

Thomas Krist

**Werkstatt-
Tabellen**

BAND I

**TECHNISCHES
GRUNDWISSEN**

Dipl.-Ing. Thomas Krist

WERKSTATT- TABELLEN

BAND I

TECHNISCHES
GRUNDWISSEN

**8., erweiterte und verbesserte
Auflage mit über 4000 Bildern**



**Technik-Tabellen-Verlag
Fikentscher & Co · Darmstadt**

Der Inhalt dieses Bandes wurde überprüft von

Dipl.-Ing. Adler	Toleranzen und Passungen, Messen, Prüfen und Anreißen
Dipl.-Ing. Fritz Dietzel Ing. F. Grahl	Mathematik und Geometrie, Maßsysteme, Massstabellen, Mechanik, Festigkeitslehre, Wärmelehre, Elektrotechnik, Werkstoffe, Werkstoffprüfung, Toleranzen und Passungen, Messen, Prüfen und Anreißen
Dr.-Ing. K. Bodenbeck	Werkstoffe, Werkstoffprüfung
Ing. W. Kind	Normung, Technisches Zeichnen
Ing. A. Lindecke	Normung, Massstabellen, Wärmelehre, Maschinenelemente
Dr. W. Möller	Mathematische Tabellen, Internationale Einheiten
Dipl.-Phys. Achim Berger Dr. Walter B. Rüppel	Mathematische Tabellen, Internationale Einheiten
Dr. F. Müller	Chemie
Dr.-Ing. W. Nell † Dipl.-Ing. T. Hamerla	Elektrotechnik
Ing. R. Neumann	Chemie
Obering. R. Preuß	Einteilung der Arbeitstechniken
Ing. W. Schulze	Werkzeuge und Maschinen
Ing. H. Skudlarek	Maschinenelemente, Werkzeuge und Maschinen
Dr. Th. Springer	Oberflächenschutz
Ing. K. Zirpke	Mechanik, Festigkeitslehre, Maschinenelemente

Beachte:

Die Normblattangaben wurden mit Genehmigung des Deutschen Normenausschusses wiedergegeben.

Maßgebend ist die jeweils neueste Ausgabe des Normblattes (siehe jeweiliges Normblattverzeichnis) im Format A 4, das bei der Beuth-Vertrieb GmbH, Berlin W 15 und Köln, erhältlich ist.

ISBN Nr. 387 807 004

8., erweiterte und verbesserte Auflage 1978

Alle Rechte, auch der Übersetzung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (Druck, Fotokopie, Mikrofilm oder einem anderen Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des Verlages reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 1964, by Technik-Tabellen-Verlag Fikentscher & Co. · Darmstadt
Printed in Germany

Druck: Beltz-Offsetdruck, 6944 Hemsbach/Bergstraße
Einband: C. Fikentscher KG · Darmstadt

Vorwort

Das Erfolgsprinzip für über 180.000 Expl. der Buchreihe „KRIST-WERKSTATT-TABELLEN“ ist seit vielen Jahren einem großen Leserkreis bekannt: kurze Texte – klare Zeichnungen – großes Stichwortregister. Diese Kriterien sind Bestandteil auch der **8. verbesserten Auflage für den ersten Band**, der den Bereich des „Technischen Grundwissens“ darstellt.

Die Buchreihe ist nunmehr komplett – sie umfaßt 5 Bände mit 3.689 Seiten – 16.800 Zeichnungen und 12.500 Stichworten – die Voraussetzung für ein Fachlexikon der „FERTIGUNGSTECHNIK“ ist damit für alle Bereiche der Ausbildung, Forschung und Betriebstechnik durch Autor und Verlag voll erfüllt. Die Buchreihe ist eine gelungene Synthese von Lehrbuch und Nachschlagwerk, denn alle wichtigen Teilgebiete in den Bereichen Produktionstechnik – Betriebsorganisation – Fertigungstechnik – Maschinenbau – sind aufgenommen und ausführlich dargestellt.

Studierende wie Praktiker finden hier aktuelle Informationen und Daten für die technische Produktionstechnik.

Der Leser wird auf die physikalischen richtigen Termini besonders hingewiesen. Der Aufbau der einzelnen Bände ist so angelegt, daß alle Fachgebiete in sich abgeschlossen dargestellt werden, so daß jeder Band einzeln für den Benutzer ein Maximum an technischem Grund- und Fachwissen bietet.

Band 1 – vermittelt das Grundwissen – von der Zahl bis zur Konstruktion –, das zum Handwerkzeug für jeden Techniker in Ausbildung und Beruf Bestandteil seines täglichen Aufgabenbereiches ist.

Band 2 – enthält das abgeschlossene Fachwissen über die Bereiche spanlose Fertigung, Gießen und Schweißen.

Band 3 – beinhaltet das Fachwissen für die spanende Fertigung (Bohren bis Hobeln).

Band 4 Teil 1 – bietet die Fortsetzung der spanenden Fertigung von Fräsen bis Werkzeugmaschinen.

Band 4 Teil 2 – ist der letzte Band dieser Buchreihe und bringt neben Automatisierung und Vorrichtungsbau die notwendigen Grundlagen für die gesamte Betriebsorganisation.

Theorie und Praxis sind in den WERKSTATT-TABELLEN sorgfältig aufeinander abgestimmt. Um den Überblick in den einzelnen Fachgebieten nicht zu gefährden, sind durch den Autor die Quellenangaben sorgfältig koordiniert worden – ausführliche Literaturverzeichnisse in jedem Band vermitteln Hinweise für zusätzliche Fachliteratur.

Aus den **Zahlenwerten** lassen sich leicht die Zusammenhänge ablesen, die nicht nur die **Kosten** mindern, sondern auch die **Arbeitsproduktivität** erhöhen. Es sind wichtige Erkenntnisse und Hinweise für den Planungsingenieur, Konstrukteur und Produktionstechniker, ebenso für den Dozenten und Fachlehrer, für Studium und Berufsausbildung.

Die Technik ist der Motor für die wirtschaftliche Expansion. KRIST-WERKSTATT-TABELLEN wollen auch dazu weiterhin ihren Beitrag leisten.

Autor und Mitarbeiter danken für die vielen Hinweise und Verbesserungsvorschläge, die in der Auflage berücksichtigt wurden. Sie bitten weiter um kritische Anregungen und Erweiterungsvorschläge aus der Praxis, damit der hohe Gebrauchswert dieser Fachbuchreihe erhalten und gesteigert werden kann.

Gesamt-Übersicht für Krist: „Werkstatt-Tabellen“ in 5 Bänden

Die einzelnen Bände dieses **Handbuches der Fertigungstechnik** sind in Inhalt und Form aufeinander abgestimmt, behandeln jedoch in sich abgeschlossene Fachgebiete.

Band 1 umfaßt das gesamte **Grundwissen** der Technik. Die Bände 2, 3 und 4 (Teil I und II) umfassen das gesamte **Fachwissen der Fertigungstechnik**.

Der **erste Band „Technisches Grundwissen“** vermittelt alle **Grundlagen, die für das Verständnis der folgenden Bände erforderlich sind**.

