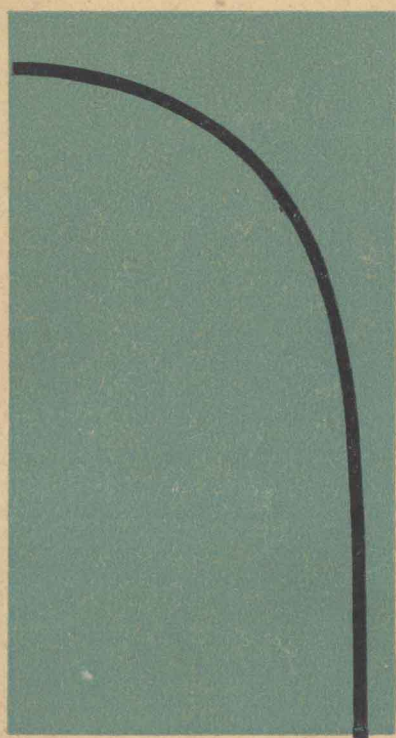


АЛГЕБРА  
И НАЧАЛА  
АНАЛИЗА



10

# АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

УЧЕБНОЕ ПОСОВИЕ  
ДЛЯ **10** КЛАССА  
СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Под редакцией  
А. Н. КОЛМОГорова

*Утверждено Министерством  
просвещения СССР*

ИЗДАНИЕ 4-е

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1979

А. Н. КОЛМОГОРОВ  
О. С. ИВАШЕВ-МУСАТОВ  
Б. М. ИВЛЕВ  
С. И. ШВАРЦБУРД

В книге использованы материалы пробного учебника «Алгебра и начала анализа, 10 кл.» авторов *Б. Е. Вейца* и *И. Т. Демидова* под ред. *А. Н. Колмогорова*.

А  $\frac{60601 - 119}{10(303) - 79}$  инф. письмо

512(075)

© Издательство «Просвещение», 1976 г.

## Глава VI.

### ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, ИХ ГРАФИКИ И ПРОИЗВОДНЫЕ (продолжение)

|                                                                                                                        |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>§ 15. Производные тригонометрических функций</b>                                                                    |    |
| 75. Производная синуса . . . . .                                                                                       | 7  |
| 76. Производные косинуса, тангенса и котангенса . . . . .                                                              | 9  |
| 77. Непрерывность тригонометрических функций . . . . .                                                                 | 11 |
| 78. Предел отношения длины хорды к длине стягиваемой ею дуги . . . . .                                                 | 13 |
| <b>§ 16. Гармонические колебания</b>                                                                                   |    |
| 79. Вторая производная . . . . .                                                                                       | 15 |
| 80. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний . . . . .                                                       | 17 |
| 81. Графики гармонических колебаний . . . . .                                                                          | 21 |
| 82. Сложение гармонических колебаний с общим периодом . . . . .                                                        | 26 |
| <b>§ 17. Исследование тригонометрических функций</b>                                                                   |    |
| 83. Формулы приведения . . . . .                                                                                       | 27 |
| 84. Обратная функция к непрерывной возрастающей (убывающей) функции . . . . .                                          | 32 |
| 85. Свойства и график функции синус. Функция арксинус и решение уравнения $\sin x = a$ . . . . .                       | —  |
| 86. Свойства и график функции косинус. Функция арккосинус и решение уравнения $\cos x = a$ . . . . .                   | 39 |
| 87. Свойства и график функции тангенс. Функция арктангенс и решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$ . . . . .      | 45 |
| 88. Свойства и график функции котангенс. Функция арккотангенс и решение уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ . . . . . | 49 |

## § 18. Тригонометрические тождества и уравнения

|                                                                                          |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 89. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента . . . . . | 53        |
| 90. Тригонометрические функции половинного аргумента . . . . .                           | 57        |
| 91. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента . . . . .   | 59        |
| 92. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму . . . . .             | 61        |
| 93. Решение простейших тригонометрических неравенств . . . . .                           | 63        |
| 94. Примеры решения тригонометрических уравнений . . . . .                               | 67        |
| 95. Доказательство тригонометрических тождеств . . . . .                                 | 69        |
| 96. Сведения из истории . . . . .                                                        | 71        |
| <i>Дополнительные упражнения к главе VI . . . . .</i>                                    | <i>72</i> |

