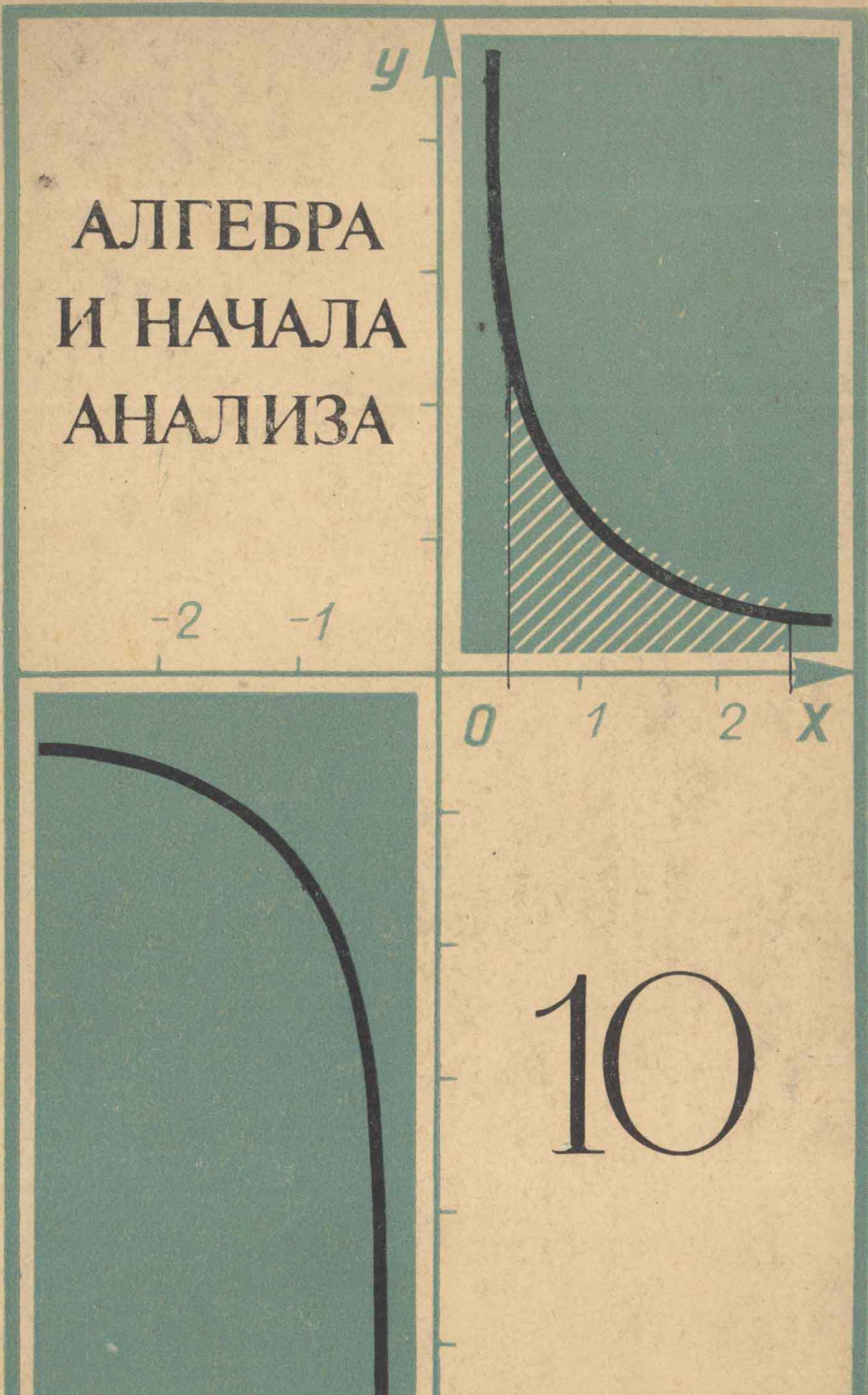
АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА



10

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ 10 КЛАССА
СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Под редакцией
А. Н. КОЛМОГОРОВА