Er enthält die folgenden Abschnitte:

- A. Mathematik und Geometrie
- B. Internationale Einheiten (SI)
- C. Technisches Zeichnen
- D. Massstabellen (Gewichtstabellen)
- E. Mechanik
- F. Festigkeitslehre

- G. Wärmelehre
- H. Elektrotechnik
- J. Chemie
- K. Werkstoffe und Hilfsstoffe
- L. Werkstoffprüfung
- M. Maschinenelemente

- N. Werkzeuge und Maschinen; Werkstatt
- O. Oberflächenschutz
- P. Toleranzen und Passungen
- Q. Messen, Prüfen und Anreiben
- R. Einteilung der Arbeitstechniken

Der **zweite Band** umfaßt die gesamten **Techniken der spanlosen Formung**. In diesem Band werden die **Grundtechniken** der

Werkstatt, die Wärmebehandlung von Eisen- und Nichteisenmetallen sowie Nichtmetallen, **Uformtechnik** und **Umformtechnik**, das

Fügen durch Löten, Schweißen und Nieten und die **Trennverfahren** in der Blechbearbeitung behandelt.

Im einzelnen enthält dieser Band folgende Abschnitte:

- A. Feilen
- B. Scheren
- C. Meißeln
- D. Schaben
- E. Sägen
- F. Härten, Glühen, Vergüten und Anlassen
- G. Gießen (Sand- und Kokillenguß, Schleuder-, Spritz-, Druckguß)

- H. Schmieden (Freiform- und Gesenkschmieden)
- J. Löten
- K. Schweißen
 - I Allgemeines
 - II Gasschweißen
 - III Elektroschweißen
 - IV Sonderschweißverfahren
- L. Nieten
- M. Schneiden, Lochen, Stechen

- N. Biegen, Abkanten, Bördeln, Sicken, Richten
- O. Ziehen, Ausbauchen, Drücken, Stanzen
- P. Pressen, Stauchen, Prägen, Fließpressen, Walzen
- Q. Literatur- und DIN-Verzeichnis
- R. Übersichtstafel über spanlose Arbeitsverfahren
- S. Verzeichnis der verarbeiteten DIN-Blätter

Der **dritte** und **vierte** Band behandeln sämtliche **Techniken der spanenden Formung** und die **Betriebstechnik**:

Band 3 enthält die Abschnitte:

- A. Bohren
- B. Senken
- C. Reiben

- D. Drehen
- E. Hobeln und Stoßen
- F. DIN-Verzeichnis

- G. Übersichtstafeln über spanende Arbeitsverfahren
- H. Literatur- und Quellenverzeichnis

Band 4, Teil 1 umfaßt folgende Abschnitte:

- A. Fräsen
- B. Räumen
- C. Schleifen und Polieren
- D. Honen und Läppen

- E. Gewindeherstellung
- F. Zahnradherstellung
- G. Fertigungstechnik (Werkzeuge und Werkzeugmaschinen)

- H. Übersichtstafeln über spanende Arbeitsverfahren
- J. Literatur- und Quellenverzeichnis

Band 4, Teil 2 behandelt die gesamte **Betriebstechnik** und umfaßt die Abschnitte:

- A. Betriebsorganisation
- B. Kostenrechnung
- C. Arbeitsvorbereitung
- D. Arbeitsstudie
- E. Zeitermittlung (REFA)

- F. Vorrichtungsbau
- G. Meß-, Regel- und Steuerungstechnik
- H. Automatisierung
- J. Ergonomie

- K. Informationstechnik
- L. Menschenführung, Betriebspsychologie
- M. Sicherheitswesen
- N. Literatur- und Quellenverzeichnis

Gesamt-Inhaltsverzeichnis

Erläuterungen zum Gebrauch des Tabellenbuches siehe nächste Seite

	Seite	Fingerzeige
A. Mathematik und Geometrie	7	A
I. Mathematische Hilfstafeln	8	A I
II. Flächenberechnung (Planimetrie)	79	A II
III. Körperberechnung (Stereometrie)	84	A III
IV. Geometrische Konstruktionen	92	A IV
V. Durchdringungen, Schnitte und Abwicklungen	108	A V
VI. Rechenstabrechnen	122	A VI
VII. Graphisches Rechnen (Nomographie)	126	A VII
VIII. Graphische (zeichnerische) Darstellungen	138	A VIII
IX. Perspektive und Projektionen	143	A IX
B. Internationale Einheiten (SI)	145	B
C. Technisches Zeichnen und Normung	157	C
D. Massetabellen	183	D
E. Mechanik	211	E
F. Festigkeitslehre	239	F
G. Wärmelehre	307	G
H. Elektrotechnik	349	H
J. Chemie	385	J
K. Werkstoffe und Betriebsstoffe	417	K
L. Werkstoffprüfung	467	L
M. Maschinenelemente	499	M
N. Werkzeuge und Maschinen; Werkstatt	597	N
O. Oberflächenschutz	615	O
P. Toleranzen und Passungen	633	P
Q. Messen, Prüfen und Anreißen	665	Q
R. Einteilung der Arbeitstechniken	689	R
Literaturverzeichnis (allgemein)	728	
Verzeichnis der verarbeiteten DIN-Blätter	729	S
Stichwortverzeichnis	730	T

Erläuterungen zum Gebrauch des Tabellenbuches

Zur Erleichterung des Auffindens der verschiedenen Abschnitte und Tabellen sind entsprechende Fingerzeige vorhanden, wobei folgende Punkte zu beachten sind:

- a) Auf allen Seiten (zwischen 2 Suchstrichen) sind fettgedruckte Hauptbuchstaben an der Außenleiste des rechten Buchrandes angebracht. Ihre Lage ist entsprechend den verschiedenen Abschnitten unterschiedlich, z. B. befindet sich der Buchstabe E für Mechanik (in Band 1) ungefähr in der Mitte.
- b) Entsprechend der Höhenlage der einzelnen Suchmarken ist auf der ersten Seite des Tabellenwerkes eine Gesamtübersicht der Abschnitte vorhanden.
- c) Eine ausführliche Gliederung jedes Abschnittes ist jeweils an dessen Anfang verzeichnet.
- d) Innerhalb jedes Abschnittes sind alle Tabellen mit arabischen Ziffern durchnummeriert; die größer gedruckten Nummern sind auffallend vor den Überschriften der einzelnen Tabellen angebracht.
- e) Am Fuß und rechts am Kopf jeder Seite sind nochmals die Nummern der betreffenden Tabellen angegeben.
- f) Am Ende eines jeden Bandes ist in alphabetischer Ordnung ein Gesamtstichwortverzeichnis untergebracht, das alle Abschnitte des betreffenden Tabellenbandes erfaßt. Hierbei sind nicht die Seitenzahlen angegeben, sondern die Hauptbuchstaben des betreffenden Abschnittes und die Nummer der Tabelle vermerkt, z. B. „Temperaturmeßgeräte und ihr Meßbereich“ G/2.

