

LECTURE NOTES IN MATHEMATICS

• Volume 477

OPTIMIZATION AND OPTIMAL CONTROL

Oberwolfach 1974

.L3
560

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

477

Optimization and Optimal Control

Proceedings of a Conference Held at
Oberwolfach, November 17–23, 1974

Edited by R. Bulirsch, W. Oettli, and J. Stoer



Springer-Verlag
Berlin · Heidelberg · New York 1975

Editors:

Prof. Roland Bulirsch
Mathematisches Institut der
Technischen Universität München
8 München
Postfach 202420
BRD

Prof. Werner Oettli
Fakultät für Mathematik
und Informatik
Universität Mannheim
68 Mannheim
Schloß
BRD

Professor Josef Stoer
Institut für Angewandte Mathematik
und Statistik der Universität Würzburg
87 Würzburg
Am Hubland
BRD

Library of Congress Cataloging in Publication Data

Main entry under title:

Optimization and optimal control.

(Lecture notes in mathematics ; 477)

Bibliography: p.

Includes index.

1. Mathematical optimization--Congresses. 2. Control theory--Congresses. I. Bulirsch, Roland.
II. Oettli, Werner. III. Stoer, Josef. IV. Series:
Lecture notes in mathematics (Berlin) ; 477.
QA3.L28 no. 477 [QA402.5] 510'.8s [629.8'312]
75-23372

AMS Subject Classifications (1970): 41A20, 49AXX, 49BXX, 49CXX,
49DXX, 90AXX, 90CXX

ISBN 3-540-07393-0 Springer-Verlag Berlin · Heidelberg · New York
ISBN 0-387-07393-0 Springer-Verlag New York · Heidelberg · Berlin

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically those of translation, reprinting, re-use of illustrations, broadcasting, reproduction by photocopying machine or similar means, and storage in data banks.

Under § 54 of the German Copyright Law where copies are made for other than private use, a fee is payable to the publisher, the amount of the fee to be determined by agreement with the publisher.

© by Springer-Verlag Berlin · Heidelberg 1975

Printed in Germany

Offsetdruck: Julius Beltz, Hemsbach/Bergstr.

TABLE OF CONTENTS

Rainer E. Burkard	
Kombinatorische Optimierung in Halbgruppen	1
Richard W. Cottle	
On Minkowski Matrices and the Linear Complementarity Problem	18
Hans Czap	
Exact Penalty-Functions in Infinite Optimization	27
P.C. Das	
Application of Dubovitskii-Milyutin Formalism to Optimal Settling Problem with Constraints	44
Peter Deufilhard	
A Relaxation Strategy for the Modified Newton Method	59
E.D. Dickmanns	
Optimale Steuerungen für Gleitflugbahnen maximaler Reichweite beim Eintritt in Planetenatmosphären	74
Ulrich Eckhardt	
On an Optimization Problem Related to Minimal Surfaces with Obstacles	95
Klaus Glashoff	
Optimal Control of One-Dimensional Linear Parabolic Differential Equations	102
Gene Golub	
Nonlinear Least Squares and Matrix Differentiation ⁺	
Sven-Åke Gustafson	
On the Numerical Treatment of a Multi-Dimensional Parabolic Boundary-Value Control Problem	121
Joachim Hartung	
Penalty-Methoden für Kontrollprobleme und Open-Loop- Differential-Spiele	127
Gerhard Heindl	
Ein Existenzsatz für konvexe Optimierungsprobleme	145
K.-H. Hoffmann, E. Jörn, E. Schäfer, H. Weber	
Ein Approximationssatz und seine Anwendung in der Kontrolltheorie	150

P. Huard	
Optimization Algorithms and Point-to-Set-Mapping ⁺	
Hansgeorg Jeggle	
Zur Störungstheorie nichtlinearer Variationsungleichungen	158
H.W. Knobloch	
On Optimal Control Problems with State Space Constraints	177
Michael Köhler	
Explicit Approximation of Optimal Control Processes	188
P.J. Laurent	
Un Algorithme Dual Pour le Calcul de la Distance Entre Deux Convexes	202
F.A. Lootsma	
The Design of a Nonlinear Optimization Programme for Solving Technological Problems	229
H. Maurer, U. Heidemann	
Optimale Steuerprozesse mit Zustandsbeschränkungen	244
Peter Spellucci	
Algorithms for Rational Discrete Least Squares Approximation	261
Norbert Weck	
Über das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit in der Kontrolltheorie	276
Jochem Zowe	
Der Sattelpunktsatz von Kuhn und Tucker in geordneten Vektorräumen	285

⁺ These papers, presented at the Conference, do not appear in this volume, and will be published elsewhere.