Утверждено Министерством просвещения СССР

ИЗДАНИЕ 4-е

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1979

А. Н. КОЛМОГОРОВ
О. С. ИВАШЕВ-МУСАТОВ
Б. М. ИВЛЕВ
С. И. ШВАРЦБУРД

В книге использованы материалы пробного учебника «Алгебра и начала анализа, 10 кл.» авторов *Б. Е. Вейца* и *И. Т. Демидова* под ред. *А. Н. Колмогорова.*

А $\frac{60601-119}{10(303)-79}$ инф. письмо **512(075)**

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава VI.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, ИХ ГРАФИКИ И ПРОИЗВОДНЫЕ (продолжение)

Глава IX.

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

МАТЕРИАЛ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Глава **VI**

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, ИХ ГРАФИКИ И ПРОИЗВОДНЫЕ (продолжение)

§ 15

ПРОИЗВОДНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

75. Производная синуса

В этом параграфе будут выведены формулы для производных тригонометрических функций. Сначала докажем, что

$$\sin' x = \cos x.^* \qquad (1)$$

Приведем вывод формулы (1), основанный на двух допущениях, справедливость которых будет доказана несколько позднее:

а) функция cos непрерывна при всех значениях аргумента, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \Delta x) = \cos x;$$

б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Допущение о том, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ равен 1, достаточно убедительно из геометрических соображений. В самом деле, считая сначала x положительным, отложим на единичной окружности (рис. 1) от точки P_0 в обе стороны дуги P_0A и P_0B длины x. Длина всей дуги AB равна $2x$. Вычислим длину хорды AB:

$$|AB| = |AC| + |CB| = 2 \sin x.$$

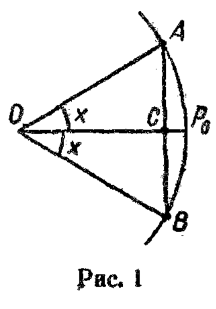


Рис. 1

* Равенство (1) можно записать и в виде $(\sin x)' = \cos x$.

Таким образом, отношение длины хорды AB к длине дуги AB равно

$$\frac{2\sin x}{2x} = \frac{\sin x}{x}.$$

Из рисунка видно, что при малых x длина хорды и длина дуги почти равны, т. е. отношение $\frac{\sin x}{x}$ близко к единице.

Так как

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x},$$

то и при отрицательных x, малых по модулю, отношение $\frac{\sin x}{x}$ также близко к единице.

Перейдем теперь к выводу формулы (1). В соответствии с определением производной найдем предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \sin x}{\Delta x},$$

где $\Delta \sin x = \sin(x + \Delta x) - \sin x$. Представим приращение синуса в виде произведения. Для этого в формуле

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \text{(см. п. 74)}$$

положим $\alpha = x + \Delta x$ и $\beta = x$. Тогда

$$\Delta \sin x = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Поэтому

$$\sin' x = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

Примеры. Воспользовавшись правилами дифференцирования сложной функции, найдем:

1. $(\sin(ax + b))' = \cos(ax + b)\cdot(ax + b)' = a\cos(ax + b)$.
2. $\left(\sin\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$.

Упражнения

Найдите производную функции:

1. $f(x) = \sin 3x$.
2. $g(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x + \pi\right)$.
3. $h(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

4. $M(x) = 3\sin^2(2x-1)$.

5. $f(t) = \sin 2t\cos t - \sin t\cos 2t$.

6. $f(x) = \sin(-x) + \sin x$.

7. $g(x) = \sin 2x - 2\sin x\cos x + 5$.

8. $h(x) = \sin(2x-3{,}5) + \sin 2x$.

9. $M(x) = 2x + 3{,}6\sin^5(\pi - x)$.

10. $f(u) = \cos 2u\cos\frac{\pi}{2} - \sin 2u\cdot\sin\frac{\pi}{2}$.

11. Покажите, что производная функции $f(x) = 2x - \sin x$ положительна при всех значениях x и, значит, функция f возрастает на R.

12*. Найдите, при каких x производная функции $g(x) = x - \sin x$ обращается в нуль. Покажите, что эта функция возрастает на R. Начертите ее график.