A. Mathematik und Geometrie

Inhaltsverzeichnis zu A:

	Seite
I. Mathematische Hilfstafeln	8
1. Mathematische Zeichen nach DIN 1302	8
2. Schreibform der Zehnerpotenzen und ihrer Kehrwerte	9
3. Mathematische Formeln. Rechengesetze der Zahlen	9
4. Multiplikationstafel	16
5. Anleitung zum Gebrauch der Zahlentafel 6	20
6. Potenzen, Wurzeln, Kreis-Umfänge und -Inhalte	22
7. Höhere Potenzen ($n^1 \cdots n^{12}$) ;	42
8. Primzahlen und Faktoren der Zahlen 1...1000	44
9. Quadrat- und Kubikwurzeln einiger Brüche	47
10. Verwandlung einiger gemeiner Brüche in Dezimalbrüche	47
11. Umwandlung von Dezimalzahlen in gemeine Brüche	48
12. Logarithmisches Rechnen	50
13. Das Aufsuchen des Briggschen Logarithmus (Lgarithmieren)	50
14. Vierstellige Mantissen der Briggschen (gewöhnlichen) Logarithmen	51
15. Häufig vorkommende Zahlenwerte	53
16. Logarithmen einiger Festwerte	53
17. Anleitung zur Benutzung der Tafel 18. (Zentriwinkel, Bogenlängen, Sehnen und Bogenhöhen von Kreisabschnitten)	53
18. Zentriwinkel, Bogenlängen, Sehnen und Bogenhöhen von Kreisabschnitten	54
19. Werte für den Winkel α bei gegebener Neigung in %	56
20. Werte n der Neigung 1 : n und prozentuale Neigung für den zugehörigen Winkel α°	57
21. Trigonometrische Zahlentafel mit Erläuterungen	59
22. Trigonometrische Formeln	63
23. Winkelfunktionen in den Quadranten	66
24. Wichtige trigonometrische Werte (einschließlich der Grenzwerte)	66
25. Trigonometrische Beziehungen	67
26. Dreiecksberechnung	68
27. Lochanreißtafel (besonders für Anreißer und Modelltischler)	70
28. Verhältnis vom Flachkant (Schlüsselweite) zum Spitzkant (Maß über Eck)	70
29. Berechnung der regelmäßigen Vielecke (je nach Seitenzahl)	71
30. Formeln und Berechnung von Kreisen, Kreisabschnitten und Kreisab- schnitten	71
31. Teilung des Kreisumfanges in n Teile	72
32. Verwandlung von Altgraden und Altminuten in Neigrade und Neuminuten und umgekehrt	72
33. Verwandlung von Minuten und Sekunden in Dezimalteile des Grades und umgekehrt	73
34. Bogenlängen für Minuten und Sekunden	74
35. Verwandlung von Bogenmaß in Gradmaß	74
36. Verwandlung von Zoll in Millimeter und Meter	75
37. Kugelinhalte	77
38. Römische Zahlenzeichen	78
39. Griechisches Alphabet	78
40. Russisches Alphabet	78
II. Flächenberechnung (Planimetrie)	79
III. Körperberechnung (Stereometrie)	84
IV. Geometrische Konstruktionen	92
V. Durchdringungen, Schnitte und Abwicklungen	108
VI. Rechenstabrechnen	122
VII. Graphisches Rechnen (Nomographie)	126
VIII. Graphische Darstellungen (zeichnerische Darstellungen)	138
IX. Perspektive und Projektionen	143

1. Mathematische Zeichen nach DIN 1302

Zeichen	Sprechweise (Erläuterung)	Zeichen	Sprechweise (Erläuterung)
$\frac{\%}{100}, \text{vH}$	Hundertstel, vom Hundert (Prozent)	$\int_a^b f(x) dx$	Integral $f(x) dx$ von a bis b . Bestimmtes Integral; a und b sind die Grenzen. Wo es der Deutlichkeit wegen nützlich erscheint, schreibt man auch: $\int_a^b f(x) dx$
$\frac{\%}{1000}, \text{vT}$	Tausendstel, vom Tausend (Promille)	\parallel	parallel
/	in, für, auf, je (pro)	$\#$	gleich und parallel
\dots	bis, usw., unbegrenzt	\perp	rechtwinklig zu
+	plus, und	Δ	Dreieck
-	minus, weniger	\cong	kongruent (deckungsgleich)
$\cdot \times$	mal, multipliziert mit. Der Punkt steht auf halber Höhe der Kleinbuchstaben. Das Multiplikationszeichen darf beim Rechnen mit Buchstaben weggelassen werden.	\sim	ähnlich, proportional, asymptotisch gleich
.		\sphericalangle	Winkel
:	geteilt durch. In Formeln ist im allgemeinen für die Division der waagerechte Strich zu benutzen; die Zeichen : und / nur zur Raumersparnis.	\overline{AB}	Strecke AB
=	gleich	\widehat{AB}	Bogen AB
\equiv	identisch gleich	\rightarrow	gegen, nähert sich, strebt nach ($x \rightarrow a$ ist dasselbe wie $\lim x = a$)
\neq	nicht gleich, ungleich	\lim	Limes (Grenzwert). $\lim x = a$ bedeutet: a ist Grenzwert von x
\approx	angenähert, nahezu gleich (rund, etwa)	\log	Logarithmus
\triangleq	entspricht (z. B. $1 \text{ cm} \triangleq 500 \text{ kg}$)	${}^a \log$	Logarithmus zur Basis a
$<$	kleiner als	\lg	gewöhnlicher Logarithmus ($\lg x = {}^{10} \log x$)
$>$	größer als	\ln	natürlicher Logarithmus ($\ln x = {}^e \log x$)
\leq	kleiner oder gleich, höchstens gleich	$^\circ$	Grad; $1^\circ = 60'$
\geq	größer oder gleich, mindestens gleich	$'$	Minute; $1' = 60''$
∞	unendlich	$''$	Sekunde
$\sqrt{\quad} \sqrt[3]{\quad} \sqrt[n]{\quad}$	Wurzel aus. Das Zeichen erhält einen oben angesetzten waagerechten Strich, an dessen Ende noch ein kurzer senkrechter Strich ange setzt werden kann.	g	Neugrad $1^g = 54'$
$ $	absoluter Betrag einer reellen oder komplexen Größe	c	Neuminute $1^c = 1^g 11^c 11,11 \dots .^{cc}$
$!$	Fakultät ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$)	cc	Neusekunde
$\binom{n}{p}$	n über p , $\binom{n}{p} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot p}$	rad	Radian. Winkel vom Bogen 1 beim Halbmesser 1 ($1 \text{ rad} = 57^\circ 17' 44,8''$)
Δ	Delta (groß Delta). Endliche Änderung	\sin	Sinus
d	vollständiges Differential	\cos	Cosinus
Σ	Summe; Grenzbezeichnungen sind unter und über das Zeichen Σ zu setzen.	\tan	Tangens
$f'(x), f''(x), f'''(x), f^{IV}(x), \dots f^{(n)}(x)$	f Strich x , f zwei Strich x , $\dots f_n$ Strich x } Ableitungen der Funktion $f(x)$ nach x	\cot	Cotangens
\dot{x}, \ddot{x}	x Punkt, x zwei Punkt (Ableitungen der Funktion x nach der Zeit)	arc sin	Arcussinus
\int	Integral	arc cos	Arcuscosinus
$\int f(x) dx$	Integral $f(x) dx$. Unbestimmtes Integral	arc tan	Arcustangens
		arc cot	Arcuscotangens