Kombinatorische Optimierung in Halbgruppen

Rainer E. Burkard, Köln ¹⁾

Abstract

By an algebraisation of the objective function is achieved that combinatorial optimization problems with different kinds of objective functions (e.g. sums or bottleneck objective functions) now occur as special cases of one general problem. The algebraisation respects not only the structure of the underlying problems but also the structure of algorithms for solving these problems. Therefore the generalized problems belong to the same complexity class as the original problems.

Combinatorial optimization problems, which can be formulated without real variables (e.g. assignment problems), can be considered now in totally ordered semigroups, where $(S, *, \leq)$ obeys additionally a strong compatibility axiom and a divisibility axiom. For problems with real variables some additional compatibility axioms between the domain Ω of the variables and the semigroup S have to be fulfilled.

After the investigation of the structure of the systems $(S, *, \leq)$ and $(S, *, \leq; \Omega)$ general assignment problems and maximal flow problems in networks with generalized costs are considered and algorithms are given for solving these problems.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird durch eine Algebraisierung der Zielfunktion erreicht, daß kombinatorische Optimierungsaufgaben mit verschiedenen Arten von Zielfunktionen (z.B. Summen- und Bottleneckzielfunktionen) nun als Spezialfälle eines verallgemeinerten Problems auftreten. Die Algebraisierung nimmt dabei nicht nur Rücksicht auf die Struktur der Probleme, sondern auch auf die Art der zugehörigen Lösungsverfahren. Dadurch wird erreicht, daß Algorithmen zur Lösung der allgemeinen Probleme angegeben werden können, die im wesentlichen denselben

1) Mathematisches Institut der Universität zu Köln,
D - 5 Köln 41, Weyertal 86 - 90

Aufwand haben wie Algorithmen für das zugehörige Standardproblem.

Variablenfrei formulierbare Probleme, wie etwa Zuordnungsprobleme, lassen sich in einer angeordneten Halbgruppe $(S, *, \leq)$ formulieren und lösen. Dabei muß $(S, *, \leq)$ zusätzlich ein starkes Verträglichkeitsaxiom und ein Teilbarkeitsaxiom erfüllen. Bei Optimierungsproblemen, in denen reelle Variable auftreten, wie etwa Transportprobleme, müssen für die äußere Verknüpfung zwischen dem Variablenbereich Ω und der Halbgruppe S zusätzliche Verträglichkeitsaxiome erfüllt sein. Nach einer Untersuchung der Struktur der Systeme $(S, *, \leq)$ und $(S, *, \leq; \Omega)$ werden als Beispiele verallgemeinerte Zuordnungsprobleme und maximale Flußprobleme in Netzwerken mit verallgemeinerten Kosten betrachtet und Lösungsmöglichkeiten für diese Probleme aufgezeigt.

1. Einleitung.

In der Praxis treten oft kombinatorische Optimierungsprobleme auf, die sich nur in der Form der Zielfunktion unterscheiden. Werden etwa Anzahlen minimiert, so sind es meist Summenprobleme, wie etwa das lineare Summenzuordnungsproblem:

"Finde eine Permutation φ von $N = \{1, 2, \dots, n\}$, so daß

$$\sum_{i \in N} c_{i\varphi(i)} \text{ minimal wird.}"$$

Handelt es sich hingegen um die Minimierung von Zeitfaktoren, so nimmt die Zielfunktion zum Beispiel Bottleneck Gestalt an. So läßt sich etwa ein lineares Bottleneckzuordnungsproblem folgenderweise formulieren:

"Finde eine Permutation φ von N , so daß $\max_{i \in N} c_{i\varphi(i)}$

minimal wird."