13*. Исследуйте функцию $h(x) = x - 2\sin x$.

14*. Докажите, что функция $g(x) = \sin(2x-5) - 3x$ убывает на промежутке $]-\infty;\ \infty[$.

76. Производная косинуса, тангенса и котангенса

В этом пункте мы воспользуемся производной синуса (п. 75) для вычисления производных косинуса, тангенса и котангенса.

$$\cos' x = -\sin x, \tag{1}$$

$$\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}, \tag{2}$$

$$\operatorname{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{3}$$

Каждая из этих формул справедлива в любой точке области определения соответствующей функции.

Для вывода формулы (1) воспользуемся равенством $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ и правилом дифференцирования сложной функции:

$$\cos' x = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \sin x\,(-1) = -\sin x.$$

Чтобы доказать формулы (2) и (3), применим формулу для производной частного и уже известные формулы для производных синуса и косинуса:

$$\operatorname{tg}' x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x\cos x - \cos' x\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\operatorname{ctg}' x = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\cos' x\sin x - \sin' x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Пример. Найдем касательные к синусоиде в точках с абсциссами $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \pi$.

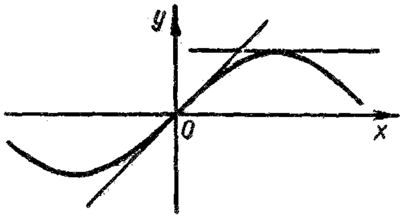


Рис. 2

Как вы знаете (п. 52), уравнение касательной к графику функции f в точке $(x_0; y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, имеет вид:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

В данном случае $f(x) = \sin x$. Для решения задачи надо найти значение производной синуса в точках 0, $\frac{\pi}{2}$ и π. Производная синуса равна косинусу: $f'(0) = \cos 0 = 1$. Далее находим $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ и $f'(\pi) = \cos\pi = -1$. Поэтому:

1) в точке с абсциссой $x_1 = 0$ уравнение касательной принимает вид $y - 0 = 1 \cdot (x - 0)$, т. е. $y = x$. Мы видим, что касательная к синусоиде в точке $(0; 0)$ есть биссектриса первого и третьего координатных углов (рис. 2);

2) в точке с абсциссой $x_2 = \frac{\pi}{2}$ уравнение касательной будет $y - 1 = 0 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, т. е. $y = 1$. Это горизонтальная прямая (рис. 2);

3) аналогично, уравнение касательной в точке с абсциссой $x_3 = \pi$ будет $y - 0 = (-1)(x - \pi)$, т. е. $y = \pi - x$.

Упражнения

Найдите производную функции:

15. $f(x) = 1\ 3\cos x$.
16. $h(x) = 3\cos(2{,}3x + 10\pi)$.
17. $g(x) = 2\pi - 0{,}5\cos(\pi - x)$.
18. $u(x) = 2x^2 - 30\cos(5x + 6)$.
19. $v(x) = -2\cos(x - \pi) + 2\sin 2x$.
20. $v(x) = 5\operatorname{tg}(2x + 3) + 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.
21. $s(x) = 3\operatorname{tg}(2x + 1)$.
22. $s(x) = \frac{2\sin(6x + 3)}{\cos(6x + 3)} + \operatorname{tg}(6x + 3)$.
23. $f(u) = \cos 2u \sin u + \sin 2u \cos u$.
24. $g(t) = \cos 2\pi \cos 3t + \sin 3t \sin 2\pi$.
25. $v(t) = 4\operatorname{ctg}(2t + 3)$.
26. $v(x) = 7\operatorname{ctg}(2x - 2\pi)$.
27. $f(x) = \cos 2{,}5x \cdot \sin 0{,}5\pi + \sin 2{,}5x \cdot \cos 0{,}5\pi$.
28. $f(x) = \sin x \cos 5x - \sin 5x \cos x$.

Напишите уравнение касательной к графику функции:

29. $f(x) = \sin x$ в точках с абсциссами $-\pi$ и $\frac{\pi}{2}$.

