

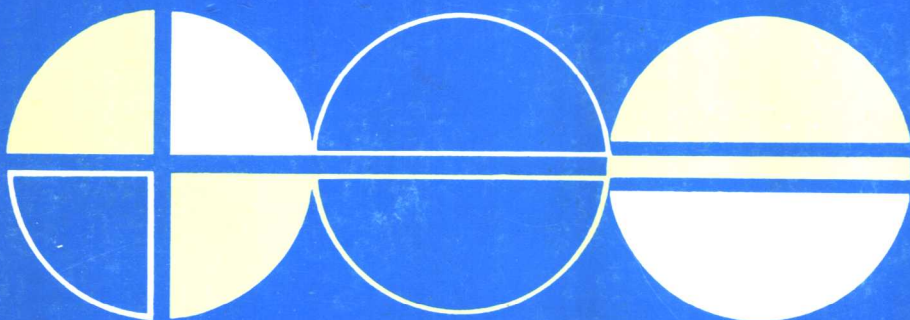
NORTH-HOLLAND

MATHEMATICS STUDIES

103

Singularities & Dynamical Systems

S. N. PNEVMATIKOS
Editor



NORTH-HOLLAND

SINGULARITIES & DYNAMICAL SYSTEMS

*Proceedings of the International Conference on
Singularities and Dynamical Systems
Heraklion, Greece, 30 August – 6 September, 1983*

edited by

Spyros N. PNEVMATIKOS

*University of Dijon
France*



1985

NORTH-HOLLAND – AMSTERDAM • NEW YORK • OXFORD

© Elsevier Science Publishers B.V., 1985

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior permission of the copyright owner.

ISBN: 0 444 87641 3

Publishers:

ELSEVIER SCIENCE PUBLISHERS B.V.
P.O. BOX 1991
1000 BZ AMSTERDAM
THE NETHERLANDS

Sole distributors for the U.S.A. and Canada:

ELSEVIER SCIENCE PUBLISHING COMPANY, INC.
52 VANDERBILT AVENUE
NEW YORK
U.S.A.

Library of Congress Cataloging in Publication Data

International Conference on Singularities and Dynamical
Systems (1983 : Hérakleion, Crete)
Singularities & dynamical systems.

(North-Holland mathematics studies ; 103)
English and French.

1. Differentiable dynamical systems--Congresses.
2. Singularities (Mathematics) I. Pnevmatikos,
Spyros N., 1950- . II. Title. III. Title:
Singularities and dynamical systems.
QA614.8.I58 1983 515.3'5 84-18774
ISBN 0-444-87641-3 (U.S.)

PRINTED IN THE NETHERLANDS

PREFACE

This volume is an account of the lectures delivered in the International Conference on "Singularities and Dynamical Systems", organized in Heraklion from August 30th to September 6th 1983 by the University of Crete and the University of Dijon. The main purpose of the Conference was to create conditions of scientific contact between mathematicians and physicists who have singularities and dynamical systems as common interests.

The main themes dealt with at the meeting, and contained in this volume, are devoted to recent progress in the following topics:

- * the global study of dynamics generated by diffeomorphisms or foliations,*
- * the local study of the singularities of differential equations of real and complex fields,*
- * the singularities of symplectic geometry, contact geometry, and Riemannian geometry,*
- * the singularities of functions and complex hypersurfaces,*
- * the bifurcations in dynamical systems and the appearance of chaos,*
- * the study of some specific dynamical systems, nonlinear differential equations, and solitons.*

The Conference was sponsored by the Ministry of Research and Technology, and the Ministry of Civilization and Sciences of Greece. In addition, the French government, through its Embassy in Athens, provided some support for participants. We are grateful to these organizations for their interest and assistance.

The scientific preparations for, the organization at, and the publications following this Conference are the result of a close cooperation with:

*Dominique Cerveau, University of Dijon, Department of Mathematics,
Jean-François Mattei, University of Toulouse, Department of Mathematics,
Robert Moussu, University of Dijon, Department of Mathematics,
Stephanos Pnevmatikos, University of Dijon, Department of Physics,
Robert Roussarie, University of Dijon, Department of Mathematics.*

I am pleased to express my gratitude to the authors for their contributions, to the referees for their helpful comments, to all persons who assisted me with the many details of running the Conference and preparing this volume, and in particular to North-Holland Publishing Company.

