ISNM
International Series of Numerical Mathematics
Internationale Schriftenreihe zur Numerischen Mathematik
Série internationale d'Analyse numérique
Vol. 16

Numerische Methoden der Approximationstheorie Band 1

Vortragsauszüge
der Tagung über numerische Methoden der Approximationstheorie
vom 13. bis 19. Juni 1971
im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach (Schwarzwald)

Herausgegeben von L. Collatz, Hamburg, und G. Meinardus, Erlangen

BIRKHÄUSER VERLAG

ISNM

International Series of Numerical Mathematics
Internationale Schriftenreihe zur Numerischen Mathematik
Série internationale d'Analyse numérique

Editors:
Ch. Blanc, Lausanne; A. Ghizzetti, Roma
A. Ostrowski, Montagnola; J. Todd, Pasadena
A. van Vijngaarden, Amsterdam

1 Introduction to the Constructive Theory of Functions
By John Todd, Pasadena

2 **Hybridrechnen.** Von M. Feilmeier, 1972

3 Colloquium über Schaltkreis- und Schaltwerk-Theorie, Bonn 1960

4 2. Colloquium über Schaltkreis- und Schaltwerk-Theorie, Saarbrücken 1961

5 **On Approximation Theory,** Über Approximationstheorie, Oberwolfach 1963
Editors: P. L. Butzer and T. Korevaar

6 3. Colloquium über Automatentheorie, Hannover 1965

7 Funktionalanalysis, Approximationstheorie, Numerische Mathematik, Oberwolfach 1965

8 Moderne mathematische Methoden in der Technik (3 Bände), Band 1
Von Stefan Fenyö und Thomas Frey

9 Numerische Mathematik, Differentialgleichungen, Approximationstheorie, Oberwolfach 1966

10 **Abstract Spaces and Approximation.** Proceedings of the Conference at Oberwolfach 1968
Editors: P. L. Butzer and B. Sz.-Nagy

11 Moderne mathematische Methoden in der Technik (3 Bände), Band 2
Von Stefan Fenyö

12 Funktionalanalytische Methoden der Numerischen Mathematik, Oberwolfach 1967
Herausgeber: L. Collatz, H. Unger

13 Quadrature formulae
By A. Ghizzetti and A. Ossicini

14 Constructive and Numerical Mathematics
By John Todd. In Preparation

15 Iterationsverfahren, Numerische Mathematik, **Approximationstheorie.** Oberwolfach 1968, 1969

16 **Numerische Methoden der Approximationstheorie,** Band 1, Oberwolfach 1971, 1972

20 **Linear Operators and Approximation,** Oberwolfach 1971, 1972

BIRKHÄUSER VERLAG

Numerische Methoden der Approximationstheorie Band 1

Vortragsauszüge
der Tagung über numerische Methoden der Approximationstheorie
vom 13. bis 19. Juni 1971
im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach (Schwarzwald)

Herausgegeben von
L. Collatz, Hamburg, und G. Meinardus, Erlangen

1972
BIRKHÄUSER VERLAG BASEL
UND STUTTGART

Nachdruck verboten
Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen und der Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten.
© Birkhäuser Verlag Basel, 1972
ISBN 3-7643-0633-5

ISNM

INTERNATIONAL SERIES OF NUMERICAL MATHEMATICS
INTERNATIONALE SCHRIFTENREIHE ZUR NUMERISCHEN MATHEMATIK
SÉRIE INTERNATIONALE D'ANALYSE NUMÉRIQUE

Editors:
Ch. Blanc, Lausanne; A. Ghizzetti, Roma; A. Ostrowski, Montagnola; J. Todd, Pasadena; A. van Wijngaarden, Amsterdam

VOL. 16

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

I:

8

9

1(

11

12

3

4

5

6

0

VORWORT

Das Mathematische Forschungsinstitut Oberwolfach veranstaltet seit längerer Zeit in etwa zweijährigem Turnus Tagungen über numerische Methoden der Approximationstheorie. Die Vortragsauszüge der diesjährigen Tagung, die vom 13. bis 19. Juni stattfand, sind in dem vorliegenden Band zusammengefaßt. Die Themen lassen erkennen, daß es ein besonderes Anliegen der Tagungsleiter war, die Kluft zwischen abstrakter Mathematik und den Anwendungen verringern zu helfen. Approximationstheoretische Fragestellungen scheinen geeignet zu sein, hier neue Brücken zu schlagen. Der starke Zustrom ausländischer Mathematiker, insbesondere aus Übersee, zeigt, daß diese Bestrebungen auch in anderen Ländern Resonanz finden.
In zunehmendem Maße sind solche aus den (außer- und innermathematischen) Anwendungen herrührenden Fragestellungen zu behandeln, die sich nicht in klassische Approximationstheorie einordnen lassen. So wurde z. B. von Vertretern der Nachrichtentechnik über in ihrem Bereich auftretende ungewöhnliche Approximationsprobleme berichtet. Andere Vorträge beschäftigten sich mit Approximationsfragen, die aus gewissen Aufgaben der angewandten Mathematik erwachsen (z. B. Behandlung von Differential- und Integralgleichungen). Zwei weitere Schwerpunkte bildeten die Beziehungen zur Optimierungstheorie, die insbesondere zu effektiven numerischen Verfahren führen, sowie Untersuchungen über Spline-Approximationen.
Professor Stečkin aus Moskau war leider an der Teilnahme verhindert und hat statt dessen das hier abgedruckte Manuskript übersandt.
Die Tagungsleiter danken allen Teilnehmern für das bekundete Interesse und die aktive Mitarbeit. Der besondere Dank gilt dem Leiter des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach, Herrn Professor Dr. M. Barner, und seinen Mitarbeitern, Frau Dipl.-Math. K. Schulte von der Geschäftsstelle in Freiburg, für ihre redaktionelle Mithilfe, der Verwaltung und dem Personal des Hauses, die wieder für eine harmonische Atmosphäre Sorge trugen, und schließlich dem Verlag Birkhäuser für die stete Förderung und sehr gute Ausstattung dieses Buches.

L. Collatz G. Meinardus

Tagung über numerische Methoden der Approximationstheorie
vom 13. bis 19. Juni 1971
Leiter: L. COLLATZ und G. MEINARDUS

ÜBER DIE MEHRDEUTIGKEIT BEI DER APPROXIMATION DURCH SPLINE-FUNKTIONEN MIT FREIEN KNOTEN[1)]

von D. Braess in Münster

1. EINFÜHRUNG

In diesem Bericht wird die Approximation von stetigen Funktionen in einem endlichen Intervall durch Spline-Funktionen mit freien Knoten betrachtet. Dabei sei die Approximation im Sinne von Tschebyscheff verstanden. Im Gegensatz zu einer früheren Arbeit des Autors [1], in der man die Beweise für die meisten Sätze findet, stehen hier die offenen Fragen im Mittelpunkt, die gerade für die numerische Behandlung eine Rolle spielen.

Wenn man die Splines mit den üblichen Methoden der Analysis untersucht, dann bekommt man zwar verschiedene Alternantenkriterien, aber kein übersichtliches Bild und keine einheitliche Theorie. Neue Einblicke erhalten wir über den Zusammenhang mit der verallgemeinerten Exponentialapproximation. Das folgende Diagramm zeigt die logische Verknüpfung für die Ergebnisse der interessierenden Funktionenklassen.

$$\begin{tikzcd} & \text{Lineare Haarsche Systeme} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \text{Splines feste Knoten} \arrow[dr] & & \gamma\text{-Polynome (Descart'sche Familien)} \arrow[dl] \\ & \text{Splines, freie Knoten} & \end{tikzcd}$$

Fig. 1

Dabei bedeutet der $\swarrow$ Pfeil jeweils die Abschwächung der Haarschen Bedingung

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

und der ↘Pfeil den Übergang zu einer nichtlinearen Familie. Mit jedem Pfeil ist eine Abschwächung der Ergebnisse verbunden.