30. $s(x) = \cos x$ в точках с абсциссами $-\frac{\pi}{2}$ и 2π.

31. $g(x) = \operatorname{tg} x$ в точках с абсциссами

$$0 \text{ и } \frac{\pi}{4}.$$

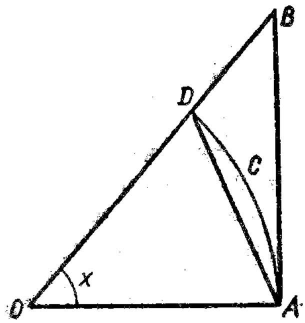


Рис. 3

77*. Непрерывность тригонометрических функций

В п. 75 мы опирались на допущение о непрерывности функции cos.

Докажем это допущение, а также непрерывность функций sin, tg, ctg во всех точках, где они определены. Для этого нам потребуется следующая лемма.

Лемма. ***Для всех x, удовлетворяющих условию***

$$0 < |x| < \frac{\pi}{2},$$

справедливо неравенство:

$$|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|.$$

Доказательство начнем со случая $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Сравним площади S_{OAD} (треугольника OAD), S_{OAB} (треугольника OAB) и S_{OACD} (сектора $OACD$) (рис. 3). Эти площади легко вычисляются:

$$S_{OAD} = \frac{1}{2}|OA| \cdot |OD| \cdot \sin x = \frac{1}{2}\sin x,$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}|OA| \cdot |AB| = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

$$S_{OACD} = \frac{1}{2}r^2 \cdot x = \frac{1}{2}x.$$

Из рисунка 3 видим, что

$$S_{OAD} < S_{OACD} < S_{OAB},$$

или

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

т. е.

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x. \quad (2)$$

Так как $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$ положительны при $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ неравенство (1) справедливо.

---

* Звездочкой отмечен дополнительный учебный материал, не обязательный для изучения всеми учащимися. В ряде случаев такой материал отмечен двумя треугольниками: ▶ (в начале), ◀ (в конце). См. стр. 15—17 и др.

Остается рассмотреть случай $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. При таких x имеем $0 < -x < \frac{\pi}{2}$ и к $-x$ можно применить неравенство (2):

$$\sin(-x) < -x < \operatorname{tg}(-x). \qquad (3)$$

Так как теперь $-x = |x|$, $\sin(-x) = |\sin x|$, $\operatorname{tg}(-x) = |\operatorname{tg} x|$, то из (3) вытекает (1).

Этим доказательство неравенства (1) для всех $x \neq 0$ из промежутка $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ закончено.

Теорема 1. ***Функция косинус непрерывна на всей числовой прямой, т. е. для любого $x_0 \in R$***

$$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0.$$

Доказательство. Оценим $|\cos x - \cos x_0|$.

$$|\cos x - \cos x_0| = \left|2 \sin\frac{x_0 - x}{2} \sin\frac{x + x_0}{2}\right| = 2\left|\sin\frac{x_0 - x}{2}\right| \times$$

$$\times \left|\sin\frac{x + x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{x - x_0}{2}\right| = |x - x_0|.$$

Поэтому, если для любого $\varepsilon > 0$ положить $\delta = \varepsilon$, при $|x - x_0| < \delta$ будем иметь:

$$|\cos x - \cos x_0| \leqslant |x - x_0| < \varepsilon.$$

Это означает, что

$$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0,$$

т. е. функция косинус непрерывна в точке x_0.

Аналогично доказывается теорема 2.

Теорема 2. ***Функция синус непрерывна на всей числовой прямой, т. е. для любого $x_0 \in R$***

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0.$$

Теорема 3. ***Функции тангенс и котангенс непрерывны каждая в своей области определения, т. е.***

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0 \text{ для любого } x_0 \in D(\operatorname{tg}),$$

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0 \text{ для любого } x_0 \in D(\operatorname{ctg}).$$

Доказательство. Действительно, если $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, то $\cos x_0 \neq 0$.