In der Literatur wurden bisher diese Probleme gesondert behandelt. Bei der Lösung quadratischer Zuordnungsprobleme

"Finde eine Permutation φ von N , die $\sum_{i \in N} \sum_{p \in N} d_{i\varphi(i)p\varphi(p)}$

minimiert"

fiel mir nun auf [1], daß sich ein Algorithmus zur Lösung des quadratischen Bottleneckproblems

$$\min_{\varphi} \max_{i \in N} \max_{p \in N} d_{i\varphi(i)p\varphi(p)}$$

direkt aus dem Algorithmus für quadratische Zuordnungsprobleme gewinnen läßt, wenn man jeweils die Operation "+" durch "max" ersetzt. Es zeigt sich nun generell, daß für kombinatorische Optimierungsprobleme die Struktur der Zielfunktion von jener der Restriktion weitgehend unabhängig ist und daß sich die Zielfunktion oftmals in einfacher Weise algebraisch beschreiben läßt.

In der kombinatorischen Optimierung hat man es mit zwei Problemtypen zu tun. Einerseits handelt es sich um Probleme, die variablenfrei geschrieben werden können (z.B. Zuordnungsprobleme, Rundreiseproblem,...) und andererseits sind es Probleme, in deren Zielfunktion reelle Variable explizit auftreten (z.B. Transportprobleme, maximale Flüsse mit minimalen Kosten, Rucksackprobleme,...). Demnach muß man bei einer Algebraisierung der Zielfunktion zwei Fälle unterscheiden. Bei variablenfrei formulierbaren Problemen mit Summenzielfunktion wird das "+" durch eine innere Verknüpfung in einer geordneten Menge $(S, \leq)$ ersetzt. Bei Problemen, in denen reelle Variable explizit auftreten, tritt eine äußere Verknüpfung zwischen dem Variablenbereich Ω und der Halbgruppe S hinzu. In Abschnitt 2 wird zunächst die Struktur von $(S, *, \leq)$ bzw. $(S, *, \leq; \Omega)$ näher untersucht. Die Axiome für die Systeme $(S, *, \leq)$ und $(S, *, \leq; \Omega)$ orientieren sich nicht nur an der Lösbarkeit der in ihnen formulierten allgemeinen Probleme, sondern insbesondere auch daran, daß die üblichen Lösungsverfahren für Standardprobleme übertragen werden können zur Lösung der verallgemeinerten Probleme, die in $(S, *, \leq)$ und $(S, *, \leq; \Omega)$ formuliert sind. Dies ist ein wesentlicher Gesichtspunkt für kombinatorische Optimierungsaufgaben, die oftmals durch vollständige Enumeration auf triviale Weise lösbar sind. Die angegebenen Systeme garantieren, daß beim Übergang von Standardproblemen zu allgemeinen Problemen sich nicht viel am Rechenaufwand ändert. Präziser formuliert heißt dies: Sind die inneren und äußeren Verknüpfungen sowie die Reduktionen (vgl. Axiom IV, Abschnitt 2) in polynomial beschränkter Zeit auf einer deterministischen Turingmaschine ausführbar, so ist die Verallgemeinerung eines Problems der Komplexitätsklasse P wieder ein Problem der Komplexitätsklasse P (vgl. Karp [7]). Die Algebraisierungen anderer Autoren (z.B. Carré [4], Gondran [6], Roy [8]) sind darauf ausgerichtet, die algebraische Struktur der Restriktionen und Zielfunktion zu klären und zu axiomatisieren. Die vorliegende Arbeit möchte jedoch durch Berücksichtigung der Lösungsverfahren nicht nur einen Einblick in die Struktur der Probleme geben, sondern auch das Aufstellen von Lösungsverfahren für ganze Klassen von Problemen er-