2. SPLINES MIT FESTEN KNOTEN

Um mit möglichst wenig Bezeichnungen auszukommen, beschränken wir uns hier auf solche Splines, die aus Polynomen zusammengesetzt sind, obwohl man genauso ein anderes Haarsches System als Basis benutzen kann. Sei $[a,b]$ ein kompaktes reelles Intervall und $a = x_o < x_1 < x_2 \ldots < x_k < x_{k+1} = b$.

Dann bezeichnet

$$S_{n,k}(x_1,x_2,\ldots,x_k) = \{s(t) = \sum_{i=o}^{n} a_i u_i(t) + \sum_{i=1}^{k} c_i \Phi_n(t,x_i);\; a_i, c_i \in \mathbb{R}\}$$

(1) $$\text{mit } u_i(t) = t^i, \quad i = o, 1 \ldots n,$$

$$\Phi_n(t,x) = (t-x)_+^n = \begin{cases} (t-x)^n & \text{für } t \geq o, \\ o & \text{sonst} \end{cases}$$

die Familie der Splines mit den festen Knoten $x_1, x_2 \ldots x_k$. Die Funktionen sind so aufgebaut, daß sie stückweise Polynome und außerdem im ganzen Intervall $n-1$-mal stetig differenzierbar sind. Zunächst sei (man vergleiche im Diagramm den linken Ast) an das Hauptergebnis für die Approximation mit festen Knoten erinnert. Dann liegt ein lineares Problem vor, bei dem jedoch die Haarsche Bedingung verletzt ist. Trotzdem erhält man ein zugleich notwendiges und hinreichendes Alternantenkriterium [8].

SATZ 1: *Sei $f \in C[a,b]$. $s \in S_{n,k}(x_1,x_2 \ldots x_k)$ ist genau dann beste Approximation zu f in $S_{n,k}(x_1,x_2 \ldots x_k)$, wenn $f(t)-s(t)$ in einem (Teil-) Intervall $[x_p, x_{p+q+1}]$ eine Alternante der Länge $n+q+2$ besitzt.*

Daß hier trotz der Verletzung der Haarschen Bedingung eine Alternante zum Kriterium wird, beruht darauf, daß die Funktionen

(2) $$u_o, u_1, \ldots, u_n, \quad \Phi_n(\cdot,x_1), \quad \Phi_n(\cdot,x_2) \ldots \Phi_n(\cdot,x_k)$$

wenigstens die schwache Haarsche Bedingung erfüllen. Dabei bedeutet die schwache Haarsche Bedingung für ein Funktionensystem $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ die Existenz einer Konstanten $\epsilon = +1$ oder $\epsilon = -1$, so daß für alle geordneten Punktmengen $t_1 < t_2 < \ldots < t_m$ im Approximationsintervall für die Determinante

$$\epsilon \cdot \left| \varphi_i(t_j) \right|_{i,j=1}^{m} \geq 0 \tag{3}$$

gilt. Die Aussage findet man mit $\epsilon = +1$ für die Splines in dem Lemma 2.1 in [9], mit dessen Hilfe auch Satz 1 bewiesen wird.

3. ALTERNANTENKRITERIEN BEI FREIEN KNOTEN

Wir wenden uns nun der Theorie mit freien Knoten zu. Zunächst bedeutet das die Einführung der Familie

$$S^o_{n,k} = \bigcup_{x_i \in [a,b]} S_{n,k}(x_1, x_2, \ldots, x_k). \tag{4}$$

Diese Familie ist (in der starken Topologie) nicht abgeschlossen. Um die Existenz bester Approximationen zu gewährleisten, muß man $S^o_{n,k}$ abschließen und dazu die Funktionen mit hinzunehmen, die sich im Grenzfall zusammenlaufender Knoten ergeben. Dies bedeutet: es sind auch mehrfache Knoten zuzulassen, wobei ein Knoten x_i die Vielfachheit m_i hat, wenn die Spline-Funktion dort nur $n-m_i$ mal stetig differenzierbar ist. Es ergibt sich die Familie

$$S_{n,k} = \{s(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i u_i(t) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} c_{ij}\, \Phi_{n+1-j}(t, x_i),\ \sum_{i=1}^{r} m_i \leq k\}. \tag{5}$$