Следовательно,

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} x = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} \sin x}{\lim\limits_{x \to x_0} \cos x} = \frac{\sin x_0}{\cos x_0} = \operatorname{tg} x_0.$$

Аналогично доказывается вторая часть теоремы 3.

Упражнения*

Вычислите предел:

32. $\lim\limits_{x\to 0} \sin x$. **34.** $\lim\limits_{x\to 0} \cos x$. **36.** $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg} x$. **38.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x$.

33. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin x$. **35.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \cos x$. **37.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x$. **39.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x$.

40. Докажите непрерывность функции sin в точке $x_0 \in \boldsymbol{R}$ и функции ctg в точке $x_0 \in D$ (ctg).

41. Докажите, что функция f непрерывна при всех $x \in \boldsymbol{R}$, если

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Начертите ее график.

78*. Предел отношения длины хорды к длине стягиваемой ею дуги

Начнем с доказательства допущения «б)» из п. 75.

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$ или $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Тогда выполняется неравенство $|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|$ (см. п. 77). Разделив все части этого неравенства на $|\sin x|$, получим:

$$1 < \left|\frac{x}{\sin x}\right| < \frac{1}{|\cos x|}.$$

Учитывая, что при указанных условиях $\frac{x}{\sin x} > 0$, $\cos x > 0$, имеем $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, откуда $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$.

Отсюда получаем:

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = \cos 0 - \cos x.$$

Так как косинус есть непрерывная функция, то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$, такое, что

$$|0 - x| < \delta \Longrightarrow |\cos 0 - \cos x| < \varepsilon.$$

Следовательно, для $x \neq 0$, удовлетворяющих неравенству $|x| < \delta$,

$$\left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| = 1 - \frac{\sin x}{x} < \cos 0 - \cos x = |\cos 0 - \cos x| < \varepsilon.$$

Это означает, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

На основе теоремы 1 можно проводить вычисления некоторых пределов.

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1.$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4\right)=1\cdot 4=4.$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.$$

Замечание. В анализе синус есть числовая функция числового аргумента. Но введена эта функция из геометрических соображений (см. определение в п. 63). В геометрии синус рассматривался как числовая функция от величины угла. А величину угла можно измерять при помощи разных единиц измерения. При определении синуса как функции числового аргумента берут за основу радианное измерение углов: синус числа x равен синусу угла в x радианов. Чтобы быть точным, надо было бы писать

$$\sin x=\sin_{\text{г}}(x\ \textit{рад}).\tag{2}$$

Здесь слева $\sin$ есть обозначение функции числового аргумента, а справа $\sin_{\text{г}}$ есть обозначение функции величины угла. При градусном измерении углов получим

$$\sin x=\sin_{\text{г}}\left(\frac{180}{\pi}\cdot x\right)^{\circ}.\tag{3}$$

Если бы в анализе вместо функции $\sin$, определенной равенством (2), ввели функцию

$$f(x)=\sin_{\text{г}}(x^{\circ})=\sin_{\text{г}}\left(\frac{\pi}{180}x\ \textit{рад}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{180}x\right),$$

то для нее получили бы вместо простой формулы

$$\sin'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

формулу

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\frac{\pi}{180},$$

что не так удобно.

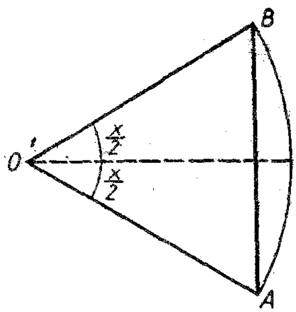


Рис. 4

Теорема 2. ***Предел отношения длины хорды окружности к длине стягиваемой ею дуги при стремлении длины дуги к нулю равен 1*** (рис. 4).

Доказательство. Пусть хорда AB окружности радиуса r стягивается дугой, содержащей x радианов, тогда длина хорды AB равна $|AB| = 2r\sin\frac{x}{2}$, а длина дуги xr. Обозначив длину дуги через l, имеем:

$$\lim_{l\to 0}\frac{|AB|}{l} = \lim_{l\to 0}\frac{2r\cdot\sin\frac{x}{2}}{xr} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1.$$

Как мы видели в п. 75, на основе теоремы 1 доказывается формула для производной синуса, а на ее основе — формулы для производных основных тригонометрических функций. Предел $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$ иногда называют «первым замечательным пределом».