## Г л а в а VII.

### ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

## § 19. Первообразная функции

|                                                    |    |
|----------------------------------------------------|----|
| 97. Первообразная . . . . .                        | 75 |
| 98. Основное свойство первообразной . . . . .      | 77 |
| 99. Три правила нахождения первообразных . . . . . | 79 |
| 100. Площадь криволинейной трапеции . . . . .      | 81 |

## § 20. Интеграл

|                                                                                             |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 101. Формула Ньютона — Лейбница . . . . .                                                   | 84         |
| 102. Интеграл с переменным верхним пределом . . . . .                                       | 87         |
| 103. Нахождение координаты по заданной скорости и скорости по заданному ускорению . . . . . | 88         |
| 104. Интеграл как предел сумм . . . . .                                                     | 90         |
| 105. Работа переменной силы . . . . .                                                       | 92         |
| 106. Три правила вычисления интеграла . . . . .                                             | 95         |
| 107. Сведения из истории . . . . .                                                          | 98         |
| <i>Дополнительные упражнения к главе VII . . . . .</i>                                      | <i>100</i> |

## Г л а в а VIII.

### ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ, ЛОГАРИФИЧЕСКАЯ И СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИИ

## § 21. Производная показательной функции

|                                                                                          |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 108. Показательная функция . . . . .                                                     | 103 |
| 109. Производная показательной функции. Число $e$ . . . . .                              | 106 |
| 110. Дифференциальное уравнение показательного роста и показательного убывания . . . . . | 110 |

## § 22. Логарифмическая функция и ее производная

|                                                                                      |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 111. Логарифмическая функция . . . . .                                               | 115 |
| 112. Производная обратной функции . . . . .                                          | 117 |
| 113. Производная логарифмической функции. Свойства логарифмической функции . . . . . | 119 |
| 114. Натуральный логарифм как интеграл с переменным верхним пределом . . . . .       | 122 |

## § 23. Степенная функция

|                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 115. Степенная функция и ее производная . . . . .                                 | 125 |
| 116. Иррациональные уравнения . . . . .                                           | 126 |
| 117. Сравнение роста логарифмической, степенной и показательной функций . . . . . | 128 |
| 118. Сведения из истории . . . . .                                                | 130 |

*Дополнительные упражнения к главе VIII . . . . . —*

## Глава IX.

### СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

## § 24. Системы уравнений

|                                                                                                                 |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 119. Равносильные уравнения и системы уравнений . . . . .                                                       | 133 |
| 120. Решение систем линейных уравнений методом последовательного исключения переменных (метод Гаусса) . . . . . | 137 |
| 121. Геометрическая иллюстрация решения систем линейных уравнений с двумя и тремя переменными . . . . .         | 141 |
| 122. Нелинейные уравнения и системы уравнений . . . . .                                                         | 144 |

## § 25. Системы неравенств

|                                                    |     |
|----------------------------------------------------|-----|
| 123. Системы неравенств . . . . .                  | 151 |
| 124. Понятие о линейном программировании . . . . . | 156 |
| 125. Сведения из истории . . . . .                 | 160 |

*Дополнительные упражнения к главе IX . . . . . 161*

## МАТЕРИАЛ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

|                                               |     |
|-----------------------------------------------|-----|
| 1. Действительные числа . . . . .             | 162 |
| 2. Функция . . . . .                          | 168 |
| 3. Четные функции. Нечетные функции . . . . . | 172 |
| 4. Периодические функции . . . . .            | 173 |
| 5. Общая схема исследования функции . . . . . | 175 |
| 6. Прямая пропорциональность . . . . .        | 176 |

|                                                               |            |
|---------------------------------------------------------------|------------|
| 7. Обратная пропорциональность . . . . .                      | 179        |
| 8. Линейная функция . . . . .                                 | 181        |
| 9. Преобразование графиков функций . . . . .                  | 184        |
| 10. Исследование квадратного трехчлена . . . . .              | 188        |
| 11. Предел последовательности . . . . .                       | 193        |
| 12. Метод математической индукции . . . . .                   | 199        |
| 13. Комбинаторика . . . . .                                   | 200        |
| 14. Предел и непрерывность функции . . . . .                  | 202        |
| 15. Производная, ее геометрический и физический смысл . . . . | 206        |
| 16. Задачи на экстремум . . . . .                             | 210        |
| 17. Теоремы сложения для тригонометрических функций . . .     | 212        |
| Справочный материал . . . . .                                 | 215        |
| Задачи на повторение всего курса . . . . .                    | 219        |
| <i>Ответы и указания к упражнениям . . . . .</i>              | <i>232</i> |
| <i>Обозначения, встречающиеся в учебном пособии . . . . .</i> | <i>269</i> |
| <i>Предметный указатель . . . . .</i>                         | <i>270</i> |