Mit Hilfe der allgemeinen Theorie von MEINARDUS und SCHWEDT [7] für die nichtlineare Approximation lassen sich notwendige und hinreichende Kriterien für $S_{n,k}$ herleiten. Dabei nutzt man aus, daß Satz 1 auch auf mehrfache (feste) Knoten ausgedehnt werden kann (ebenso wie die schwache Haarsche Bedingung) [1].

SATZ 2: *Sei $f \in C[a,b]$*

(i) *Wenn f-s in einem Intervall $[x_p, x_q]$ eine Alternante der Länge $n+k+l+2$*

hat und $s \in S_{n,l}[x_p, x_q]$ *(d.h. die Restriktion von s auf* $[x_p, x_q]$ *ein Spline mit* l *Knoten ist), dann ist s eine beste Approximation zu f in* $S_{n,k}$.

(ii) *Sei s beste Approximation zu f in* $S_{n,k}$. *Dann existiert ein Intervall* $[x_p, x_q]$ *mit einer Alternante der Länge* $n+l+l_1+2$, *wobei* $s \in S_{n,l}[x_p, x_q]$ *ist und* l_1 *die Zahl der Knotenpunkte von s in* (x_p, x_q) *mit einer Vielfachheit* $m_i \leq n-1$ *bedeutet.*

Die hinreichende Bedingung stellt eine Verschärfung der bekannten Bedingung von SCHUMAKER [9] dar. Eine einfachere notwendige Bedingung gab HANDSCOMB [5] ohne Beweis, aber wie man aus einfachen Gegenbeispielen erkennt, ist das Kriterium in [5] nur unter Einschränkungen richtig.

Der Beweis von Satz 2 sei nur soweit skizziert, daß die Ausweitung der Ergebnisse für feste Knoten deutlich wird. $s \in S_{n,k} \cap S_{n,l}[x_p, x_q]$ erfülle die Alternantenbedingung in (i), und es sei angenommen, $\tilde{s} \in S_{n,k}$ sei eine bessere Approximation.

Da s nach Satz 1 jedoch optimal unter allen Splines mit denjenigen festen Knoten ist, welche sich aus der Vereinigung der Knoten von s und $\tilde{s}$ ergeben, ist das ein Widerspruch. Zum Beweise der notwendigen Bedingungen betrachtet man die Linearkombinationen von Ableitungen der Splines nach den Parametern in (5)

(6) $$\frac{\partial s}{\partial a_i}, \frac{\partial s}{\partial c_{ij}}, \frac{\partial s}{\partial x_i}.$$

Dies sind Splines aus $S_{n,k+l}$, und Satz 1 ermöglicht die Anwendung der allgemeinen Sätze von MEINARDUS und SCHWEDT [7].

Zwischen der notwendigen und der hinreichenden Alternantenbedingung besteht eine Lücke. Wie man an folgendem Beispiel erkennt, kann diese Lücke nicht geschlossen werden.

Beispiel 1. Wir betrachten die Approximation in $S_{n,1}$ über dem Intervall $[o, 3]$. Sei

$$f(t) = \begin{cases} (-1)^{n+1} \sin(n+2)\pi t & \text{für } o \leq t \leq 1, \\ o & \text{für } 1 \leq t \leq 2, \\ \alpha(t-2)^n & \text{für } 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