Zeichen hochgestellt

$1^g = 54'$

$1^c = 1^g 11^c 11,11 \dots .^{cc}$

Trigonometrische Funktionen
($\sin \alpha$)ⁿ = $\sin^n \alpha$

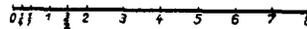
Kreisfunktionen, Umkehrungen der trigonometrischen Funktionen

2. Schreibform der Zehnerpotenzen und ihrer Kehrwerte

Potenzen von 10	Schreibform	Kehrwerte der Zehnerpotenzen	Schreibform
Hundert = 100 = 10 · 10	10 ²	1/10 = 0,1	10 ⁻¹
Tausend = 1000 = 10 · 10 · 10	10 ³	1/100 = 0,01	10 ⁻²
Zehntausend = 10000 = 10 · 10 · 10 · 10	10 ⁴	1/1000 = 0,001	10 ⁻³
Hunderttausend = 100000 = 10 · 10 · 10 · 10 · 10	10 ⁵	1/10000 = 0,0001	10 ⁻⁴
1 Million = 1000000 = 10 · 10 · 10 · 10 · 10 · 10	10 ⁶	usw.	usw.
1 Milliarde = 1000 Millionen	10 ⁹		
1 Billion = 1000 Milliarden = 1 Million Millionen	10 ¹²		
1 Trillion = 1 Million Billionen	10 ¹⁵		
1 Quadrillion = 1 Million Trillionen	10 ¹⁸		
1 Quinquillion = 1 Million Quadrillionen	10 ²¹		
usw.	usw.		

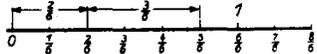
3. Mathematische Formeln

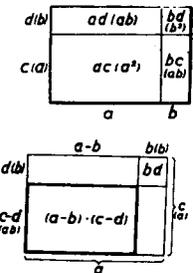
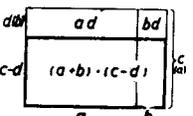
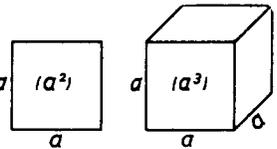
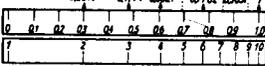
Rechengesetze der Zahlen (Arithmetik)

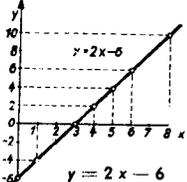
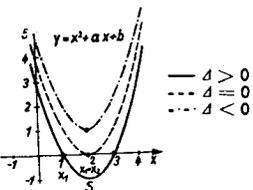
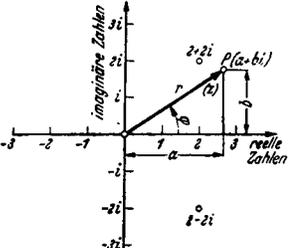


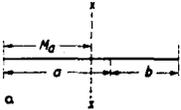
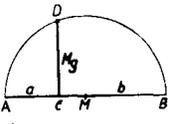
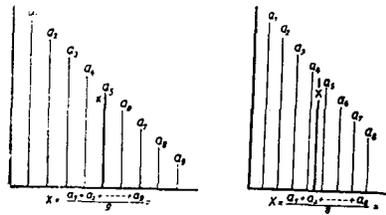
Benennung	Formel	Zahlenbeispiel
1. Vertauschung 	$a + b = b + a = c$ $a + b + c = a + c + b = b + a + c =$ usw. $a - b + c = a + c - b = -b + a + c =$ usw. $a - b + b = a$	$8 + 3 = 3 + 8 = 11$ $8 + 3 + 5 = 8 + 5 + 3 =$ $= 3 + 8 + 5 =$ usw. $8 - 3 + 5 = 8 + 5 - 3 =$ $= -3 + 8 + 5 =$ usw. $8 - 5 + 5 = 8$
2. Verbindung	$a \cdot b = b \cdot a$ $a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b = b \cdot a \cdot c =$ usw. $\frac{a \cdot b}{c} = \frac{a}{c} \cdot b; (a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$	$8 \cdot 3 = 3 \cdot 8$ $8 \cdot 3 \cdot 5 = 8 \cdot 5 \cdot 3 = 3 \cdot 8 \cdot 5 =$ usw. $\frac{8 \cdot 3}{5} = \frac{8}{5} \cdot 3; (8 \cdot 3) : 5 = (8 : 5) \cdot 3$
3. Verteilung	$(a + b) + c = (a + c) + b = a + (b + c)$ $(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b = a \cdot (b \cdot c)$	$(8 + 3) + 5 = (8 + 5) + 3 =$ usw. $(8 \cdot 3) \cdot 5 = (8 \cdot 5) \cdot 3 =$ usw.
4. Klammern 	$a + (b - c) = a + b - c$ $a - (b + c) = a - b - c$ $a - (b - c) = a - b + c$ $(a - b) \cdot (c - d) = ac - ad - bc + bd$ $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ $a + [b - (c - d) + (e - f)] - [g - (h - i)] =$ $= a + b - c + d + e - f - g + h - i$	$8 + (3 - 2) = 8 + 3 - 2 = 9$ $8 - (3 + 2) = 8 - 3 - 2 = 3$ $8 - (3 - 2) = 8 - 3 + 2 = 7$ $(8 - 3) \cdot (5 - 2) =$ $= 8 \cdot 5 - 8 \cdot 2 - 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2$ $(8 + 3) \cdot (8 - 3) = 8^2 - 3^2$
5. Vorzeichen a) Addition	(Summand plus Summand gleich Summe) $(+a) + (+b) = (a + b)$ $(-a) + (-b) = -(a + b)$ $(+a) + (-b) = (a - b)$ $(-a) + (+b) = -(a - b)$	$(+8) + (+3) = 8 + 3 = 11$ $(-8) + (-3) = -(8 + 3) = -11$ $(+8) + (-3) = (8 - 3) = 5$ $(-8) + (+3) = -(8 - 3) = -5$
b) Subtraktion (Minuend minus Subtrahend gleich Differenz) 	$(+a) - (+b) = (+a) + (-b) = +(a - b)$ $(-a) - (-b) = (-a) + (+b) = -(a - b)$ $(+a) - (-b) = (+a) + (+b) = +(a + b)$ $(-a) - (+b) = (-a) + (-b) = -(a + b)$	$(+8) - (+3) = (+8) + (-3) =$ $= +(8 - 3) = 5$ $(-8) - (-3) = (-8) + (+3) =$ $= -(8 - 3) = -5$ $(+8) - (-3) = (+8) + (+3) =$ $= +(8 + 3) = 11$ $(-8) - (+3) = (-8) + (-3) =$ $= -(8 + 3) = -11$
c) Multiplikation (Faktor mal Faktor gleich Produkt)	$a + a + a + a = 4a$ $(+a) \cdot (+b) = +(ab) = +ab$ $(-a) \cdot (-b) = +(ab) = +ab$ $(+a) \cdot (-b) = -(ab) = -ab$ $(-a) \cdot (+b) = -(ab) = -ab$ $a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b = b \cdot a \cdot c = b \cdot c \cdot a$ $a(b - c) = ab - ac$ $(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$	$6 + 6 + 6 + 6 = 4 \cdot 6 = 24$ $(+8) \cdot (+3) = +(8 \cdot 3) = +24$ $(-8) \cdot (-3) = +(8 \cdot 3) = +24$ $(+8) \cdot (-3) = -(8 \cdot 3) = -24$ $(-8) \cdot (+3) = -(8 \cdot 3) = -24$ $3 \cdot 4 \cdot 5 = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 4 \cdot 3 \cdot 5 =$ $= 4 \cdot 5 \cdot 3$ $3(4 - 5) = 3 \cdot 4 - 3 \cdot 5 = -3$ $(3 + 4)(5 - 2) =$ $= 3 \cdot 5 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 - 4 \cdot 2$