Spyros N. Pnevmatikos

Heraklion 1984

CONTENTS

Preface	v
LA MARCHE AU CHAOS VUE PAR UN TOPOLOGUE par René THOM	1
HAMILTONIAN-LIKE PHENOMENA IN SADDLE-NODE BIFURCATIONS OF INVARIANT CURVES FOR PLANE DIFFEOMORPHISMS by Alain CHENCINER	7
THE DYNAMICS OF A DIFFEOMORPHISM AND THE RIGIDITY OF ITS CENTRALIZER by Jacob PALIS	15
TRANSLATION REPRESENTATIONS OF SCATTERING FOR RATIONAL MAPS by Jean-Pierre FRANÇOISE	23
ON THE $T^k \rightarrow T^{k+1}$ BIFURCATION PROBLEM by Dietrich FLOCKERZI	35
HÖLDER CONTINUOUS PATHS AND HYPERBOLIC AUTOMORPHISMS OF T^3 by Mike C. IRWIN	47
A LABYRINTH AND OTHER WAYS TO LOSE ONE'S WAY by Ana CASCON & Rémi LANGEVIN	53
MODULI OF STABILITY FOR GRADIENTS by Floris TAKENS	69
SINGULARITIES OF GRADIENT VECTOR FIELDS AND MODULI by Floris TAKENS	81
GEOMETRY OF TRIPLES OF VECTOR FIELDS IN $\mathbb{R}^4$ by Piotr MORMUL & Robert ROUSSARIE	89
CYCLES LIMITES, ETUDE LOCALE par Jean-Pierre FRANÇOISE	99
ANALYTIC CLASSIFICATION OF RESONANT SADDLES AND FOCI by Jean MARTINET & Jean-Pierre RAMIS	109
SINGULARITIES OF HOLOMORPHIC DIFFERENTIAL EQUATIONS by César CAMACHO	137
HOLONOMIE EVENESCENTE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES DEGENEREEES TRANSVERSES par Robert MOUSSU	161
SINGULARITIES OF CODIMENSION ONE COMPLEX FOLIATIONS, A PARTIAL SURVEY by Dominique CERVEAU & Jean-François MATTEI	175

DIFFERENTIAL GEOMETRY AND DYNAMICS : TWO EXAMPLES by Marc CHAPERON	187
EVOLUTION DYNAMIQUE D'UN SYSTEME MECANIQUE EN PRESENCE DE SINGULARITES GENERIQUES par Spyros N. PNEVMATIKOS	209
PSEUDO-METRIQUES GENERIQUES ET THEOREME DE GAUSS-BONNET EN DIMENSION 2 par Fernand PELLETIER	219
THE INVARIANCE OF MILNOR'S NUMBER IMPLIES THE INVARIANCE OF THE TOPOLOGICAL TYPE IN DIMENSION THREE by Bernard PERRON	239
REAL CLEMENS STRUCTURES by Claude André ROCHE	249
RIGIDITY OF WEBS AND FAMILIES OF HYPERSURFACES by Jean-Paul DUFOUR & Patrick JEAN	271
BIFURCATION FROM AN ORBIT OF SYMMETRY by David CHILLINGWORTH	285
A PEDESTRIAN PROOF OF THE HOPF-BIFURCATION THEOREM by Francine & Marc DIENER	295
IN PURSUIT OF BIRKHOFF'S CHAOTIC ATTRACTOR by Ralph ABRAHAM	303
BIFURCATIONS AND CHAOS IN FORCED VAN DER POL SYSTEMS by Ralph ABRAHAM & Carles SIMÓ	313
CHAOS IN EXPERIMENTAL CHEMICAL SYSTEMS : TWO EXAMPLES by Jean-Claude ROUX	345
A SINGULARITY ANALYSIS OF INTEGRABILITY AND CHAOS IN DYNAMICAL SYSTEMS by Tassos C. BOUNTIS	353
BIFURCATIONS IN HAMILTONIAN DYNAMICAL SYSTEMS by George CONTOPOULOS	375
A GUIDE TO THE HENON-HEILES HAMILTONIAN by David L. ROD & Richard C. CHURCHILL	385
SOLITONS IN NONLINEAR ATOMIC CHAINS by Stephanos N. PNEVMATIKOS	397
DECAYING STATES IN QUANTUM SYSTEMS by Alkis P. GRECOS	439
List of participants in the Conference	455

LA MARCHE AU CHAOS VUE PAR UN TOPOLOGUE

René Thom

I.H.E.S.

France

En topologie différentielle, la relation d'équivalence la plus générale est celle définie par un feuilletage (ρ) de codimension k dans une variété lisse paracompacte M^n de dimension n . En toute généralité, on devrait accepter que le feuilletage puisse admettre des singularités génériques. Malheureusement, la théorie des singularités de feuilletages est chargée de beaucoup d'obscurité; les singularités peuvent dépendre de la manière (via formes différentielles ou champs de vecteurs) par laquelle on définit le feuilletage; et les singularités génériques ne sont pas connues en dehors des cas les plus simples; (basse codimension). Pour ces raisons, on supposera ici le feuilletage (ρ) partout régulier. On désignera par (M^n/ρ) l'espace quotient de M^n par la relation d'équivalence $\rho(x \sim y \text{ si } x \text{ et } y \text{ sont dans la même feuille})$.