## § 15

ПРОИЗВОДНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

## 75. Производная синуса

В этом параграфе будут выведены формулы для производных тригонометрических функций. Сначала докажем, что

$$\sin' x = \cos x. * \quad (1)$$

Приведем вывод формулы (1), основанный на двух допущениях, справедливость которых будет доказана несколько позднее:

а) функция  $\cos$  непрерывна при всех значениях аргумента, т. е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x + \Delta x) = \cos x;$$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Допущение о том, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  равен 1, достаточно убедительно из геометрических соображений. В самом деле, считая сначала  $x$  положительным, отложим на единичной окружности (рис. 1) от точки  $P_0$  в обе стороны дуги  $P_0A$  и  $P_0B$  длины  $x$ . Длина всей дуги  $AB$  равна  $2x$ . Вычислим длину хорды  $AB$ :

$$|AB| = |AC| + |CB| = 2 \sin x.$$

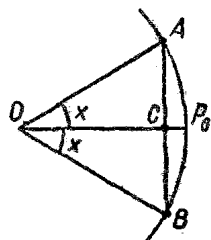


Рис. 1

\* Равенство (1) можно записать и в виде  $(\sin x)' = \cos x.$

Таким образом, отношение длины хорды  $AB$  к длине дуги  $AB$  равно

$$\frac{2 \sin x}{2x} = \frac{\sin x}{x}.$$

Из рисунка видно, что при малых  $x$  длина хорды и длина дуги почти равны, т. е. отношение  $\frac{\sin x}{x}$  близко к единице. .11

Так как

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x},$$

то и при отрицательных  $x$ , малых по модулю, отношение  $\frac{\sin x}{x}$  также близко к единице.

Перейдем теперь к выводу формулы (1). В соответствии с определением производной найдем предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \sin x}{\Delta x},$$

где  $\Delta \sin x = \sin(x + \Delta x) - \sin x$ . Представим приращение синуса в виде произведения. Для этого в формуле

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (\text{см. п. 74})$$

положим  $\alpha = x + \Delta x$  и  $\beta = x$ . Тогда

$$\Delta \sin x = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sin' x &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \cdot 1 = \cos x. \end{aligned}$$

**Примеры.** Воспользовавшись правилами дифференцирования сложной функции, найдем:

1.  $(\sin(ax + b))' = \cos(ax + b) \cdot (ax + b)' = a \cos(ax + b).$
2.  $\left(\sin \frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}.$

### Упражнения

Найдите производную функции:

1.  $f(x) = \sin 3x.$
2.  $g(x) = \sin \left( \frac{1}{2}x + \pi \right).$
3.  $h(x) = \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right).$

4.  $M(x) = 3 \sin^2(2x - 1)$ . 7.  $g(x) = \sin 2x - 2 \sin x \cos x + 5$ .  
 5.  $f(t) = \sin 2t \cos t - \sin t \cos 2t$ . 8.  $h(x) = \sin(2x - 3,5) + \sin 2x$ .  
 6.  $f(x) = \sin(-x) + \sin x$ . 9.  $M(x) = 2x + 3,6 \sin^5(\pi - x)$ .  
 10.  $f(u) = \cos 2u \cos \frac{\pi}{2} - \sin 2u \cdot \sin \frac{\pi}{2}$ .  
 11. Покажите, что производная функции  $f(x) = 2x - \sin x$  положительна при всех значениях  $x$  и, значит, функция  $f$  возрастает на  $R$ .  
 12\*. Найдите, при каких  $x$  производная функции  $g(x) = x - \sin x$  обращается в нуль. Покажите, что эта функция возрастает на  $R$ . Начертите ее график.  
 13\*. Исследуйте функцию  $h(x) = x - 2 \sin x$ .  
 14\*. Докажите, что функция  $g(x) = \sin(2x - 5) - 3x$  убывает на промежутке  $]-\infty; \infty[$ .