Es wird sich zeigen, daß lediglich vier Axiome für $(S, *, \leq)$ bzw. einige weitere Verträglichkeitsaxiome für $(S, *, \leq; \Omega)$ genügen, um die üblichen Lösungsverfahren zu Lösungsverfahren für Probleme in $(S, *, \leq)$ bzw. $(S, *, \leq; \Omega)$ zu erweitern. Die entstehenden Strukturen sind so allgemein, daß eine Vielzahl von interessanten und für die Praxis relevanten Problemen dadurch erfaßt wird, wie etwa als Verknüpfungen Addition, Multiplikation, Maximumbildung, als Koeffizienten Zahlen, Vektoren und Elemente angeordneter Gruppen sowie als Ordnungen etwa $\geq$, $\leq$ und die lexicographische Ordnung. Für manche dieser Probleme läßt sich eine Transformation auf Summenprobleme in den reellen Zahlen angeben. Daß es oft nicht sinnvoll ist, derartige Transformationen durchzuführen, zeigt sich etwa an Bottleneckproblemen. So können zum Beispiel lineare Bottleneck-Zuordnungsprobleme in einem Bruchteil der Rechenzeit von Summen-Zuordnungsproblemen gelöst werden [2]. Dieser Effekt, der ganz allgemein bei Bottleneckproblemen auftritt, findet in der nachfolgend entwickelten Theorie eine natürliche Erklärung.

2. Die Systeme $(S, *, \leq)$ und $(S, *, \leq; \Omega)$

Im Zusammenhang mit einer algebraischen Behandlung von Zuordnungsproblemen wurde das System $(S, *, \leq)$ von Burkard, Hahn und Zimmermann [3] näher untersucht. Es zeigte sich, daß folgende Forderungen an die nicht-leere Menge S mit der inneren Verknüpfung $*$ und einer Ordnungsrelation $\leq$ zu stellen sind:

- (I) S ist totalgeordnet bezüglich " $\leq$ "
- (II) $(S, *)$ ist kommutative Halbgruppe
- (III) Für alle $a, b, c \in S$ mit $a \leq b$ gelte $a * c \leq b * c$
- (IV) Für alle $a, b \in S$ mit $a \leq b$ existiere ein $c \in S$ mit $a * c = b$

Beispiele für Systeme $(S, *, \leq)$, die das Axiomensystem erfüllen, sind etwa

- a) $(S, *, \leq)$ mit $S = \mathbb{R}, \mathbb{R}^+, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^+, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ und $*$ = "+" oder "max"
- b) $(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}, \cdot, \leq)$
- c) $(\mathbb{R}, +, \geq)$
- d) Angeordnete Gruppen, die Axiom (III) erfüllen
- e) Ein lexicographisches Produkt $(G, *, \leq)$ mit $G = \prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, $*$ = $(*_\lambda)$

und der lexicographischen Ordnung $\leq$ erfüllt genau dann (I)-(IV), wenn jedes $(G_\lambda, *_\lambda, \leq_\lambda)$ eine angeordnete Gruppe ist, die Axiom (III) erfüllt. (vgl. [3]).

Für das Folgende sei angenommen, daß $(S, *, \leq)$ stets die Axiome (I)-(IV) erfülle.

Axiom (III) garantiert, daß die innere Verknüpfung und die Ordnungsrelation kompatibel sind. Dies ist wichtig für Algorithmen, die wechselseitige Verknüpfungen und Vergleiche bezüglich " $\leq$ " durchführen. Aufgrund von Axiom (III) gilt:

Satz 1: Sei $B \subseteq S$ und B besitze ein kleinstes Element b_0 . Dann gilt

$$\min_{b \in B} (a * b) = a * \min_{b \in B} b$$

Beweis: Da für alle $b \in B$ stets $b_0 \leq b$ gilt, folgt aus (III)

$$a * b_0 \leq a * b.$$

Axiom (IV) ermöglicht eine abgeschwächte Form von Subtraktionen: Häufig werden in den Algorithmen Reduktionsschritte durchgeführt, d.h. ist $a \leq b$ und $a * c = b$, so kann das größere Element b durch c ersetzt werden, während die Zielfunktion mit dem Element a transformiert wird.

Aufgrund von Axiom (IV) gibt es zu jedem $a \in S$ ein a_0 mit $a * a_0 = a$.