Reprenant une idée proposée autrefois [1], on va pratiquer sur M^n la théorie de Morse. On se donnera sur M^n une fonction de Morse réelle $F: M^n \rightarrow \mathbb{R}$ propre et positive. F atteint alors son minimum en un point minimisant m_0 avec $F(m_0) = \mu_0 > 0$ qu'on supposera unique. Le principe est alors, à toute valeur $c \in \mathbb{R}^+$, d'associer la variété $F \leq c$, et d'étudier comment varie l'espace quotient $(F \leq c/\rho)$, où la relation (ρ) est définie par restriction à la variété à bord $F \leq c$ dans M . On fera en plus les hypothèses de généricité naturelles que voici:

- 1. En tout point critique v de F , le cône tangent (cône quadratique) à la variété de niveau $F^{-1}(F(v))$ est en position générale par rapport à la ρ -feuille contenant v .
- 2. Pour presque toute valeur de c , la variété bord $F^{-1}(c)$ est en position générale par rapport au feuilletage. Ceci veut dire que, en général, les submersions locales $\pi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^k$ qui définissent le feuilletage sont génériques sur l'hyperplan $F=c$. Il y a donc un lieu critique $\Gamma(c) = F^{-1}(c)$ où ces applications locales sont critiques, lieu qui est en général de codimension $(n-k)$ dans $F^{-1}(c)$, de corang à la source: $(n-1)-(k-1) = n-k$, ayant des singularités de codimension $2(n-k-1)$.

Ceci nous permet de définir divers types de points critiques:

1. Les points critiques v_c de la fonction de Morse F . Les valeurs $c_i = F(v_{c_i})$ seront dites *critiques ordinaires*.
2. Les valeurs σ pour lesquelles, sur $F=\sigma$, les submersions locales de ρ , $\pi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^k$, cessent d'être génériques. On supposera ces singularités de codimension un, associées à un point critique $\bar{u}$ isolé, telles que le chemin défini par (c) franchissant σ se relève en un point de contact $\mu(c)$ qui définit localement une traversée transversale de la strate associée à la singularité $\pi_i|_{F=\sigma}$. On appellera ces valeurs σ -critiques.

Les valeurs critiques ordinaires et les valeurs σ -critiques sont isolées. Toutefois, ces valeurs ne suffisent pas à construire une théorie de Morse. Il y a lieu d'y associer d'autres types de valeurs critiques.

- *Valeurs τ -critiques*. Pour chaque valeur (c) on a un lieu critique $\Gamma(c)$ dans $F=c$. On peut alors saturer ce lieu par la relation ρ dans $F \leq c$; on obtient ainsi un ensemble $\tilde{\Gamma}(c)$, génériquement un ensemble stratifié (ou une image continue d'ensemble stratifié). Il y a lieu alors de considérer l'intersection $(F=c) \cap \tilde{\Gamma}(c)$; à l'extérieur de $\Gamma(c)$ cette intersection est en général transversale (en un sens généralisé, si $\Gamma(c)$ a des singularités). On appellera τ -valeur critique toute valeur pour laquelle cette intersection $(F=\tau) \cap \tilde{\Gamma}(\tau)$ cesse d'être transversale.

Ici encore, on peut définir la notion de défaut de transversalité de codimension un, et on supposera que les valeurs (τ) ainsi obtenues sont effectivement transversalement obtenues lors de la variation de (c) à travers la valeur (τ). Le dernier type de valeurs critiques à considérer est celui qui dans le cas classique des flots, correspond à des intersections non transversales de variétés stables et instables dans la théorie de la bifurcation. Pour cela il sera nécessaire d'admettre pour notre espace quotient $(F \leq c)/\rho$, une structure d'espace stratifié non séparé. Par exemple, le quotient d'un espace $\mathbb{R}^n$ par un endomorphisme linéaire hyperbolique T , $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^u \oplus \mathbb{R}^s$, est un espace de quatre strates: U^{u+s} de la forme $S^{u-1} \times S^{s-1} \times \mathbb{R}^2$, domaine fondamental par T restreint au complémentaire $\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^u \cup \mathbb{R}^s$; les variétés stables $S^{u-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^u$, $S^{s-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^s$ et l'origine 0. La seule différence avec l'axiomatique usuelle des ensembles stratifiés est que les applications d'attachement $\sum_X < \mathbb{Z}$ ne satisfont

plus à la condition de séparation lorsque les strates bord sont disjointes (non incidentes l'une sur l'autre).

Dès qu'il existe une feuille compacte ϕ dans notre variété $F \leq c$, on peut s'intéresser aux feuilles qui contiennent (ϕ) dans leur adhérence. Elles forment un ensemble $W(\rho)$ (généralisant variété stable et instable), qui dans les "bons" cas est un ensemble stratifié. On est alors amené, pour toute strate Δ du quotient $(F \leq c)/\rho$, même non séparé, à lui associer l'ensemble $W(\Delta)$, qui peut être une strate de la stratification - ou un ensemble infiniment plus pathologique.