## 76. Производная косинуса, тангенса и котангенса

В этом пункте мы воспользуемся производной синуса (п. 75) для вычисления производных косинуса, тангенса и котангенса.

$$\cos' x = -\sin x, \quad (1)$$

$$\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (2)$$

$$\operatorname{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}. \quad (3)$$

Каждая из этих формул справедлива в любой точке области определения соответствующей функций.

Для вывода формулы (1) воспользуемся равенством  $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$  и правилом дифференцирования сложной функции:

$$\begin{aligned} \cos' x &= \left( \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \\ &= \sin x (-1) = -\sin x. \end{aligned}$$

Чтобы доказать формулы (2) и (3), применим формулу для производной частного и уже известные формулы для производных синуса и косинуса:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}' x &= \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\sin' x \cos x - \cos' x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \\ \operatorname{ctg}' x &= \left( \frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{\cos' x \sin x - \sin' x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

**Пример.** Найдём касательные к синусоиде в точках с абсциссами  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{2}$ ,  $x_3 = \pi$ .

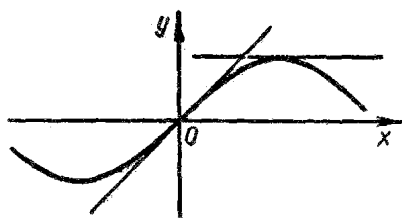


Рис. 2

Как вы знаете (п. 52), уравнение касательной к графику функции  $f$  в точке  $(x_0; y_0)$ , где  $y_0 = f(x_0)$ , имеет вид:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

В данном случае  $f(x) = \sin x$ . Для решения задачи надо найти значение производной синуса в точках  $0, \frac{\pi}{2}$  и  $\pi$ . Про-

изводная синуса равна косинусу:  $f'(0) = \cos 0 = 1$ . Далее находим  $f'(\frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$  и  $f'(\pi) = \cos \pi = -1$ . Поэтому:

1) в точке с абсциссой  $x_1 = 0$  уравнение касательной принимает вид  $y - 0 = 1 \cdot (x - 0)$ , т. е.  $y = x$ . Мы видим, что касательная к синусоиде в точке  $(0; 0)$  есть биссектриса первого и третьего координатных углов (рис. 2);

2) в точке с абсциссой  $x_2 = \frac{\pi}{2}$  уравнение касательной будет  $y - 1 = 0 \cdot (x - \frac{\pi}{2})$ , т. е.  $y = 1$ . Это горизонтальная прямая (рис. 2);

3) аналогично, уравнение касательной в точке с абсциссой  $x_3 = \pi$  будет  $y - 0 = (-1)(x - \pi)$ , т. е.  $y = \pi - x$ .

## Упражнения

Найдите производную функции:

15.  $f(x) = 13 \cos x$ .

22.  $s(x) = \frac{2 \sin(6x+3)}{\cos(6x+3)} + \operatorname{tg}(6x+3)$ .

16.  $h(x) = 3 \cos(2,3x - 10\pi)$ .

23.  $f(u) = \cos 2u \sin u + \sin 2u \cos u$ .

17.  $g(x) = 2\pi - 0,5 \cos(\pi - x)$ .

24.  $g(t) = \cos 2\pi \cos 3t + \sin 3t \sin 2\pi$ .

18.  $u(x) = 2x^2 - 30 \cos(5x+6)$ .

25.  $v(t) = 4 \operatorname{ctg}(2t+3)$ .

19.  $v(x) = -2 \cos(x-\pi) + 2 \sin 2x$ .

26.  $v(x) = 7 \operatorname{ctg}(2x - 2\pi)$ .

20.  $v(x) = 5 \operatorname{tg}(2x+3) + 2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$ .

27.  $f(x) = \cos 2,5x \cdot \sin 0,5\pi + \sin 2,5x \cdot \cos 0,5\pi$ .

21.  $s(x) = 3 \operatorname{tg}(2x+1)$ .

28.  $f(x) = \sin x \cos 5x - \sin 5x \cos x$ .

Напишите уравнение касательной к графику функции:

29.  $f(x) = \sin x$  в точках с абсциссами  $-\pi$  и  $\frac{\pi}{2}$ .