und

$$s(t) = (t-2)_+^n$$

mit $\alpha > 0$. Offensichtlich gibt es zu $f-s$ eine Alternante der Länge $n+2$ aber keine der Länge $n+2k+2$. Wenn $\alpha \geq 6^n+1$ gilt, ist s beste Approximation. Angenommen für $\tilde{s} \in S_{n,1}$ sei $\|f-\tilde{s}\| < 1$. Dann hätte $\tilde{s}$ in $[0,1]$ einen Knoten, und die Restriktion auf $[1,3]$ wäre ein Polynom. Nach einem Satz von BERNSTEIN (Theorem 74 in [7]) folgt aus $sup\{|\tilde{s}(t)|,\ t \in [1,2]\} \leq f-\tilde{s} < 1$ die Relation $\tilde{s}(3) < (3+\sqrt{8})^n < 6^n$ im Widerspruch zu $f-\tilde{s} < 1$. Andererseits ist s nicht beste Approximation, falls $|\alpha| < \frac{1}{2}$ ist. Denn $\tilde{s} = \frac{1}{6^n}(t-\frac{n+1}{n+2})^n_+$ ist eine ebenso gute Approximation, aber nicht optimal, da zu $f-\tilde{s}$ nur eine Alternante der Länge $n+1$ gehört.

4. EXKURSION ZU γ-POLYNOMEN

Aus diesem Grunde ist nicht zu erwarten, daß man mit den bisher benutzten Methoden eine wesentliche Verschärfung der Ergebnisse erreichen kann. Neue Einblicke ergeben sich vielmehr durch die Verbindung mit den sogenannten γ-Polynomen [2] (man vergleiche den rechten Ast des Diagramms in Fig. 1). Der algebraische Zusammenhang ist schnell hergestellt, da sich Splines in der Form

$$s(t) = \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij} \frac{\partial^{j-1}}{\partial x^{j-1}} \Phi_n(t,x_i) \tag{7}$$

mit $m_0 = n+1,\ x_0 = a$

darstellen lassen. Die allgemeine Definition lautet:

DEFINITION: *Sei $\gamma : [a,b] \times X \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung mit $X \subset \mathbb{R}$, und $\gamma(t,x)$ sei nach x hinreichend oft differenzierbar. Dann ist*

$$V_N = \{F(a,.) \in C[a,b] : F(a,t) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij} \frac{\partial^{j-1}}{\partial x^{j-1}} \gamma(t,x_i); \tag{8}$$

$$mit \quad x_i \in X,\ \sum_{i=1}^{l} m_i = k \leq N\}$$

die Familie der γ-Polynome vom Grade N. Ferner heisst V_N eine Descartes'sche Familie, wenn Konstanten $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_{2N}$ existieren, so dass für alle geordneten Mengen

$$t_1 < t_2 < \ldots < t_{2N}, \qquad t_i \in [a,b],$$
$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{2N}, \qquad x_i \in X$$

die Relationen

$$\epsilon_p \cdot \left| \gamma(t_i, x_j) \right|_{i,j=1}^{p} > o \quad \text{für } p = 1,2 \ldots 2N \tag{9}$$

gelten. Dabei sind die Grössen in den Determinanten wie folgt zu interpretieren. Wenn für einen Block von x-Werten die Relationen $x_j = x_{j+1} = \ldots = x_{j+M}$ *gelten, sind für* $m = 1,2,\ldots,M$ *in der* $j+m$*-ten Spalte die Grössen* $\frac{\partial^m}{\partial x^m}\gamma(t_i, x_j)$ *zu lesen.*

Bemerkung: Die γ-Polynome in V_N bilden eine Descartes'sche Familie, wenn der Kern γ zeichen-regulär im erweiterten Sinne nach KARLIN [6] ist. Außerdem treten bei der Interpretation der Determinante (9) gerade die Ableitungen auf, die auch in (8) vorkommen.