Benennung	Formel	Zahlenbeispiel
d) Division (Dividend durch Divisor gleich Quotient; Zähler durch Nenner gleich Bruchwert)	$(+a) : (+b) = \frac{+a}{+b} = +(a : b) = +\frac{a}{b}$ $(-a) : (-b) = \frac{-a}{-b} = +(a : b) = +\frac{a}{b}$ $(+a) : (-b) = \frac{+a}{-b} = -(a : b) = -\frac{a}{b}$ $(-a) : (+b) = \frac{-a}{+b} = -(a : b) = -\frac{a}{b}$	$(+8) : (+4) = \frac{+8}{+4} = +(8 : 4) = 2$ $(-8) : (-4) = \frac{-8}{-4} = +(8 : 4) = 2$ $(+8) : (-4) = \frac{+8}{-4} = -(8 : 4) = -2$ $(-8) : (+4) = \frac{-8}{+4} = -(8 : 4) = -2$
6. Brüche a) Erweitern	$a : b = \frac{a}{b}; \quad \frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$	$8 : 4 = \frac{8}{4} = 2; \quad \frac{8}{4} = \frac{8 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{16}{8} = 2$
b) Kürzen	$\frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n}$	$\frac{8}{4} = 2; \quad \frac{8}{4} = \frac{8 : 2}{4 : 2} = \frac{4}{2} = 2$
c) Addieren und Subtrahieren gleichnamiger Brüche (s. Bild)	$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}; \quad \frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n}$	$\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{2+3}{6}; \quad \frac{8}{6} - \frac{3}{6} = \frac{8-3}{6}$
d) Addieren und Subtrahieren ungleichnamiger Brüche	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}; \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$ $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf-bcf+bde}{bdf}$	$\frac{2}{5} + \frac{4}{9} = \frac{2 \cdot 9 + 5 \cdot 4}{5 \cdot 9} = \frac{38}{45}$ $\frac{7}{8} - \frac{4}{5} = \frac{7 \cdot 5 - 8 \cdot 4}{8 \cdot 5} = \frac{3}{40}$
e) Multiplizieren und Dividieren von Brüchen	$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}; \quad \frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$ $\frac{a}{c} = \frac{ac}{b}; \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d};$ $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ $(a+b) : c = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ $(ac-bc) : (a-b) = c(a-b) : (a-b) = c$	$\frac{3}{7} \cdot 5 = \frac{3 \cdot 5}{7}; \quad \frac{3}{7} : 5 = \frac{3}{7 \cdot 5}$ $\frac{8}{3} : \frac{3}{6} = 4; \quad \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{8} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 8}$ $\frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 5}$ $(8+6) : 2 = \frac{8}{2} + \frac{6}{2} = 7$ $(8 \cdot 2 - 6 \cdot 2) : 8 - 6 = 2$
7. Rechnen mit Null	$a - a = 0; \quad a + 0 = a; \quad a - 0 = a;$ $a \cdot 0 = 0; \quad 0 \cdot \infty$ ist unbestimmt $\frac{0}{a} = 0; \quad \frac{0}{0}$ ist unbestimmt, kann jeden Wert annehmen $\frac{a}{\infty} = 0; \quad \frac{\infty}{a} = \infty; \quad \infty \cdot a = \infty$ $\frac{a}{0} \rightarrow \infty; \quad a^0 = 1$ (a hoch Null)	$5 - 5 = 0; \quad 5 + 0 = 5; \quad 5 - 0 = 5$ $5 \cdot 0 = 0$ $\frac{0}{5} = 0;$ $\frac{5}{\infty} = 0; \quad \frac{\infty}{5} = \infty; \quad \infty \cdot 5 = \infty$ $\frac{5}{0} \rightarrow \infty; \quad 5^0 = 1$
Es darf nicht durch Null dividiert werden!		
8. Proportionen (Verhältnisse) a) Arithmetische Proportionen	$a + d = b + c$ $a - b = c - d$ $a - b = b - c \quad 2b = a + c$ $b = \frac{a+c}{2}$	Summensatz $14 + 7 = 3 + 18$ $14 - 3 = 18 - 7$ $12 - 9 = 9 - 6$ $9 = \frac{12+6}{2}$
arithmetisches Mittel		
b) Geometrische Proportionen Umformung der Proportionen	Anwendung bei: Hebelgesetz-, Zahnradtrieb- und Riementriebeberechnungen, Schwerpunktsbestimmung, Sägediagramm u. a. Die 8 verschiedenen Proportionen $a : b = c : d \quad c : a = d : b$ $a : c = b : d \quad c : d = a : b$ $b : a = d : c \quad d : b = c : a$ $b : d = a : c \quad d : c = b : a$ $a \cdot d = b \cdot c$ Produktgleichung	$4 : 5 = 8 : 10; \quad 8 : 4 = 10 : 5$ $4 : 8 = 5 : 10; \quad 8 : 10 = 4 : 5$ $5 : 4 = 10 : 8; \quad 10 : 5 = 8 : 4$ $5 : 10 = 4 : 8; \quad 10 : 8 = 5 : 4$ $4 \cdot 10 = 5 \cdot 8$
Auflösung der Proportionen	$a = bc : d \quad b = ad : c$ $d = bc : a \quad c = ad : b$	$4 = 5 \cdot 8 : 10; \quad 5 = 4 \cdot 10 : 8$ $10 = 5 \cdot 8 : 4; \quad 8 = 4 \cdot 10 : 5$