30.  $s(x) = \cos x$  в точках с абсциссами  $-\frac{\pi}{2}$  и  $2\pi$ .

31.  $g(x) = \operatorname{tg} x$  в точках с абсциссами

$$0 \text{ и } \frac{\pi}{4}.$$

### 77\*. Непрерывность тригонометрических функций

В п. 75 мы опирались на допущение о непрерывности функции  $\cos$ .

Докажем это допущение, а также непрерывность функций  $\sin$ ,  $\operatorname{tg}$ ,  $\operatorname{ctg}$  во всех точках, где они определены. Для этого нам потребуется следующая лемма.

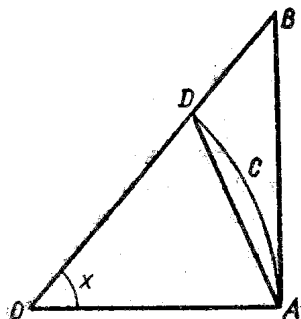


Рис. 3

**Л е м м а.** Для всех  $x$ , удовлетворяющих условию

$$0 < |x| < \frac{\pi}{2},$$

справедливо неравенство:

$$|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|.$$

Доказательство начнем со случая  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ . Сравним площади  $S_{OAD}$  (треугольника  $OAD$ ),  $S_{OAB}$  (треугольника  $OAB$ ) и  $S_{OACD}$  (сектора  $OACD$ ) (рис. 3). Эти площади легко вычисляются:

$$S_{OAD} = \frac{1}{2} |OA| \cdot |OD| \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin x,$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} |OA| \cdot |AB| = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x,$$

$$S_{OACD} = \frac{1}{2} r^2 \cdot x = \frac{1}{2} x.$$

Из рисунка 3 видим, что

$$S_{OAD} < S_{OACD} < S_{OAB},$$

или

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x,$$

т. е.

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x. \quad (2)$$

Так как  $\sin x$  и  $\operatorname{tg} x$  положительны при  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , то при  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  неравенство (1) справедливо.

\* Звездочкой отмечен дополнительный учебный материал, не обязательный для изучения всеми учащимися. В ряде случаев такой материал отмечен двумя треугольниками: ► (в начале), ◄ (в конце). См. стр. 15—17 и др.

Остается рассмотреть случай  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ . При таких  $x$  имеем  $0 < -x < \frac{\pi}{2}$  и к  $-x$  можно применить неравенство (2):

$$\sin(-x) < -x < \operatorname{tg}(-x). \quad (3)$$

Так как теперь  $-x = |x|$ ,  $\sin(-x) = |\sin x|$ ,  $\operatorname{tg}(-x) = |\operatorname{tg} x|$ , то из (3) вытекает (1).

Этим доказательство неравенства (1) для всех  $x \neq 0$  из промежутка  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  закончено.

**Теорема 1. Функция косинус непрерывна на всей числовой прямой, т. е. для любого  $x_0 \in R$**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0.$$

**Доказательство.** Оценим  $|\cos x - \cos x_0|$ .

$$\begin{aligned} |\cos x - \cos x_0| &= \left| 2 \sin \frac{x_0 - x}{2} \sin \frac{x + x_0}{2} \right| = 2 \left| \sin \frac{x_0 - x}{2} \right| \times \\ &\times \left| \sin \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right| = |x - x_0|. \end{aligned}$$

Поэтому, если для любого  $\varepsilon > 0$  положить  $\delta = \varepsilon$ , при  $|x - x_0| < \delta$  будем иметь:

$$|\cos x - \cos x_0| \leq |x - x_0| < \varepsilon.$$

Это означает, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0,$$

т. е. функция косинус непрерывна в точке  $x_0$ .

Аналогично доказывается теорема 2.

**Теорема 2. Функция синус непрерывна на всей числовой прямой, т. е. для любого  $x_0 \in R$**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0.$$

**Теорема 3. Функции тангенс и котангенс непрерывны каждая в своей области определения, т. е.**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0 \text{ для любого } x_0 \in D(\operatorname{tg}),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0 \text{ для любого } x_0 \in D(\operatorname{ctg}).$$

**Доказательство.** Действительно, если  $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , то  $\cos x_0 \neq 0$ .

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x}{\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x} = \frac{\sin x_0}{\cos x_0} = \operatorname{tg} x_0.$$

Аналогично доказывается вторая часть теоремы 3.