On appellera *valeur ζ -critique* toute valeur c pour laquelle l'intersection d'une strate de la forme $W(\Delta)$ avec $F = c$ est non transversale, ou pour laquelle les ensembles $W_c(\Delta_i)$ cessent de se couper transversalement, ou encore toute valeur c à la traversée de laquelle un ensemble $W(\Delta)$ cesse d'être stratifié par suite d'une complexification de l'holonomie de la feuille (Δ) . En particulier, les valeurs critiques de F restreintes aux feuilles (Δ) sont des valeurs ζ -critiques. Ces définitions étant données, on observe qu'au départ pour c voisin du minimum μ_0 , $c = \mu_0 + \varepsilon$, $F \leq c$ est une boule, et ρ y est quasi linéaire. On a donc un bon quotient $(F \leq c)/\rho$ qui est une $(n-k)$ boule. Toute feuille est simplement connexe. Tant qu'on n'a pas construit de feuilles non simplement connexes, la théorie de stabilité de Reeb permet d'affirmer que toute feuille des $F \leq c$ a un voisinage saturé, et par suite le quotient reste un ensemble de Hausdorff qui est stratifié selon le mode des *variétés branchues* de R. Williams [2] (compactifiées). Ceci se produira tant qu'on n'aura pas franchi une certaine valeur critique (ordinaire, ou σ , τ) pour laquelle apparaîtra une feuille compacte à holonomie non triviale.

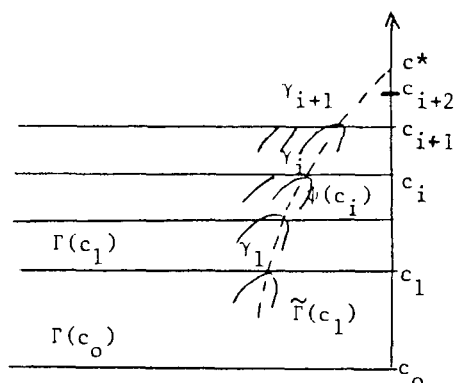
On peut conjecturer que génériquement, on obtient une feuille compacte à holonomie hyperbolique. On notera que ceci exige des contacts d'indice 1 pour créer du π_1 (en général par des valeurs τ -critiques).

Avant cette valeur c^* , pour $c < c^*$, l'application $(F \leq c) \rightarrow (F \leq c)/\rho$ est une application stratifiée sans éclatement. Elle présente donc la stabilité topologique pour tout intervalle $]c_1, c_2[< c^*$ ne contenant aucune valeur critique. En général cette valeur c^* est précédée d'une suite convergente de valeurs c_i qui sont τ -critiques. Et on peut voir que le quotient $(c^* - c_i)/(c^* - c_{i+1})$ tend vers une limite (comme dans le phénomène de Feigenbaum).

Considérons le "pli" $\Gamma(c)$ sur $F = c$. Le saturé $\tilde{\Gamma}(c)$ va couper $F = c$

en un autre lieu $\psi(c)$; quand c tend vers c_i , $\psi(c_i)$ aura un contact ordinaire avec $\Gamma(c_i)$ en un point γ_i , ce qui augmente la feuille saturée $\tilde{\Gamma}(c_i)$. Alors le saturé $\tilde{\Gamma}(c_{i+1})$, pour $c = c_i + \epsilon$, va contenir un morceau issu d'un voisinage à droite de γ_i , lequel va créer plus tard un nouveau contact (γ_{i+1}) avec $\Gamma(c_{i+1})$ pour une valeur c_{i+1} . D'où la suite des segments γ_i, γ_{i+1} , associés à des figures approximativement semblables, qui convergent vers un point $\tilde{\gamma}$ de valeur c^* .

Il est vraisemblable que la création d'une feuille à holonomie non triviale débute génériquement par une feuille à holonomie hyperbolique. Ceci est une exigence de la théorie de Morse classique, et pourrait être une formulation d'un "closing lemma" généralisé.



Note: La coordonnée verticale au voisinage des points γ_i signifie non la variable c , mais une coordonnée locale transverse à $\Gamma(c)$ dans $F^{-1}(c)$.