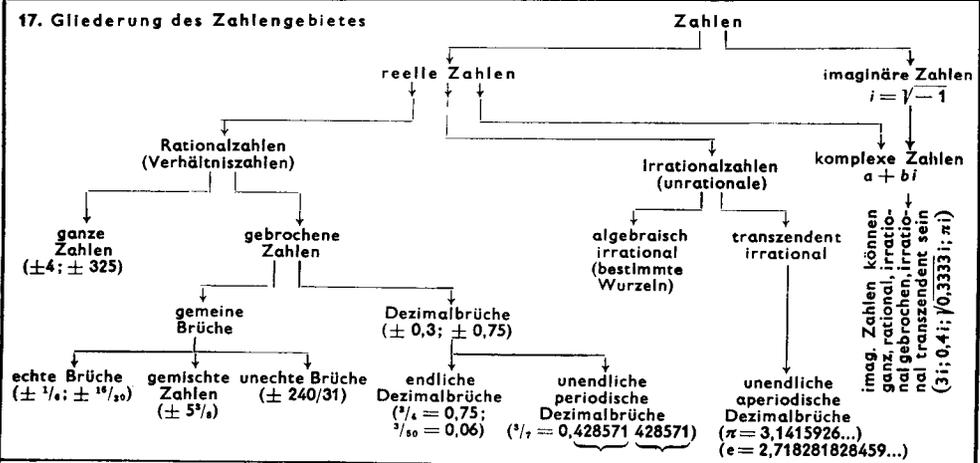
Benennung	Formel	Zahlenbeispiel
<p>d) Potenzen von Binomen (Binomischer Lehrsatz)</p> 	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$ $(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$ <p>Die Koeffizienten dieser Entwicklung ergeben sich aus dem Pascalschen Dreieck</p> $ \begin{array}{cccccccc} & & & & 1 & & & \\ & & & 1 & & 1 & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\ & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \end{array} $ <p>Binomischer Lehrsatz (Polynom):</p> $(a \pm b)^n = a^n \pm n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \dots + (\pm 1)^n b^n$ <p><i>n</i> muß eine ganze positive Zahl sein, sonst entsteht die unendliche binomische Reihe</p>	$(3+4)^2 = 3^2 + 24 + 4^2 = 49$ $(3-4)^2 = 3^2 - 24 + 4^2 = 1$ $(3+4)^3 = 3^3 + 108 + 144 + 4^3 = 343$ $(3-4)^3 = 3^3 - 108 + 144 - 4^3 = -1$
<p>e) Zerlegung in Faktoren</p> 	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ $a^2 + b^2 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - a^2b + a^2b^2 - ab^2 + b^4)$	$3^2 - 4^2 = (3-4)(3+4) = -7$ $3^3 - 4^3 = (3-4)(3^2 + 12 + 4^2) = -37$ $3^2 + 4^2 = (3+4)(3^2 - 12 + 4^2) = 91$
<p>10. Wurzeln (Radizieren) (<i>a, b</i> Radikand; <i>m, n</i> Wurzel-exponent)</p>  <p>$a = a^1$; $a \cdot a \cdot a = a^3$; $a = \sqrt{a^2}$; $a = \sqrt[3]{a^3}$; $\sqrt[3]{a^3} = a^{3/3}$; $\sqrt{a} = a^{1/2}$; $\frac{1}{\sqrt{a}} = a^{-1/2}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{b^3}} = b^{-1/3}$</p>	$\frac{m}{\sqrt{a}} \cdot \frac{m}{\sqrt{b}} = \frac{m}{\sqrt{ab}}$ $\frac{m}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{m}{a}}$ $\frac{m}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{m}{b}}$ $\left(\frac{m}{\sqrt{a}}\right)^n = \frac{m^n}{\sqrt{a^n}} = a^{-\frac{n}{m}}$ $\frac{m}{\sqrt{a}} = a^{\frac{1}{m}}$ $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = a^{-\frac{1}{n}}$ $\frac{m}{\sqrt{a}} \cdot \frac{n}{\sqrt{a}} = \frac{mn}{\sqrt{a^{m+n}}}$ $\frac{m}{\sqrt{a}} = \sqrt[n]{\frac{m}{a}} = \sqrt[n]{\frac{m}{a}}$ $\frac{m}{\sqrt{a^n}} = \sqrt[n]{\frac{m}{a^n}} = \frac{m}{a^{n/n}} = \frac{m}{a}$ $\frac{m}{\sqrt{a^n}} = \sqrt[n]{\frac{m}{a^n}} = \frac{m}{a^{n/n}} = \frac{m}{a}$ $\frac{m}{\sqrt{a^n}} = \sqrt[n]{\frac{m}{a^n}} = \frac{m}{a^{n/n}} = \frac{m}{a}$ $\frac{1}{\sqrt{a}} = a^{-1/2}$ $\frac{2n+1}{\sqrt{a}} = \frac{2n+1}{\sqrt{a}}$ $\frac{2n+1}{\sqrt{-a}} \text{ ist imaginär, wenn } a > 0$ $\frac{2n+1}{\sqrt{-a}} = -\frac{2n+1}{\sqrt{a}}$ $\sqrt{(a^2 + b^2)} = \sqrt{(a^2 + 2ab + b^2)}$ $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ $\sqrt{-a} = \sqrt{(+a)(-1)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = i \sqrt{a}$ $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a+b \pm 2\sqrt{ab}}$ <p><i>i</i> (in der Elektrotechnik <i>j</i>) imaginäre Einheit. Siehe 13.</p>	$(3-4)^2 = (3-4)(3+4) = -7$ $3^3 - 4^3 = (3-4)(3^2 + 12 + 4^2) = -37$ $3^2 + 4^2 = (3+4)(3^2 - 12 + 4^2) = 91$
<p>11. Logarithmen (Logarithmieren)</p> <p>Addieren</p> <p>Subtrahieren</p> <p>Multiplizieren</p> <p>Dividieren</p> <p>Der Gleichmaßstab</p>  <p>Der Lg-Maßstab</p>	<p>$\log a \cdot c = b$ bei $b^c = a$; ($b = 10$): ${}^{10}\log a = \lg a$; ${}^e \log a = \ln a = c$, wenn $e^c = a$</p> <p>$\log(a \cdot b) = \log a + \log b$ $\lg(35,2 \cdot 5,67) = \lg 35,2 + \lg 5,67 = \lg x$; $x = 35,2 \cdot 5,67 = 199,6$</p> <p>$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$ $\lg \frac{20,4}{0,909} = \lg 20,4 - \lg 0,909 = \lg x$; $x = 22,44$</p> <p>$\log(a^n) = n \cdot \log a$ $\lg 3,52^4 = 4 \lg 3,52 = \lg x$; $x = 153,5$</p> <p>$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log a = \frac{\log a}{n}$ $\lg \sqrt[3]{567} = \frac{1}{3} \lg 567 = \lg x$; $x = 8,2768$</p> <p>Spezialfälle:</p> <p>$b^{\log a} = a$; $10^{\lg a} = a$; $e^{\ln a} = a$; $b^{\log(a^c)} = c$; $\lg 10^c = c$; $\ln e^c = c$</p> <p>$\lg 0 \rightarrow -\infty$; $\lg 1 = 0$; $\lg 10 = 1$; $\lg 100 = 2$; $\lg 0,1 = 0,0 - 1 = 9,0 - 10$</p> <p>$\ln 0 \rightarrow -\infty$; $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$; $\lg \infty \rightarrow +\infty$; $\ln \infty \rightarrow +\infty$</p> <p>Zusammenhang zwischen dekadischen oder Briggsschen Logarithmen (<i>lg</i>) mit der Basis 10 und den natürlichen Logarithmen (<i>ln</i>) mit der Basis $e = 2,718281828$ (siehe auch Tabelle 12). Die natürlichen und Briggsschen Logarithmen negativer Zahlen sind imaginär.</p> <p>$\ln x = \ln 10 \cdot \lg x = 2,3026 \cdot \lg x$; $\lg x = \lg e \cdot \ln x = \frac{1}{2,3026} \ln x = 0,4343 \ln x$</p>	