## Упражнения \*

Вычислите предел:

$$32. \lim_{x \rightarrow 0} \sin x. \quad 34. \lim_{x \rightarrow 0} \cos x. \quad 36. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x. \quad 38. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x.$$

$$33. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x. \quad 35. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos x. \quad 37. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x. \quad 39. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x.$$

40. Докажите непрерывность функции  $\sin$  в точке  $x_0 \in \mathbb{R}$  и функции  $\operatorname{ctg}$  в точке  $x_0 \in D(\operatorname{ctg})$ .

41. Докажите, что функция  $f$  непрерывна при всех  $x \in \mathbb{R}$ , если

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Начертите ее график.

**78\*. Предел отношения длины хорды к длине стягиваемой ею дуги**

Начнем с доказательства допущения «б») из п. 75.

**Теорема 1.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (1)$$

**Доказательство.** Пусть  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  или  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ . Тогда выполняется неравенство  $|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|$  (см. п. 77). Разделив все части этого неравенства на  $|\sin x|$ , получим:

$$1 < \left| \frac{x}{\sin x} \right| < \frac{1}{|\cos x|}.$$

Учитывая, что при указанных условиях  $\frac{x}{\sin x} > 0$ ,  $\cos x > 0$ , имеем

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \text{ откуда } 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Отсюда получаем:

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = \cos 0 - \cos x.$$

Так как косинус есть непрерывная функция, то для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать  $\delta > 0$ , такое, что

$$|0 - x| < \delta \Rightarrow |\cos 0 - \cos x| < \varepsilon.$$

Следовательно, для  $x \neq 0$ , удовлетворяющих неравенству  $|x| < \delta$ ,

$$\left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right| = 1 - \frac{\sin x}{x} < \cos 0 - \cos x = |\cos 0 - \cos x| < \varepsilon.$$

Это означает, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

На основе теоремы 1 можно проводить вычисления некоторых пределов.

Пример 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Пример 2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4 \right) = 1 \cdot 4 = 4.$$

Пример 3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

**З а м е ч а н и е.** В анализе синус есть числовая функция числового аргумента. Но введена эта функция из геометрических соображений (см. определение в п. 63). В геометрии синус рассматривался как числовая функция от величины угла. А величину угла можно измерять при помощи разных единиц измерения. При определении синуса как функции числового аргумента берут за основу радианное измерение углов: синус числа  $x$  равен синусу угла в  $x$  радианов. Чтобы быть точным, надо было бы писать

$$\sin x = \sin_r (x \text{ рад}). \quad (2)$$

Здесь слева  $\sin$  есть обозначение функции числового аргумента, а справа  $\sin_r$  есть обозначение функции величины угла. При градусном измерении углов получим

$$\sin x = \sin_r \left( \frac{180}{\pi} \cdot x \right)^{\circ}. \quad (3)$$

Если бы в анализе вместо функции  $\sin$ , определенной равенством (2), ввели функцию

$$f(x) = \sin_r(x^{\circ}) = \sin_r \left( \frac{\pi}{180} x \text{ рад} \right) = \sin \left( \frac{\pi}{180} x \right),$$

то для нее получили бы вместо простой формулы

$$\sin'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

формулу

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{\pi}{180},$$

что не так удобно.

**Теорема 2.** Предел отношения длины хорды окружности к длине стягиваемой ею дуги при стремлении длины дуги к нулю равен 1 (рис. 4).

**Доказательство.** Пусть хорда  $AB$  окружности радиуса  $r$  стягивается дугой, содержащей  $x$  радианов, тогда длина

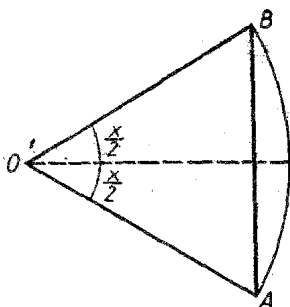


Рис. 4

хорды  $AB$  равна  $|AB| = 2r \sin \frac{x}{2}$ , а длина дуги  $xr$ . Обозначив длину дуги через  $l$ , имеем:

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{|AB|}{l} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{2r \cdot \sin \frac{x}{2}}{xr} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1.$$

Как мы видели в п. 75, на основе теоремы 1 доказывается формула для производной синуса, а на ее основе — формулы для производных основных тригонометрических функций. Предел  $\frac{\sin x}{x}$  при  $x \rightarrow 0$  иногда называют «первым замечательным пределом».

