно перпендикулярных направления, для которых относительные удлинения, а следовательно, и линейные деформации имеют экстремальные значения. Указанные направления называются главными направлениями тензора деформации (главными осями), а линейные деформации вдоль главных направлений — *главными деформациями*. Значения главных деформаций, которые в дальнейшем будем обозначать через ε_1 , ε_2 и ε_3 , равны корням кубического уравнения

$$\varepsilon^3 - I_1(T_\varepsilon) \varepsilon^2 + I_2(T_\varepsilon) \varepsilon - I_3(T_\varepsilon) = 0, \quad (1.11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} I_1(T_\varepsilon) &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}; \\ I_2(T_\varepsilon) &= \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}\varepsilon_{11} - (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2); \\ I_3(T_\varepsilon) &= \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + 2\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}\varepsilon_{31} - (\varepsilon_{11}\varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{22}\varepsilon_{31}^2 + \varepsilon_{33}\varepsilon_{12}^2). \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Коэффициенты уравнения (1.11) $I_1(T_\varepsilon)$, $I_2(T_\varepsilon)$, $I_3(T_\varepsilon)$ не зависят от направления выбранной системы координат и называются соответственно первым, вторым и третьим *инвариантом тензора деформации*.

Углы сдвига между главными направлениями равны нулю. Следовательно, при направлении координатных осей по главным направлениям тензора деформации формулы (1.12) примут такой вид:

$$\left. \begin{aligned} I_1(T_\varepsilon) &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3; \\ I_2(T_\varepsilon) &= \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1; \\ I_3(T_\varepsilon) &= \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3. \end{aligned} \right\} \quad (1.12')$$

При использовании соглашения о суммировании формулы (1.12) могут быть записаны в сокращенном виде

$$\left. \begin{aligned} I_1(T_\varepsilon) &= \varepsilon_{ii}; \\ I_2(T_\varepsilon) &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} - \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}); \\ I_3(T_\varepsilon) &= |\varepsilon_{ij}|. \end{aligned} \right\} \quad (1.12'')$$

Косинусы углов, составляемые i -м главным направлением соответственно с осями координат x_1 , x_2 , x_3 , определяются формулами

$$l_i^2 = \frac{b_i^2}{s_i^2}; \quad m_i^2 = \frac{c_i^2}{s_i^2}; \quad n_i^2 = \frac{a_i^2}{s_i^2}, \quad (1.13)$$

где

$$a_i = (\varepsilon_{11} - \varepsilon_i)(\varepsilon_{22} - \varepsilon_i) - \varepsilon_{12}^2;$$

$$b_i = \varepsilon_{12}\varepsilon_{23} - \varepsilon_{13}(\varepsilon_{22} - \varepsilon_i);$$

$$c_i = \varepsilon_{12}\varepsilon_{13} - \varepsilon_{23}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_i); \quad s_i = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2.$$

В каждой точке тела имеются три взаимно перпендикулярных направления, для которых компоненты деформации ε_{ij} ($i \neq j$) имеют экстремальные значения. Эти компоненты равны

$$\gamma_1 = \pm \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{2}; \quad \gamma_2 = \pm \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{2}; \quad \gamma_3 = \pm \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}.$$

Шесть компонентов деформации ε_{ij} выражаются через производные трех составляющих вектора перемещений [формулы (1.3)]. Следовательно, задача определения перемещений по заданным компонентам тензора деформации не может быть решена, если ε_{ij} будут произвольными функциями координат точек тела.

Для того чтобы функции ε_{ij} определяли деформацию тела, не нарушающую его сплошность, они должны быть подчинены шести дифференциальным уравнениям — *уравнениям сплошности* (условия сплошности).

При использовании некоторых ограничений, касающихся величин удлинений, сдвигов и углов поворота объемного элемента эти уравнения приведены в § 3.