Benennung	Formel	Zahlenbeispiel												
<p>12. Gleichungen (Gleichungslehre = Algebra)</p>  <p>a) 1. Grades mit einer Unbekannten (lineare Gleichung)</p>  <p>Funktion 1. Grades</p>	<p>Grundgesetze: Die Gleichung bleibt unverändert, wenn man auf beiden Seiten:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Gleiches addiert 2. Gleiches subtrahiert 3. Mit Gleichem multipliziert 4. Durch Gleiches dividiert 5. In gleicher Weise potenziert 6. In gleicher Weise radiziert 7. In gleicher Weise logarithmiert <p>$ax + b = 0$ (Grundform) $x + b = a$ $bx = a$ $bx + c = a$ $x = -\frac{b}{a}$ $x = a - b$ $x = \frac{a}{b}$ $x = \frac{a-c}{b}$</p>	<p>$3x - 3 = 4 + x$</p> $\begin{aligned} +3 &= +3 \\ 3x &= 7 + x \\ -x &= -x \\ \hline 2x &= 7 \quad ; x = 7/2 = 3,5 \end{aligned}$ $\begin{aligned} \cdot 6 &= \cdot 6 \\ 12x &= 42 \quad ; x = 42/12 = 3,5 \end{aligned}$ $\begin{aligned} :2 &= :2 \\ 6x &= 21 \quad ; x = 21/6 = 3,5 \end{aligned}$ $\begin{aligned} \dots &= \dots \\ 36x^2 &= 441 \end{aligned}$ $\begin{aligned} \sqrt{\quad} &= \sqrt{\quad} \\ 6x &= \pm 21 \quad ; x = \pm (21/6) \\ &= \pm 3,5 \end{aligned}$ $\begin{aligned} \lg 6x &= \lg 21 \end{aligned}$												
<p>b) 1. Grades mit zwei (und mehr) Unbekannten</p>	<p>Die Zahl der Gleichungen muß mit der Zahl der Unbekannten übereinstimmen, damit man sie lösen kann</p> $\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 & a_2x + b_2y &= c_2 \\ 3x + 2y &= 18 & 4x + y &= 19 \end{aligned}$ <p>$x = 4$ $y = 3$</p>													
<p>c) 2. Grades mit einer Unbekannten</p>  <p>Funktion 2. Grades</p> <p>d) 3. Grades mit einer Unbekannten</p>	<p>Rein quadratische Gleichung: $x^2 = +a$ $x^2 = +16$ $x^2 = -a$ $x = \pm a$ $x = \pm \sqrt{16} = \pm 4$ $x = \pm i a$</p> <p>Gemischtquadratische Gleichung: $x^2 + ax + b = 0$ (Normalform); $x^2 - 4x + b = 0$ (siehe Bild)</p> $x_1 = -\frac{1}{2}a + \sqrt{(a/2)^2 - b}; \quad x_2 = -\frac{1}{2}a - \sqrt{(a/2)^2 - b}$ <p>Diskriminante $\Delta = (a/2)^2 - b$</p> <p>Beide Wurzeln sind reell, fallen zusammen, wenn $\Delta > 0$ ($b = 3$) sind konjugiert komplex, wenn $\Delta < 0$ ($b = 5$)</p> <p>$x^2 + ax + b = (x - x_1)(x - x_2) = 0$ (Produktform) $x_1 + x_2 = -a$ $x_1 \cdot x_2 = +b$ (Viëtascher Wurzelsatz) Normalform: $x^2 + ax^2 + bx + c = 0$ Produktform: $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$ [$x_1 x_2 x_3 = -c$] Viëtascher Wurzelsatz: $x_1 + x_2 + x_3 = -a$; $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = b$;</p>													
<p>13. Imaginäre und komplexe Zahlen</p> 	<p>$\sqrt{-1} = i$ (in der Elektrotechnik j)</p> <p>imaginäre Einheit $i^2 = -1$ $\frac{1}{i} = -i$</p> <p>Die Potenzen der imaginären Einheit</p> <table border="0"> <tr> <td>$i^0 = +1$</td> <td>$i^4 = +1$</td> <td>$i^{4n+0} = +1$</td> </tr> <tr> <td>$i^1 = +i$</td> <td>$i^5 = +i$</td> <td>$i^{4n+1} = +i$</td> </tr> <tr> <td>$i^2 = -1$</td> <td>$i^6 = -1$</td> <td>$i^{4n+2} = -1$</td> </tr> <tr> <td>$i^3 = -i$</td> <td>$i^7 = -i$</td> <td>$i^{4n+3} = -i$</td> </tr> </table> <p>Rechnen mit komplexen Zahlen: Wenn $a + bi = c + di$, ist $a = c$ und $b = d$ Wenn $a + bi = 0$, ist $a = 0$ und $b = 0$</p> <p>$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$ $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ (Produkt konjugiert komplexer Zahlen)</p> $\frac{c + di}{a + bi} = \frac{c + di}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2} \cdot i$ <p>Darstellung der komplexen Zahlen als Punkte der Gaußschen Zahlenebene (siehe Bild).</p>	$i^0 = +1$	$i^4 = +1$	$i^{4n+0} = +1$	$i^1 = +i$	$i^5 = +i$	$i^{4n+1} = +i$	$i^2 = -1$	$i^6 = -1$	$i^{4n+2} = -1$	$i^3 = -i$	$i^7 = -i$	$i^{4n+3} = -i$	
$i^0 = +1$	$i^4 = +1$	$i^{4n+0} = +1$												
$i^1 = +i$	$i^5 = +i$	$i^{4n+1} = +i$												
$i^2 = -1$	$i^6 = -1$	$i^{4n+2} = -1$												
$i^3 = -i$	$i^7 = -i$	$i^{4n+3} = -i$												

Benennung	Formel
<p>13. Imaginäre und komplexe Zahlen (Fortsetzung)</p>	<p>Beziehungen zwischen den rechtwinkligen und Polarkoordinaten des Punktes P</p> $a = r \cdot \cos \varphi \quad b = r \cdot \sin \varphi \quad r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \tan \varphi = \frac{b}{a}$ $z = a + bi = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) \text{ (Normalform) Eulerische Formel}$ $\cos \varphi = \frac{a}{r} \quad \sin \varphi = \frac{b}{r}$ $z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) = r \cdot e^{i\varphi} \text{ (Exponentialform)}$
<p>14. Mittelwerte</p>  <p>arithmetisches Mittel</p>  <p>geometrisches Mittel</p>	<p>Aus zwei Größen a und b ist das</p> <p>a) arithmetische Mittel: $a + b = x + x$; $a - x = x - b$; $x = M_a = \frac{a+b}{2}$;</p> <p>b) geometrische Mittel: $a \cdot b = y \cdot y$; $a : y = y : b$; $y = M_g = \sqrt{ab}$;</p> <p>c) harmonische Mittel: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z}$; $z = \frac{2ab}{a+b}$.</p> <p>Aus mehreren Größen $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ erhält man das</p> <p>a) arithmetische Mittel: $x = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}$;</p> <p>b) geometrische Mittel: $y = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$;</p> <p>c) harmonische Mittel: $z = 1 : \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$.</p>  <p>Ungerade Anzahl Werte Gerade Anzahl Werte</p> <p>Werte der Größe nach geordnet</p>
<p>15. Arithmetische und geometrische Reihen</p>	<p>Allgemein: a = Anfangsglied, z = Endglied, d = Differenz, q = Quotient, s_n = Summe, n = Gliederzahl</p> <p>a) Arithmetische Reihe:</p> $a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \dots + (a + [n-1]d)$ $z = a + (n-1)d \quad s_n = \frac{n(a+z)}{2} = an + \frac{n(n-1)d}{2}$ <p>z. B. $s_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$</p> <p>b) Geometrische Reihe: $a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1}$</p> $z = aq^{n-1} \quad s_n = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$ <p>Wenn $q < 1$ und $n \rightarrow \infty$, wird $s = \frac{a}{1-q}$</p> <p>z. B. $s = 0,3 + 0,03 + 0,003 + \dots = \frac{0,3}{1-0,1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$</p> <p>Nachprüfung der Summenformeln an Zahlenbeispielen:</p> <p>Zu a) mit $a = 1, d = 1$ und $n = 10$:</p> $s_{10} = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 9 + 10$ $s_{10} = 10 + 9 + 8 + 7 + \dots + 2 + 1$ $2 s_{10} = 11 + 11 + 11 + 11 + \dots + 11 + 11 = 10 \cdot 11; \quad s_{10} = \frac{10 \cdot 11}{2}$