### Упражнения

Найдите предел:

$$42^*. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{2x}. \quad 44^*. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{\pi - x}.$$

$$43^*. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 4x}. \quad 45^*. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right)}{5x}.$$

## § 16

### ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

#### 79. Вторая производная

Производную от производной  $f'$  функции  $f$  называют *второй производной функции  $f$*  и обозначают  $f''$  (читается: «эф два штриха»). Например,

$$\begin{aligned} \sin' x &= \cos x, \quad \sin'' x = \cos' x = -\sin x, \\ \cos' x &= -\sin x, \quad \cos'' x = (-\sin x)' = -\cos x. \end{aligned}$$

Вторая производная помогает более подробно исследовать поведение функции. Первая производная есть скорость изменения функции, а вторая производная есть скорость изменения этой скорости.

► Пусть во всех точках некоторого промежутка  $]a; b[$  первая производная  $f'$  имеет один и тот же знак и вторая производная  $f''$  на этом промежутке также имеет один и тот же знак. Рассмотрим поведение функции на этом промежутке в каждом из четырех возможных случаев.

1)  $f' > 0$ ,  $f'' > 0$ . Из того, что первая производная  $f'$  положительна, следует, что функция  $f$  на промежутке  $]a; b[$  возрастает.

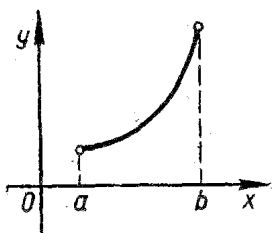


Рис. 5

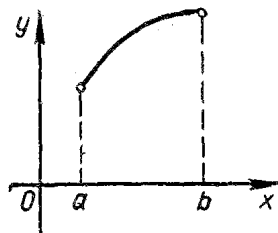


Рис. 6

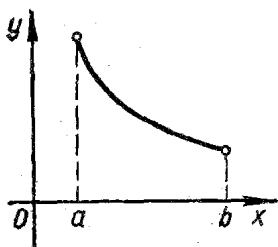


Рис. 7

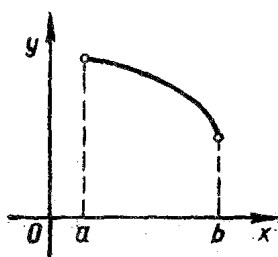


Рис. 8

Функция  $f'$  также возрастает на этом промежутке, так как  $f'' > 0$ . Поэтому сама функция  $f$  растет ускоренно (рис. 5).

2)  $f' > 0$ ,  $f'' < 0$ . Функция  $f$  растет замедленно (рис. 6).

3)  $f' < 0$ ,  $f'' > 0$ . Функция  $f$  убывает. Скорость ее изменения  $f'$  отрицательна и возрастает (ввиду того, что  $f'' > 0$ ), значит,  $f'$  убывает по модулю. Поэтому функция  $f$  убывает замедленно (рис. 7).

4)  $f' < 0$ ,  $f'' < 0$ . Функция  $f$  убывает ускоренно (рис. 8).

В первом и третьем случаях  $f'' > 0$  и (рис. 5 и 7) график расположен выше касательной, проведенной в любой точке графика. Говорят, что график функции обращен «выпуклостью вниз». Во втором и четвертом случаях  $f'' < 0$  и (рис. 6 и 8) график расположен ниже касательной, проведенной в любой точке графика. Говорят, что график обращен «выпуклостью вверх».

В курсах математического анализа доказывается, что характер выпуклости определяется только знаком второй производной (независимо от знака первой производной): если на промежутке  $I$  вторая производная положительна, то график обращен выпуклостью вниз; если же на промежутке  $I$  вторая производная отрицательна, то график обращен выпуклостью вверх.

**Пример.** Рассмотрим поведение функции  $\cos$  на промежутках  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$  и  $\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ .

Для удобства рассмотрения знаков производных функции  $\cos$  составим таблицу:

|                        | $0 < x < \frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ |
|------------------------|-------------------------|---------------------------|
| $\cos' x (= -\sin x)$  | $< 0$                   | $< 0$                     |
| $\cos'' x (= -\cos x)$ | $< 0$                   | $> 0$                     |