Выполнение условий сплошности обеспечивает возможность интегрирования зависимостей (1.4). Однако в случае многосвязного тела для получения однозначных перемещений наряду с упомянутыми выше зависимостями необходимо вдоль всех разделов, превращающих многосвязное тело в односвязное, выполнение следующих дополнительных условий (рис. 1.2, разрез $a-b$):

$$u_i^{(+)} = u_i^{(-)}.$$

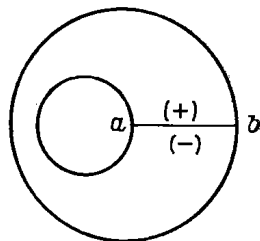


Рис. 1.2

§ 3. Малые удлинения, углы сдвига и углы поворота. Классические (линейные) уравнения теории упругости

3.1. Малые удлинения и сдвиги. Во многих практически встречающихся случаях можно считать удлинения и сдвиги малыми по сравнению с единицей. Тогда [см. (1.6), (1.7)]

$$E_{x_i} = \varepsilon_{ii}; \quad \varphi_{ij} = 2\varepsilon_{ij} \quad (1.14)$$

(суммирование по одинаковым индексам не производится).

Из этих равенств следует, что линейные деформации ε_{ii} равны соответствующим относительным удлинениям, а деформации сдвига ε_{ij} — половине соответствующих углов сдвига.

В рассматриваемом случае уравнения сплошности имеют вид

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \\ & = \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_3} \right)^2 - \\ & - \left(2 \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_3} \right) \left(2 \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_3} \right) - \\ & - \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_2} \left(2 \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_1} \left(2 \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} \right); \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right) = \\
 & = \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} \right) + \\
 & \quad + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) - \\
 & \quad - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right) - \\
 & \quad - \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_3} \left(2 \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x_2} \left(2 \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_3} \right).
 \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Остальные четыре уравнения могут быть получены путем круговой замены индексов.

3.2. Малые удлинения, сдвиги и углы поворота. Если по сравнению с единицей малы не только компоненты деформации ε_{ij} , но и углы поворота ω_i , то зависимости (1.5) для компонентов деформации можно упростить. При этом возможны следующие два варианта:

а) квадраты параметров ω_i имеют такой же порядок, что и порядок компонентов ε_{ij} , тогда

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \varepsilon_{11} + \frac{1}{2} (\omega_2^2 + \omega_3^2); & \varepsilon_{12} &= \varepsilon_{12} - \frac{1}{2} \omega_1 \omega_2; \\
 \varepsilon_{22} &= \varepsilon_{22} + \frac{1}{2} (\omega_1^2 + \omega_3^2); & \varepsilon_{31} &= \varepsilon_{31} - \frac{1}{2} \omega_1 \omega_3; \\
 \varepsilon_{33} &= \varepsilon_{33} + \frac{1}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2); & \varepsilon_{23} &= \varepsilon_{23} - \frac{1}{2} \omega_2 \omega_3;
 \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

б) параметры ω_i имеют тот же или более высокий порядок малости, чем порядок компонентов ε_{ij} . Тогда

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &\approx \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}; & \varepsilon_{12} &\approx \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right); \\
 \varepsilon_{22} &\approx \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; & \varepsilon_{23} &\approx \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right); \\
 \varepsilon_{33} &\approx \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}; & \varepsilon_{31} &\approx \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right).
 \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Параметры (1.17) являются компонентами симметричного тензора второго ранга. Зависимости (1.17), именуемые часто формулами Коши, используются в линейной теории упругости;

в) возможны и другие упрощения нелинейных зависимостей (1.3). В частности, в задачах нелинейного изгиба пластин можно пренебречь квадратами производных от перемещений u_1, u_2 по координатам по сравнению с их первыми производными и с квадратами производных от перемещения u_3 по x_1 и x_2 (оси Ox_1x_2 лежат в срединной плоскости пластины). Тогда

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &\approx \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2; & 2\varepsilon_{13} &\approx \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_2}; \\
 \varepsilon_{22} &\approx \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2; & 2\varepsilon_{23} &\approx \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}; \\
 \varepsilon_{33} &\approx \frac{\partial u_3}{\partial x_3}; & 2\varepsilon_{31} &\approx \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}.
 \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

3.3. Уравнения сплошности линейной теории упругости. При допущениях п. 3.2,6 уравнения сплошности (1.15) примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} &= 2 \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} &= 2 \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} &= 2 \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_1 \partial x_3}; \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3}; \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3}; \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