Benennung	Formel
15. Arithmetische und geometrische Reihen (Fortsetzung)	Zu b) mit $a = 1, q = 3$ und $n = 5$: $s_5 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81$ $3 s_5 = 3 + 9 + 27 + 81 + 243$ $3 s_5 - s_5 = 243 - 1;$ $2 s_5 = 242;$ $s_5 = 121$

16. Prozentrechnen Regeln	1. Prozentwert $P = \frac{\text{Prozentsatz (\%)}}{100} \cdot \text{Grundwert} = \frac{p}{100} \cdot n$ 2. Prozentsatz (%) $p = \frac{\text{Prozentwert}}{\text{Grundwert}} \cdot 100 = \frac{P}{n} \cdot 100$ 3. Grundwert $n = \frac{\text{Prozentwert}}{\text{Prozentsatz (\%)}} \cdot 100 = \frac{P}{p} \cdot 100$
---------------------------	--



18. Lehrsatz des Pythagoras

$c^2 = a^2 + b^2; c = \sqrt{a^2 + b^2}$
 $a^2 = c^2 - b^2; a = \sqrt{c^2 - b^2}$
 $b^2 = c^2 - a^2; b = \sqrt{c^2 - a^2}$

Winkel-Pythagoras:

$\sin \alpha = \frac{a}{c}; \cos \alpha = \frac{b}{c}$
 $\sin^2 \alpha = \frac{a^2}{c^2}; \cos^2 \alpha = \frac{b^2}{c^2}$
 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}$
 $c^2 = a^2 + b^2, \text{ also } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Zahlenbeispiel:

$10^2 = 8^2 + 6^2; 10 = \sqrt{8^2 + 6^2}$
 $8^2 = 10^2 - 6^2; 8 = \sqrt{10^2 - 6^2}$
 $6^2 = 10^2 - 8^2; 6 = \sqrt{10^2 - 8^2}$

$\sin \alpha = \frac{8}{10}; \cos \alpha = \frac{6}{10}$
 $\sin^2 \alpha = \frac{8^2}{10^2}; \cos^2 \alpha = \frac{6^2}{10^2}$
 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{8^2}{10^2} + \frac{6^2}{10^2} = \frac{8^2 + 6^2}{10^2}$
 $10^2 = 8^2 + 6^2$

19. Lehrsatz von Euklid (s. a. Bild oben)

$a^2 = c \cdot q; q = \frac{a^2}{c}$
 $b^2 = c \cdot p; p = \frac{b^2}{c}$

$8^2 = 10 \cdot q; q = \frac{64}{10} = 6,4$
 $6^2 = 10 \cdot p; p = \frac{36}{10} = 3,6$

20. Der Höhensatz

$h^2 = p \cdot q$
 $h = \sqrt{p \cdot q}$

$p = 3,6; q = 6,4$
 $h = \sqrt{3,6 \cdot 6,4} = \sqrt{23,04} = 4,8$

4. Multiplikationstafel

Beispiel: $16 \cdot 26 = 416$

(Fortsetzung siehe nächste Seite)

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69	72	75	78	81	84	87	90
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92	96	100	104	108	112	116	120
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150	156	162	168	174	180
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147	154	161	168	175	182	189	196	203	210
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160	168	176	184	192	200	208	216	224	232	240
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198	207	216	225	234	243	252	261	270
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220	231	242	253	264	275	286	297	308	319	330
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240	252	264	276	288	300	312	324	336	348	360
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260	273	286	299	312	325	338	351	364	377	390
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280	294	308	322	336	350	364	378	392	406	420
15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255	270	285	300	315	330	345	360	375	390	405	420	435	450
16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256	272	288	304	320	336	352	368	384	400	416	432	448	464	480
17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	255	272	289	306	323	340	357	374	391	408	425	442	459	476	493	510
18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	306	324	342	360	378	396	414	432	450	468	486	504	522	540
19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	209	228	247	266	285	304	323	342	361	380	399	418	437	456	475	494	513	532	551	570
20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400	420	440	460	480	500	520	540	560	580	600
21	42	63	84	105	126	147	168	189	210	231	252	273	294	315	336	357	378	399	420	441	462	483	504	525	546	567	588	609	630
22	44	66	88	110	132	154	176	198	220	242	264	286	308	330	352	374	396	418	440	462	484	506	528	550	572	594	616	638	660
23	46	69	92	115	138	161	184	207	230	253	276	299	322	345	368	391	414	437	460	483	506	529	552	575	598	621	644	667	690
24	48	72	96	120	144	168	192	216	240	264	288	312	336	360	384	408	432	456	480	504	528	552	576	600	624	648	672	696	720
25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300	325	350	375	400	425	450	475	500	525	550	575	600	625	650	675	700	725	750
26	52	78	104	130	156	182	208	234	260	286	312	338	364	390	416	442	468	494	520	546	572	598	624	650	676	702	728	754	780
27	54	81	108	135	162	189	216	243	270	297	324	351	378	405	432	459	486	513	540	567	594	621	648	675	702	729	756	783	810
28	56	84	112	140	168	196	224	252	280	308	336	364	392	420	448	476	504	532	560	588	616	644	672	700	728	756	784	812	840
29	58	87	116	145	174	203	232	261	290	319	348	377	406	435	464	493	522	551	580	609	638	667	696	725	754	783	812	841	870
30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360	390	420	450	480	510	540	570	600	630	660	690	720	750	780	810	840	870	900
31	62	93	124	155	186	217	248	279	310	341	372	403	434	465	496	527	558	589	620	651	682	713	744	775	806	837	868	899	930
32	64	96	128	160	192	224	256	288	320	352	384	416	448	480	512	544	576	608	640	672	704	736	768	800	832	864	896	928	960
33	66	99	132	165	198	231	264	297	330	363	396	429	462	495	528	561	594	627	660	693	726	759	792	825	858	891	924	957	990
34	68	102	136	170	204	238	272	306	340	374	408	442	476	510	544	578	612	646	680	714	748	782	816	850	884	918	952	986	1020
35	70	105	140	175	210	245	280	315	350	385	420	455	490	525	560	595	630	665	700	735	770	805	840	875	910	945	980	1015	1050