Das Standardbeispiel für eine Descartes'sche Familie, das auch am weitesten untersucht wurde, ist die Familie der Exponentialsummen. Weitere Beispiele findet man in [1]. In den Descartes'schen Familien ist die beste Approximation eindeutig, wenn alle charakteristischen Zahlen x_i die Vielfachheit $m_i = 1$ haben. Dazu gibt es ein Alternantenkriterium, bei dem die notwendige und die hinreichende Bedingung ebenfalls übereinstimmen, wenn alle charakteristischen Zahlen einfach sind. Aber es gibt dort auch Resultate zu negativen Eigenschaften. Um die schwerfällige Angabe der allgemeinen Voraussetzungen zu vermeiden (ohne deshalb unpräzise zu werden), formulieren wir die Ergebnisse für die Exponentialapproximation:

SATZ 3: *Sei* $\gamma(t,x) = e^{tx}$ *mit* $X = \mathbb{R}$ *der Exponentialkern.*

(i) *Zu jedem f gibt es in* V_1 *genau eine beste Approximation.*

(ii) *Zu jedem f gibt es in* V_2 *höchstens zwei beste Approximationen. Es existiert höchstens eine lokal beste Approximation, die nicht globale Lösung ist.*

(iii) *Sei* $N \geq 2$. *Dann existiert ein* $f \in C[a,b]$ *mit mindestens zwei besten Approximationen in* V_N. *Ausserdem gibt es Funktionen* $f \in C[a,b]$, *die lokal beste Approximationen besitzen.*

(iv) *Wenn* $F \in V_k \subset V_N$ *die hinreichende Alternantenbedingung erfüllt, d.h. wenn zu* $f-F$ *eine Alternante der Länge* $N+k+1$ *gehört, dann ist F die einzige beste Approximation in* V_N.

Der Nachweis der negativen Resultate erfolgt über eine Untersuchung der topologischen Struktur. Man weist nach, daß für Descartes'sche Familien die Menge $V_N \setminus V_{N-1}$ in 2^N Zusammenhangskomponenten zerfällt und betrachtet bezüglich der Komponenten die besten Approximationen. Es ist aber noch offen, ob für $N \geq 3$ in einer Komponenten mehrere Lösungen liegen und ob für $N \geq 4$ die Zahl der besten Approximationen endlich ist.

5. MEHRDEUTIGKEITEN BEI DEN SPLINES

Im Hinblick auf die Splines fragen wir uns, was von den Resultaten für Descartes'sche Familien erhalten bleibt, wenn die Forderung (9) unter den gleichen Voraussetzungen abgeschwächt wird zu

$$\epsilon_p \cdot \left| \gamma(t_i, x_j) \right|_{i,j=1}^{p} \geq 0 , \qquad \text{für} \quad p = 1, 2, \ldots, 2N. \tag{10}$$

In der Bezeichnungsweise von KARLIN [6] bedeutet dies, daß der Kern γ nur zeichen-regulär aber nicht mehr zeichen-regulär im erweiterten Sinne ist. Wie man aus (3) erkennt, entspricht dies dem Übergang von der Haarschen zur schwachen Haarschen Bedingung. (Daß bei den Splines nach Gleichung (7) die charakteristische Zahl x_0 festgehalten wird, ist für die Strukturuntersuchungen unerheblich). Es zeigt sich, daß $S_{n,k} \setminus S_{n,k-1}$ in 2^k Zusammenhangskomponenten zerfällt. Außerdem läßt sich jeder zeichen-reguläre Kern beliebig gut durch solche approximieren, die zeichen-regulär im erweiterten Sinne sind. Damit erhält man analoge Ergebnisse für die Zusammenhangskomponenten.

SATZ 4:

(i) *Für jedes f ist die Menge der besten Approximationen in $S_{n,1}$ zusammenhängend.*

(ii) *Für jedes f zerfällt die Menge der (lokal) besten Approximationen in $S_{n,2}$ in höchstens zwei Komponenten.*

(iii) *Sei $k \geq 2$. Dann existiert ein $f \in C[a,b]$, dessen beste Approximation in $S_{n,k}$ in mindestens zwei Komponenten zerfällt. Ausserdem gibt es Funktionen $f \in C[a,b]$, die lokal beste Approximationen besitzen.*

Bemerkung. Es ist ein offenes Problem, ob die zu Satz 3 (iv) entsprechende Aussage richtig ist, daß die Menge der besten Approximationen wenigstens zusammenhängend ist, wenn das hinreichende Kriterium gemäß Satz 2 (ii) erfüllt ist.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com