Après la valeur c^* , on a un quotient stratifié non séparé; on peut alors aller jusqu'à une valeur c^{**} , où cette propriété cesse. Il est vraisemblable que dans l'intervalle $c^* < c < c^{**}$, il n'y a pas stabilité topologique, car les applications d'attachement des stratifiés non séparés donnent naissance à des diagrammes d'applications divergentes. Si $\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix} < Z$, on a $Z \begin{smallmatrix} \nearrow \\ \searrow \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}$ diagramme divergent, topologiquement instable selon la théorie de Dufour [3]. Toutefois, dans certains cas, la stabilité topologique peut subsister. Ainsi, s'il n'existe qu'un nombre fini de strates (Δ_i) qui sont des feuilles hyperboliques compactes, si les variétés $W(\Delta_i)$ se coupent transversalement, avec une condition du type (No-Cycle) qui assure que toutes les autres feuilles sont non compactes à holonomie triviale, on peut avoir un théorème

de stabilité topologique généralisant celui des systèmes de Morse-Smale. Ceci est dû au fait que dans le cas hyperbolique, les applications d'attachement qui se présentent lors des incidences multiples telles que $X_Y < Z$ ont leur fibres transversales, ce qui donne la raison profonde de la stabilité topologique des points singuliers hyperboliques énoncée par le théorème de Hartmann.

Au-delà pour $F > c^{**}$, on a un quotient non séparé, non stratifié; c'est ce qu'on appelle - par abus de langage sans doute - le "chaos". Soit le schéma général:

	μ_0	c^*	c^{**}	c
(D)	Espace quotient stratifié séparé	Espace quotient stratifié non séparé	' ' '	"chaos"

Le seul fait qu'on ait le théorème de stabilité structurelle des difféomorphismes d'Anosov, montre que dans certains cas, on peut dire quelque chose de ces quotients non séparés. Très souvent, on a à considérer un couple d'endomorphismes ϕ_1, ψ_1 sur un espace, définis à la conjugaison près. C'est le cas par exemple des holonomies non hyperboliques, définis par un homéomorphisme $\pi_1(F) \rightarrow GL(k)$ dont il serait bien intéressant de caractériser la structure générique pour un $\pi_1(F)$ donné. Le diagramme (D) suscite la question suivante: les bifurcations de l'endomorphisme quadratique $x \rightarrow x^2 + \lambda$ dans sa partie utile $\lambda < \frac{1}{4}$ ne présentent que la partie c^*c^{**} du schéma (D). Cela est dû au fait que pour $\lambda = 0$ on a déjà un endomorphisme global (et non local comme dans la théorie de Morse).

Terminons par deux simples remarques. L'espace de phase de l'oscillateur linéaire, associé à l'hamiltonien $H = p^2 + q^2$, a un quotient séparé. En introduisant du frottement, ou de la dissipation, le quotient devient non séparé, car le centre devient foyer.

On observera d'ailleurs que dans la suite de Feigenbaum $x \rightarrow x^2 + \lambda$ le quotient $Q(\lambda)$ reste isomorphe à lui-même à travers les bifurcations qui précèdent la valeur de chaos c^{**} , seule varie l'application $\rho: \mathbb{R} \rightarrow Q(\lambda)$ où le quotient $Q(\lambda)$ est formé de trois strates: deux points O_i ($i=1,2$) et un cercle S^1 où les strates points O_1, O_2 , compactifient les bouts du revêtement universel $\mathbb{R}$ du cercle S^1 .

Cette propriété d'invariance du quotient avant la valeur c^{**} est sans doute exceptionnelle. Par ailleurs il est probable que les défor-

mations d'un endomorphisme n'engendrent pas nécessairement toutes les déformations génériques de la structure feuilletée globale que l'endomorphisme engendre par ses itérations.

REFERENCES

- [1] R. Thom, Généralisation de la théorie de Morse aux variétés feuilletées. Annales de l'Institut Fourier, XIV (1964) p.173-189.
- [2] R.F. Williams, Expanding attractors. Publ. IHES n°43 (1974) p. 169 - 203.
- [3] J.-P. Dufour, Diagrammes d'applications différentiables. Thèse Université de Montpellier 1979.

* René THOM
Institut des Hautes Etudes
Scientifiques.
35, Route de Chartres
91440 Bures-sur-Yvette
FRANCE

* * *

HAMILTONIAN - LIKE PHENOMENA IN SADDLE - NODE BIFURCATIONS OF INVARIANT CURVES FOR PLANE DIFFEOMORPHISMS

Alain Chenciner

Université Paris VII
 France

I present here a short report on my recent work on degenerate Hopf bifurcation of plane diffeomorphisms; for the proofs, the reader can consult [1],[2],[3]. The talk I gave in Crete stressed a particular result [2] concerning the existence of Aubry - Mather invariant sets. I shall discuss more here results connected with invariant curves, particularly a very new theorem asserting the existence of "many" "good" saddle-node bifurcations of invariant curves contained in a generic two-parameter family "unfolding" a local diffeomorphism possessing an elliptic fixed point of formal codimension two.