§ 4. Девiator деформации. Интенсивность деформации

При малых по сравнению с единицей удлинениях и сдвигах целесообразно тензор деформации представить в виде суммы двух тензоров: шарового тензора $\varepsilon(E)$ и девиатора D_ε :

$$T_\varepsilon = \varepsilon(E) + D_\varepsilon,$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3}; \quad (E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ D_\varepsilon &= \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \varepsilon & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \varepsilon \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

Компоненты шарового тензора в указанном случае вызывают лишь изменение объема элемента, выделенного из тела, и компоненты девиатора деформации

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij} \quad (1.21)$$

вызывают изменение формы этого элемента.

Главные направления девиатора деформации и тензора деформации совпадают.

Инварианты девиатора деформации:

$$\left. \begin{aligned} I_1(D_\varepsilon) &= 0; \\ I_2(D_\varepsilon) &= \frac{1}{6} [(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + \\ &\quad + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + 6(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2)] = \\ &= \frac{1}{6} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2] \geq 0; \\ I_3(D_\varepsilon) &= |D_\varepsilon| = (\varepsilon_1 - \varepsilon)(\varepsilon_2 - \varepsilon)(\varepsilon_3 - \varepsilon). \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

Инварианты $I_k(D_e)$, $k = 1, 2, 3$ являются основными. Наряду с ними при построении различных зависимостей теории упругости, теории пластичности используются некоторые их производные:

а) интенсивность деформации сдвига

$$\gamma_i = 2 \sqrt{I_2(D_e)} = \\ = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + (\epsilon_{22} - \epsilon_{33})^2 + (\epsilon_{33} - \epsilon_{11})^2 + 6(\epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2 + \epsilon_{31}^2)};$$

б) интенсивность деформации

$$\epsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{I_2(D_e)} = \\ = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + (\epsilon_{22} - \epsilon_{33})^2 + (\epsilon_{33} - \epsilon_{11})^2 + 6(\epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2 + \epsilon_{31}^2)} \quad (1.23)$$

или, с учетом выражения (1.21),

$$\epsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \partial_{ij} \partial_{ij}. \quad (1.24)$$

§ 5. Криволинейные координаты

Для тел, ограниченных криволинейными поверхностями, целесообразно при описании деформированного состояния применять криволинейные координаты, специально выбранные, исходя из условий конкретной задачи. Ниже приводятся основные зависимости теории деформации для системы ортогональных криволинейных координат.

Пусть положение точек недеформированного тела определяется тремя параметрами α_i ($i = 1, 2, 3$), изменение одного из которых при постоянных значениях двух других описывает некоторую кривую линию (рис. 1.3). Параметры α_i называются криволинейными координатами, а семейство полученных указанным образом кривых называется координатными линиями. Длина элемента координатной линии равна

$$ds_i = H_i d\alpha_i. \quad (1.25)$$

Множитель H_i , входящий в равенство (1.25), носит название параметра Ляме и представляет собой длину элемента координатной линии при единичном приращении криволинейной координаты.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь ортогональных криволинейных координат, т.е. таких, у которых координатные линии $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ пересекаются под прямыми углами. Ортогональные единичные векторы (орты), совпадающие с касательными к координатным линиям, проходящими через точку тела, обозначим через $\bar{k}_i$ ($i = 1, 2, 3$). Направление этих векторов изменяется при переходе от одной точки тела к другой.

5.1. Относительное удлинение. Относительное удлинение в точке M в направлении точки N определяется по формуле (1.1)

$$E_{MN} = \sqrt{1 + 2\epsilon_{MN}} - 1, \quad (1.26)$$

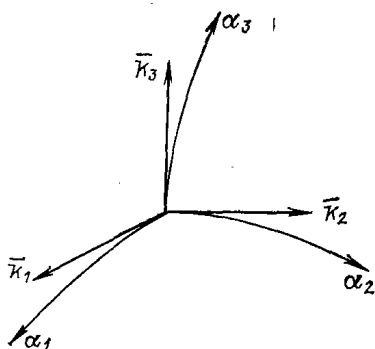


Рис. 1.3