ЗАДАЧИ
ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ
МАТЕМАТИКЕ

Виктор Борисович Лидский, Лев Васильевич Овсянников, Анатолий Николаевич Тулайков, Михаил Иванович Шабунин, Борис Васильевич Федосов

ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

М., 1973 г., 416 стр. с илл.

Редактор *В. В. Донченко*

Техн. редактор *Е. Н. Земская.* Корректор *Л. Н. Боровина*

Сдано в набор 18/XII 1972 г. Подписано к печати 26/IV 1973 г. Бумага $84\times108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 13. Условн. печ. л. 21,84. Уч.-изд. л. 21,26. Тираж 300000 экз. Т-05755. Цена книги 70 коп. Заказ № 22.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Союзполиграфпрома при Государственном комитете
Совета Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли.
Москва, М-54, Валовая, 28

ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

ИЗДАНИЕ СЕДЬМОЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1973

51
Л 55
УДК 511+512+513+514 (075.4)

КОЛЛЕКТИВ АВТОРОВ:
В. Б. ЛИДСКИЙ, Л. В. ОВСЯННИКОВ, А. Н. ТУЛАЙКОВ,
М. И. ШАБУНИН, Б. В. ФЕДОСОВ

АННОТАЦИЯ

Книга представляет собой сборник задач повышенной трудности, снабженных указаниями и решениями. Она может быть использована при подготовке к приемным экзаменам в такие высшие учебные заведения, где предъявляются повышенные требования по математике, а также в работе школьных математических кружков.

З $\frac{0222-1757}{042(02)-73}$ 31-73

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга имеет целью помочь тому, кто желает углубить свои знания по элементарной математике. В книге собраны задачи, предлагавшиеся на приемных экзаменах поступавшим в Московский физико-технический институт. Для решения задач требуются знания в объеме средней школы (те немногие сведения, которые иногда не включаются в программы средних школ, приводятся особо). Тем не менее следует отметить, что большинство предлагаемых задач являются задачами повышенной трудности.

Книга состоит из трех разделов: «Алгебра», «Геометрия» и «Тригонометрия», каждый из которых разбит на подразделы. Внутри каждого подраздела задачи расположены в порядке возрастающей трудности.

В седьмое издание включено около 60 новых задач, часть старых менее интересных задач опущена. При переработке книги учтен опыт приемных экзаменов в вузы в последние годы.

Авторы

ЗАДАЧИ

АЛГЕБРА

1. Арифметическая и геометрическая прогрессии

Предварительные замечания

Если a_n есть n-й член, d — разность и S_n — сумма n первых членов *арифметической прогрессии*, то

$$a_n = a_1 + d(n-1), \tag{1}$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{[2a_1 + d(n-1)]n}{2}. \tag{2}$$

Если u_n есть n-й член, q — знаменатель и S_n — сумма n первых членов *геометрической прогрессии*, то

$$u_n = u_1 q^{n-1}, \tag{3}$$

$$S_n = \frac{u_n q - u_1}{q-1} = \frac{u_1(q^n - 1)}{q-1}. \tag{4}$$

Если, наконец, S есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии ($|q| < 1$), то

$$S = \frac{u_1}{1-q}. \tag{5}$$

1. Доказать, что если положительные числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию, то числа

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \quad \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \quad \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

также образуют арифметическую прогрессию.

2. Положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

3. Доказать, что если числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ отличны от нуля и образуют арифметическую прогрессию, то

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}.$$

4. Доказать, что всякая последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n$, удовлетворяющих при любом $n \geqslant 3$ условию

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n},$$

образует арифметическую прогрессию.

5. Показать, что для всякой арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ имеют место равенства

$$a_1-2a_2+a_3=0,$$
$$a_1-3a_2+3a_3-a_4=0,$$
$$a_1-4a_2+6a_3-4a_4+a_5=0$$

и вообще при всяком $n>2$ имеем:

$$a_1-C_n^1a_2+C_n^2a_3-\ldots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}a_n+(-1)^nC_n^na_{n+1}=0.$$

Указание. В этой и следующей задачах полезно воспользоваться легко проверяемым тождеством

$$C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}.$$

6. Доказать, что для всякой арифметической прогрессии $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$ при $n \geqslant 3$ имеют место равенства

$$a_1^2-C_n^1a_2^2+\ldots+(-1)^nC_n^na_{n+1}^2=0.$$

7. Доказать, что если числа $\log_k x$, $\log_m x$, $\log_n x$ $(x \neq 1)$ образуют арифметическую прогрессию, то

$$n^2=(kn)^{\log_k m}.$$

8. Найти такую арифметическую прогрессию, у которой отношение суммы первых n членов к сумме kn последующих не зависит от n.

9. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ образуют арифметическую прогрессию. Найти эту прогрессию, если

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=a,\quad x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=b^2.$$

Указание. В этой и следующей задачах полезно воспользоваться равенством

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

10. Последовательность чисел 1, 4, 10, 19, ... обладает тем свойством, что разности двух соседних чисел образуют арифметическую прогрессию. Найти n-й член и сумму первых n членов этой последовательности чисел.

11. Составим таблицу

$$\begin{array}{l} 1, \\ 2,\ 3,\ 4 \\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7 \\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Доказать, что сумма членов каждой горизонтальной строки равна квадрату нечетного числа.

12. В геометрической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots$ даны члены $a_{m+n}=A$, $a_{m-n}=B$. Найти a_m и a_n $(A \neq 0)$.

13. Пусть S_n есть сумма первых n членов геометрической прогрессии, $S_n \neq 0$, $q \neq 0$. Доказать, что

$$\frac{S_n}{S_{2n}-S_n}=\frac{S_{2n}-S_n}{S_{3n}-S_{2n}}.$$

14. Зная сумму S_n первых n членов геометрической прогрессии и сумму $\tilde{S}_n$ обратных величин этих членов, найти произведение Π_n первых n членов прогрессии.

15. Найти сумму

$$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+(n+1)\,x^n.$$

16. Найти сумму

$$1+11+111+\ldots+111\ldots1,$$

если последнее слагаемое есть n-значное число.

17. Найти сумму

$$nx+(n-1)\,x^2+\ldots+2\cdot x^{n-1}+1\cdot x^n.$$

18. Найти сумму

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}.$$

19. Доказать, что числа 49, 4489, 444889, ..., получаемые вставкой 48 в середину предыдущего числа, являются квадратами целых чисел.

20. Доказать, что можно найти убывающую геометрическую прогрессию

$$1,\ q,\ q^2,\ \ldots,\ q^n,\ \ldots,$$

каждый член которой отличается от суммы всех следующих за ним членов заданным постоянным множителем k. При каких k задача имеет решение?

21. Бесконечная последовательность чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots$ $\ldots, x_n, \ldots$ ($x_1 \neq 0$) при любом $n \geqslant 3$ удовлетворяет условию

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2)(x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2) = \\ = (x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n)^2.$$

Доказать, что $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ являются последовательными членами геометрической прогрессии.

Указание. Можно применить метод полной индукции.

22. Даны арифметическая прогрессия с общим членом a_n и геометрическая прогрессия с общим членом b_n, причем $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_1 \neq a_2$ и $a_n > 0$ для всех натуральных чисел n. Доказать, что $a_n < b_n$ при $n > 2$.

23. Доказать, что если для геометрической прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и арифметической прогрессии $b_1, b_2, \ldots$ $\ldots, b_n, \ldots$ выполняются неравенства

$$a_1 > 0, \ \frac{a_2}{a_1} > 0, \ b_2 - b_1 > 0,$$

то существует такое число α, что $\log_\alpha a_n - b_n$ не зависит от n.

2. Алгебраические уравнения и системы уравнений

Предварительные замечания

При решении предлагаемых ниже систем уравнений исходная система упрощающими преобразованиями сводится к равносильной системе, все решения которой либо известны, либо могут быть найдены известными приемами. В некоторых случаях приходится переходить к системам, которые заведомо удовлетворяются всеми решениями исходной системы, однако, вообще говоря, не только ими. В этих случаях определяемые наборы значений неизвестных следует проверять подстановкой в исходную систему.

В отдельных задачах используются *формулы Виета*, связывающие коэффициенты уравнения третьей степени

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0 \qquad (1)$$

с его корнями x_1, x_2, x_3. Они имеют вид:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = q, \quad x_1x_2x_3 = -r. \qquad (2)$$

Формулы (2) находятся приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях x в тождестве

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

24. Найти все вещественные решения системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x^3+y^3&=1, \\ x^2y+2xy^2+y^3&=2. \end{aligned}\right\}$$

25. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^2+xy+y^2&=4, \\ x+xy+y&=2. \end{aligned}\right\}$$

26. Найти вещественные решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^3+y^3&=5a^3, \\ x^2y+xy^2&=a^3 \end{aligned}\right\}$$

при условии, что a вещественно и не равно 0.

27. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}&=12, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=\frac{1}{3}. \end{aligned}\right\}$$

28. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^4+x^2y^2+y^4&=91, \\ x^2-xy+y^2&=7. \end{aligned}\right\}$$

29. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^3-y^3&=19(x-y), \\ x^3+y^3&=\ \ 7(x+y). \end{aligned}\right\}$$

30. Найти все вещественные решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2(x+y)&=5xy, \\ 8(x^3+y^3)&=65. \end{aligned}\right\}$$

31. Найти вещественные решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} (x+y)(x^2-y^2)&=9, \\ (x-y)(x^2+y^2)&=5. \end{aligned}\right\}$$

32. Найти все вещественные решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} x+y&=1, \\ x^4+y^4&=7. \end{aligned}\right\}$$

33. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x+y&=1, \\ x^5+y^5&=31. \end{aligned}\right\}$$

34. Найти вещественные решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^4+y^4-x^2y^2&=13, \\ x^2-y^2+2xy&=1, \end{aligned}\right\}$$

удовлетворяющие условию

$$xy \geqslant 0.$$

35. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} (x^2+1)(y^2+1)&=10, \\ (x+y)(xy-1)&=3. \end{aligned}\right\}$$

Указание. Положить $xy=v$, $x+y=u$.

36. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} (x^2+y^2)\frac{x}{y}&=6, \\ (x^2-y^2)\frac{y}{x}&=1. \end{aligned}\right\}$$

37. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=axy, \\ x^4+y^4&=bx^2y^2. \end{aligned}\right\}$$

38. Решить уравнение (разлагая левую часть на множители)

$$\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2+\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}=0.$$

39. Решить уравнение

$$\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right).$$

40. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{x+y}{xy}+\frac{xy}{x+y}&=a+\frac{1}{a}, \\ \frac{x-y}{xy}+\frac{xy}{x-y}&=b+\frac{1}{b}. \end{aligned}\right\}$$

41. Найти все решения уравнения

$$(x-4{,}5)^4+(x-5{,}5)^4=1.$$

42. Решить систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} |x-1|+|y-5|&=1, \\ y&=5+|x-1|\,^{*)}. \end{aligned}\right\}$$

43. Выяснить, при каких вещественных x и y имеет место равенство

$$5x^2+5y^2+8xy+2y-2x+2=0.$$

44. Найти все вещественные значения x и y, удовлетворяющие уравнению

$$x^2+4x\cos(xy)+4=0.$$

45. Найти вещественные решения системы

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=2, \\ 2xy-z^2&=4. \end{aligned}\right\}$$

46. Выяснить, при каком значении a система

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=z, \\ x+y+z&=a \end{aligned}\right\}$$

имеет единственное вещественное решение, и найти это решение.

47. Доказать, что для любого (вообще говоря, комплексного) решения системы

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+xy+\frac{1}{xy}&=a, \\ x^4+y^4+x^2y^2-\frac{1}{x^2y^2}-2&=b^2 \end{aligned}\right\}$$

сумма x^2+y^2 вещественна при любых вещественных a и b, $a\neq 0$.

48. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} ax+y+z&=1, \\ x+ay+z&=a, \\ x+y+az&=a^2. \end{aligned}\right\}$$

---

*) Абсолютной величиной числа x (обозначается через $|x|$) называется неотрицательное число, определяемое следующими условиями:

$$|x|=\begin{cases} -x, & \text{если } x<0; \\ x, & \text{если } x\geqslant 0. \end{cases}$$

49. Какому условию должны удовлетворять числа a_1, a_2, a_3, чтобы система

$$\left.\begin{aligned} (1+a_1)x+y+z&=1,\\ x+(1+a_2)y+z&=1,\\ x+y+(1+a_3)z&=1 \end{aligned}\right\}$$

имела решение и притом единственное?

50. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+\ldots+nx_n&=a_1,\\ nx_1+x_2+2x_3+3x_4+\ldots+(n-1)x_n&=a_2,\\ (n-1)x_1+nx_2+x_3+2x_4+\ldots+(n-2)x_n&=a_3,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4+\ldots+x_n&=a_n. \end{aligned}\right\}$$

51. Доказать, что если

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=0,\\ x_2+x_3+x_4&=0,\\ \ldots\ldots\ldots&\\ x_{99}+x_{100}+x_1&=0,\\ x_{100}+x_1+x_2&=0, \end{aligned}\right\}$$

то

$$x_1=x_2=\ldots=x_{99}=x_{100}=0.$$

52. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^2+xy+xz-x&=2,\\ y^2+xy+yz-y&=4,\\ z^2+xz+yz-z&=6. \end{aligned}\right\}$$

53. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x+y-z&=7,\\ x^2+y^2-z^2&=37,\\ x^3+y^3-z^3&=1. \end{aligned}\right\}$$

54. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{xyz}{x+y}&=2,\\ \frac{xyz}{y+z}&=\frac{6}{5},\\ \frac{xyz}{z+x}&=\frac{3}{2}. \end{aligned}\right\}$$

55. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} u^2+v^2+w&=2,\\ v^2+w^2+u&=2,\\ w^2+u^2+v&=2. \end{aligned}\right\}$$

56. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^2+xy+y^2&=1,\\ x^2+xz+z^2&=4,\\ y^2+yz+z^2&=7. \end{aligned}\right\}$$

57. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_2x_3\ldots x_n}{x_1}&=a_1,\\ \frac{x_1x_3\ldots x_n}{x_2}&=a_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ \frac{x_1x_2\ldots x_{n-1}}{x_n}&=a_n, \end{aligned}\right\}$$

предполагая, что числа $a_1, \ldots, a_n$ и $x_1, \ldots, x_n$ положительны.

58. Найти вещественные решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=6,\\ x^2+y^2+z^2&=14,\\ xz+yz&=(xy+1)^2. \end{aligned}\right\}$$

59. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^2+xy+xz+yz&=a,\\ y^2+xy+xz+yz&=b,\\ z^2+xy+xz+yz&=c, \end{aligned}\right\}$$

предполагая, что $abc>0$.

60. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x(y+z)&=a^2,\\ y(z+x)&=b^2,\\ z(x+y)&=c^2, \end{aligned}\right\}$$

предполагая, что $abc\neq 0$.

61. Найти действительные решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} y^3+z^3&=2a(yz+zx+xy),\\ z^3+x^3&=2b(yz+zx+xy),\\ x^3+y^3&=2c(yz+zx+xy), \end{aligned}\right\}$$

предполагая, что a, b, c — длины сторон некоторого треугольника.

62. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} y+2x+z&=a(x+y)(z+x),\\ z+2y+x&=b(y+z)(x+y),\\ x+2z+y&=c(z+x)(y+z). \end{aligned}\right\}$$

63. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=9,\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}&=1,\\ xy+xz+yz&=27. \end{aligned}\right\}$$

64. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=a,\\ xy+yz+xz&=a^2,\\ xyz&=a^3. \end{aligned}\right\}$$

65. Показать, что единственным решением системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+z&=0,\\ yz+zx+xy-y^2&=0,\\ xy+z^2&=0 \end{aligned}\right\}$$

является решение $x=y=z=0$.

66. Найти вещественные решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} &yz+x^2=xz+y^2=xy+z^2,\\ &\frac{2x}{yz+x^2}+\frac{2y}{xz+y^2}+\frac{2z}{xy+z^2}=x^3+y^3+z^3. \end{aligned}\right\}$$

67. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} xy+z^2&=2,\\ yz+x^2&=2,\\ xz+y^2&=2. \end{aligned}\right\}$$

68. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 3xy-\frac{16}{xz}&=-5,\\ xz+\frac{8}{yz}&=4,\\ yz-\frac{3}{xy}&=1. \end{aligned}\right\}$$

69. Найти решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} yz-x^2-xz-xy&=2,\\ y^2+xy+zy-zx&=3,\\ z^2+zy+xz-xy&=6, \end{aligned}\right\}$$

удовлетворяющие условию $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

70. Найти вещественные решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^3+y^3&=19xy+7xz+11yz,\\ x^3+z^3&=26(xy+xz+yz),\\ y^3+z^3&=47xy+35xz+39yz. \end{aligned}\right\}$$

71. Найти вещественные решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^2-y^2&=\frac{1}{xy}+z,\\ y^2-z^2&=\frac{1}{yz}+x,\\ z^2-x^2&=\frac{1}{zx}+y. \end{aligned}\right\}$$

72. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} y^2+xy+x^2&=z,\\ x^2+zx+z^2&=y,\\ z^3-y^3&=x^2+2zx+zy. \end{aligned}\right\}$$

73. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} xy&=5x+6y-4z,\\ y^2&=3x+5y-z,\\ yz&=x+4y+2z. \end{aligned}\right\}$$

74. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} y+z&=2x,\\ y^2+3z^2&=28x^2,\\ y^3+8z^3&=(y-4x)(1-4z+7xy). \end{aligned}\right\}$$