We consider (generic) two parameter families of smooth local diffeomorphisms $P_{\mu,a}$ of $\mathbb{R}^2, 0$ and write them as perturbations of normal forms; more precisely, provided the derivative $DP_{0,0}(0)$ is conjugate to a rotation by an angle $2\pi\omega_0$ where ω_0 is not a rational number of denominator smaller than $2n+3$, one can choose $z, \bar{z}$ coordinates in $\mathbb{R}^2$ such that

$$P_{\mu,a}(z) = N_{\mu,a}(z) + O(|z|^{2n+3}),$$

$$N_{\mu,a}(z) = z(1 + f(\mu,a|z|^2))e^{2\pi ig(\mu,a|z|^2)},$$

where $f(\mu,a,X)$ and $g(\mu,a,X)$ are polynomials of degree n in the last variable with real coefficients depending smoothly on the parameters μ,a , which can be written

$$f(\mu,a,X) = \mu + aX + a_2(\mu,a)X^2 + \dots + a_n(\mu,a)X^n,$$

$$g(\mu,a,X) = b_0(\mu,a) + b_1(\mu,a)X + \dots + b_n(\mu,a)X^n,$$

and satisfy the following assumptions:

$$a_2(0,0) \neq 0, \quad b_1(0,0) \neq 0, \quad b_1(0,0) - 2a_2(0,0)\frac{\partial b_0}{\partial a}(0,0) \neq 0.$$

The bifurcation diagram of the family of normal forms and the associated dynamics are represented on fig.1 in the case where $a_2(0,0) < 0$:

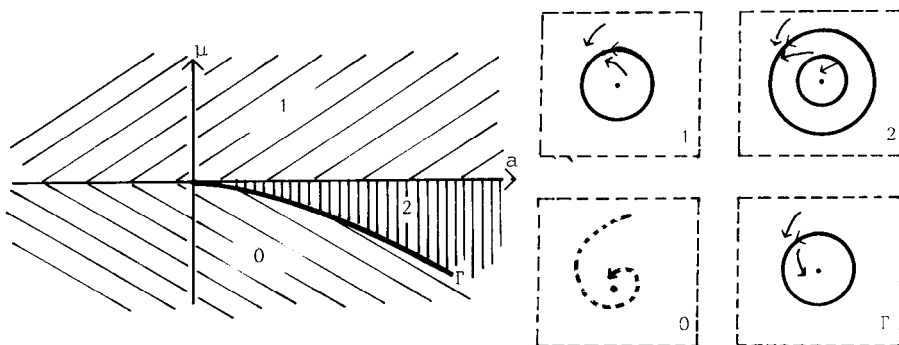


Fig.1

The following theorems are true as soon as $n \geq 15$ (i.e. one must avoid the 33 first resonances). We say that $P_{\mu,a}$ looks like a normal form $N_{\mu',a'}$ if in a uniform (i.e. independent of μ, a) neighborhood Ω of 0, $P_{\mu,a}$ and $N_{\mu',a'}$ have the same number (0,1, or 2) of invariant curves and the same decomposition of Ω into basins of attraction or repulsion of 0 and the invariant curves.

THEOREM 1. For a generic family $P_{\mu,a}$ the set $\mathcal{N}$ of values of the parameters μ, a where $P_{\mu,a}$ looks like a normal form contains the complement of an infinite number of "bubbles" arranged in a string along Γ (fig.2). The bubbles are pinched on both sides and the closure $\tilde{\Gamma}$ of their contact points $\tilde{\gamma}_\omega$ is a Cantor set corresponding to diffeomorphisms $P_{\tilde{\gamma}_\omega}$ which look like a normal form N_{γ_ω} with $\gamma_\omega \in \Gamma$. In fact one even gets that the dynamics of $P_{\tilde{\gamma}_\omega}$ and N_{γ_ω} on their unique (saddle-node) invariant curve are conjugate.

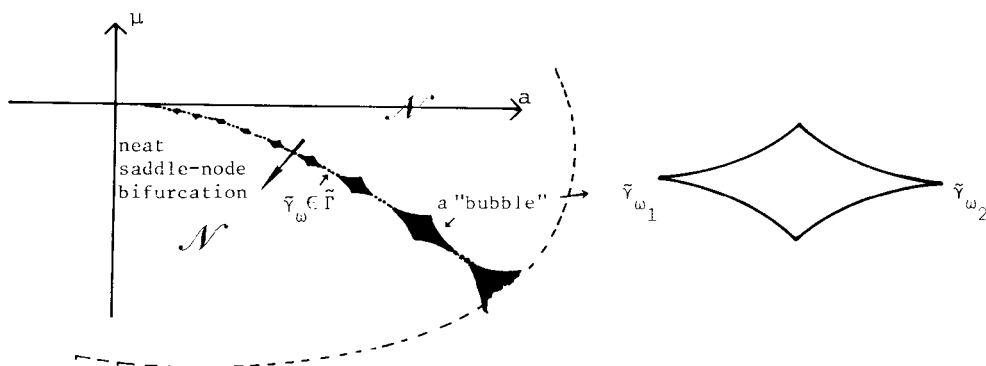


Fig.2

COROLLARY. Almost every local one-parameter subfamily going through $\tilde{P}_{\tilde{\gamma}}$ with $\tilde{\gamma}_{\omega} \in \tilde{\Gamma}$ undergoes a neat saddle-node bifurcation of invariant curves as would be the case if one dealt with generic families of vector-fields.