Упражнения

Найдите предел:

42*. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{2x}$.

43*. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 4x}$.

44*. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin(\pi - x)}{\pi - x}$.

45*. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right)}{5x}$.

§ 16

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

79. Вторая производная

Производную от производной f' функции f называют *второй производной функции* f и обозначают f'' (читается: «эф два штриха»). Например,

$$\sin' x = \cos x,\ \sin'' x = \cos' x = -\sin x,$$
$$\cos' x = -\sin x,\ \cos'' x = (-\sin x)' = -\cos x.$$

Вторая производная помогает более подробно исследовать поведение функции. Первая производная есть скорость изменения функции, а вторая производная есть скорость изменения этой скорости.

▶ Пусть во всех точках некоторого промежутка $]a; b[$ первая производная f' имеет один и тот же знак и вторая производная f'' на этом промежутке также имеет один и тот же знак. Рассмотрим поведение функции на этом промежутке в каждом из четырех возможных случаев.

1) $f' > 0$, $f'' > 0$. Из того, что первая производная f' положительна, следует, что функция f на промежутке $]a; b[$ возрастает.

Функция f' также возрастает на этом промежутке, так как $f'' > 0$. Поэтому сама функция f растет ускоренно (рис. 5).

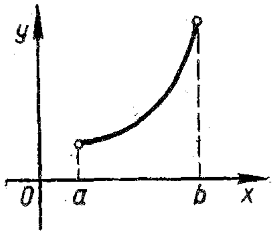


Рис. 5

2) $f' > 0$, $f'' < 0$. Функция f растет замедленно (рис. 6).

3) $f' < 0$, $f'' > 0$. Функция f убывает. Скорость ее изменения f' отрицательна и возрастает (ввиду того, что $f'' > 0$), значит, f' убывает по модулю. Поэтому функция f убывает замедленно (рис. 7).

4) $f' < 0$, $f'' < 0$. Функция f убывает ускоренно (рис. 8).

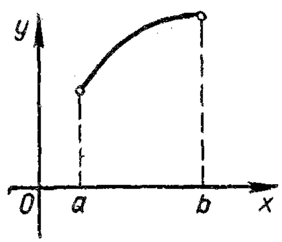


Рис. 6

В первом и третьем случаях $f'' > 0$ и (рис. 5 и 7) график расположен выше касательной, проведенной в любой точке графика. Говорят, что график функции обращен «выпуклостью вниз». Во втором и четвертом случаях $f'' < 0$ и (рис. 6 и 8) график расположен ниже касательной, проведенной в любой точке графика. Говорят, что график обращен «выпуклостью вверх».

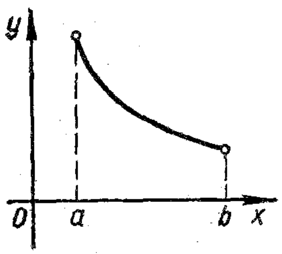


Рис. 7

В курсах математического анализа доказывается, что характер выпуклости определяется только знаком второй производной (независимо от знака первой производной): если на промежутке I вторая производная положительна, то график обращен выпуклостью вниз; если же на промежутке I вторая производная отрицательна, то график обращен выпуклостью вверх.

Пример. Рассмотрим поведение функции cos на промежутках $\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$ и $\left]\frac{\pi}{2};\ \pi\right[$.

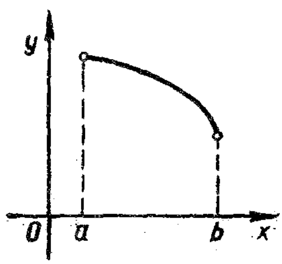


Рис. 8

Для удобства рассмотрения знаков производных функции cos составим таблицу:

	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$
$\cos' x\ (= -\sin x)$	< 0	< 0
$\cos'' x\ (= -\cos x)$	< 0	> 0