Note that $\tilde{\Gamma}$ replaces Γ in the same sense that the Cantor set of invariant curves given by K.A.M. theorem in the conservative setting replaces the one-parameter family of invariant curves of the associated normal form. Similarly, the bubbles play the role of Birkhoff's domains of instability: this last statement is made precise in the following theorem

THEOREM 2. Generically the bubbles are open, that is the region $\mathcal{E}$ of the (μ, a) plane where $P_{\mu, a}$ does not look like a normal form contains an infinite number of disjoint open sets. In this region one can prove the existence of values of (μ, a) such that $P_{\mu, a}$ possesses ordered periodic orbits with associated homoclinic points and also of values of (μ, a) such that $P_{\mu, a}$ leaves invariant an Aubry-Mather Cantor set.

The proof of Theorem 1 is divided into three parts whose first two are detailed in [1] and the last will appear in the published version of [1]:

1. One defines a horned neighborhood V of Γ (fig.3) such that, for any (μ, a) outside V , the normal attraction (or repulsion) of an invariant circle of $N_{\mu, a}$ is strong enough to resist the perturbation $P_{\mu, a} - N_{\mu, a} = O(|z|^{2n+3})$. One can then prove that $P_{\mu, a}$ looks like $N_{\mu, a}$. V is defined by the apparent contour on the (μ, a) plane of the surfaces $f(\mu, a, r^2) + r^{2n} = 0$ and $f(\mu, a, r^2) - r^{2(n-3)} = 0$ and the techniques of proof are the same as in the classical Hopf bifurcation theorem for diffeomorphisms (for instance Hadamard's graph transform method). One can think of V (resp. the complement $\mathcal{H}$ of V) as the elliptic (resp. the hyperbolic) domain.
2. In V one uses techniques analogues to the ones used in K.A.M. theory (implicit function theorem in "good" Fréchet spaces of smooth functions): we first enrich the bifurcation diagram of fig.1 with the information relative to rotation numbers on invariant circles. On figure 3 we have depicted (in the case $b_1(0,0) > 0$ and $\frac{\partial b}{\partial a}(0,0) > 0$) the curves C_{ω} defined by $C_{\omega} = \{(\mu, a), N_{\mu, a} \text{ has an invariant circle on which it is a rotation by an angle } 2\pi\omega, \text{ i.e. of rotation number } \omega\}$. Note that Γ is the envelope of the C_{ω} 's for $\omega > \omega_0$.

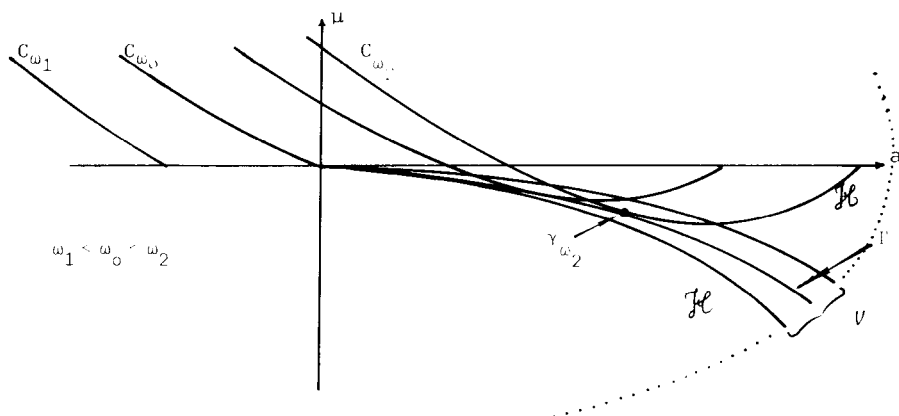


Fig. 3

The strategy of the second part (and also of the proof of theorem 2) is to understand the analogue $\tilde{C}_\omega$ of C_ω for the generic family $P_{\mu,a}$. Let $\tilde{C}_\omega = \{(\mu, a), P_{\mu,a} \text{ possesses an Aubry-Mather invariant set of rotation number } \omega\}$. Recall (4) that such a set is either an ordered periodic orbit, or an invariant curve, or an invariant Cantor set.

DEFINITION. Call an irrational number ω "good" if $\exists C > 0, \beta > 0$, such that

$$1) \text{ For any rational number } \frac{p}{q} \text{ one has } |\omega - \frac{p}{q}| \geq \frac{C |\omega - \omega_0|}{|q|^{2+\beta}}$$

$$2) |\omega - \omega_0| \leq \epsilon(C, \beta) \quad (\epsilon(C, \beta) \text{ depends on } C, \beta, \text{ and the family } P_{\mu,a}).$$

PROPOSITION. If ω is "good", $\tilde{C}_\omega$ is a smooth curve near C_ω corresponding to values of (μ, a) such that $P_{\mu,a}$ has an invariant curve, close to a circle, on which the induced diffeomorphism is smoothly conjugate to the rotation of rotation number ω . Moreover, there exists a unique point $\tilde{\gamma}_\omega \in \tilde{C}_\omega$ playing the same role as γ_ω for C_ω , i.e. the invariant curve of $P_{\tilde{\gamma}_\omega}$ is saddle-node, if $(\mu, a) \in \tilde{C}_\omega$ is on the left (resp. the right) of $\tilde{\gamma}_\omega$, the invariant curve of $P_{\mu,a}$ is a normally hyperbolic attractor (resp. repeller).

The set of all points $\tilde{\gamma}_\omega$ defines the Cantor set $\tilde{\Gamma}$. The proof uses Rüssmann's idea of "translated" curves, the preservation of area being here replaced by the existence of a translation parameter.

3) One proves easily that $P_{\tilde{\gamma}_\omega}$ looks like $N_{\tilde{\gamma}_\omega}$. One then undertakes a new bifurcation study from $\tilde{\gamma}_\omega$ the diffeomorphism $P_{\tilde{\gamma}_\omega}$: using the diophantine property of ω one can write normal forms for $P_{\mu,a}, (\mu, a)$ clo-

se to $\tilde{\gamma}_\omega$, in the neighborhood of the invariant curve of $P_{\tilde{\gamma}_\omega}$ which, at least for (μ, a) on $\tilde{C}_\omega$, look like normal forms around a $\tilde{\gamma}_\omega$ fixed point. Outside $\tilde{C}_\omega$, the existence of a translation parameter forbids a total suppression of the angle dependence in the first terms of the normal forms, but Lipschitz estimates coming from the implicit function theorem in part 2) allow us to make this dependence very small. One is now ready to prove, using the same method as in 1), that if (μ, a) is near enough to $\tilde{\gamma}_\omega$ (more precisely in a box $\mathcal{D}_\omega$ defined by $|\mu - \mu_\omega| \leq c |\omega - \omega_0|^3$, $|a - a_\omega| \leq c |\omega - \omega_0|^2$), $P_{\mu, a}$ looks like a normal form with 0 (resp. 2) invariant curves in the region $\tilde{A}_\omega$ (resp. $\tilde{B}_\omega$) depicted on figure 4.

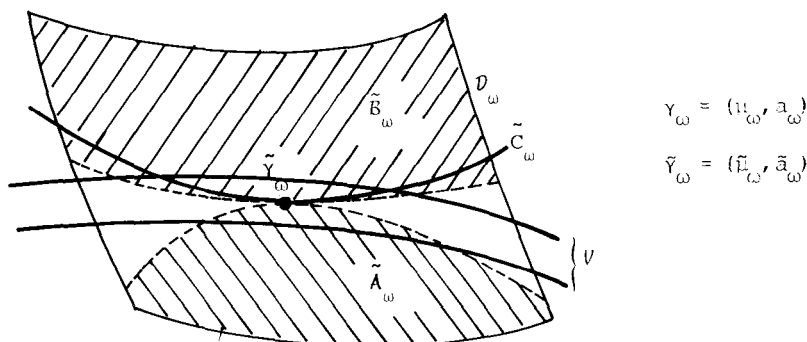


Fig.4

As we said before, the proof of theorem 2 relies on a study of the sets $\tilde{C}_\omega$ for bad ω 's. Outside V the generic structure of $\tilde{C}_\omega$ is easy enough to understand through methods analogous to the ones used in classical Hopf bifurcation theory of diffeomorphisms: as $C_\omega \cap \mathcal{H}$, $\tilde{C}_\omega \cap \mathcal{H}$ has one component or two connected components corresponding respectively to attracting and repelling invariant curves. If ω is irrational, $\tilde{C}_\omega \cap \mathcal{H}$ is a Lipschitz curve (with lipschitz constant independant of ω); if ω is rational, $\tilde{C}_\omega \cap \mathcal{H}$ is generically a "fat" region bounded by Lipschitz curves, analogous to Arnold tongues (locking of rational frequencies as physicists say).

In order to understand the structure of $\tilde{C}_\omega \cap V$ we work again in the "square" $\mathcal{D}_\omega$ whose definition makes sense for any ω . We prove that for any continuous path $c: [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}_\omega$ going from the lower to the upper part of the boundary of $\mathcal{D}_\omega$, there exists a $t_0 \in [0, 1]$ such that $P_c(t_0) \in \tilde{C}_\omega$. As always in this kind of problem, Lipschitz estimates attached to ordered periodic orbits of monotone twist maps of an an-