Definition 1. Ein Element $a_0 \in S$ heißt von a dominiert, wenn

$$a * a_0 = a \text{ gilt. dom } a \text{ ist die Menge der von } a \text{ dominierten Elemente.}$$

Ist $(S, *)$ eine Gruppe, so enthält $\text{dom } a$ nur das neutrale Element der Gruppe. Für die Verknüpfung "max" ist jedoch $\text{dom } a = \{a_0 \mid a_0 \leq a\}$. Die Mengen $\text{dom } a$ besitzen folgende leicht nachweisbaren Eigenschaften. Es sei $a, b \in S$. Dann gilt:

$$(2.1) \text{ dom } a \subseteq \text{dom } (a * b)$$

$$(2.2) a \leq b \Rightarrow \text{dom } a \subseteq \text{dom } b$$

$$(2.3) \text{ Es sei } \bar{S} \text{ eine nach unten beschränkte Teilmenge von } S. \text{ Dann gilt}$$

$$\bigcap_{a \in \bar{S}} \text{dom } a \neq \emptyset$$

Die Menge $\text{dom } a$ ermöglicht es, positive Elemente relativ zu a zu erklären.

Definition 2. Sei $a, b \in S$. a heißt b -positiv [b -negativ], wenn ein $b_0 \in \text{dom } b$ existiert mit $b_0 \leq a$ [$b_0 \geq a$]. $\text{pos } b$ [$\text{neg } b$] ist die Menge der bezüglich b positiven [negativen] Elemente.

Es läßt sich nun unschwer zeigen:

$$(2.4) \quad a \in \text{pos } b \Leftrightarrow b \leq b * a$$

$$a \in \text{neg } b \Leftrightarrow b \geq b * a$$

$$(2.5) \quad \text{dom } b = \text{neg } b \cap \text{pos } b$$

(2.6) Die Mengen $(\text{neg } b \setminus \text{dom } b)$, $\text{dom } b$ und $(\text{pos } b \setminus \text{dom } b)$ bilden eine Partition von S .

Definieren wir für Teilmengen $A, B \subseteq S$ eine Ordnung $A \leq B$ durch

$$\bigwedge_{a \in A} \bigwedge_{b \in B} a \leq b, \text{ so gilt:}$$

$$(2.7) \quad (\text{neg } b \setminus \text{dom } b) < \text{dom } b < (\text{pos } b \setminus \text{dom } b)$$

(2.8) Für alle $b \in S$ gilt:

$$\text{pos } a \subseteq \text{pos } (a * b), \text{ neg } a \subseteq \text{neg } (a * b)$$

aber:

$$\text{pos } (a * b) \setminus \text{dom } (a * c) \subseteq \text{pos } a \setminus \text{dom } a$$

$$\text{neg } (a * b) \setminus \text{dom } (a * b) \subseteq \text{neg } a \setminus \text{dom } a$$

Ferner gilt:

Satz 2. Sei $a \in S$. Dann erfüllen die Systeme $(\text{dom } a, *, \leq)$ und $(\text{pos } a, *, \leq)$ die Axiome (I)-(IV).

Ein Beweis dieses Satzes mit Hilfe von Fallunterscheidungen findet sich ebenfalls in [3]. Man beachte, daß eine analoge Aussage für das System $(\text{neg } a, *, \leq)$ nicht gilt infolge der Unsymmetrie bei Axiom (III) und (IV).

Bei Problemen, die mit Hilfe reeller Variablen formuliert werden, tritt nun noch ein Variablenbereich Ω hinzu. Im Falle eines Systems $(S, *, \leq; \Omega)$ wollen wir stets voraussetzen, daß $(S, *)$ ein neutrales Element besitzt. Es gelte nun

$$(V) \quad 0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^+ \text{ und } (\Omega, +), (\Omega, \cdot) \text{ abgeschlossen}$$

Im allgemeinen muß Ω noch weitere Bedingungen erfüllen, z.B. Axiom (III) bezüglich der Addition. Da diese aber von der Struktur des Problems bzw. der Restriktionen und nicht von der Zielfunktion abhängen, soll hier nicht darauf eingegangen werden. Die äußere Verknüpfung $\square$ zwischen Ω und S muß jedoch folgende Verträglichkeitsaxiome erfüllen:

$$(VI) \quad \text{Für alle } \omega_1, \omega_2 \in \Omega \text{ und } a \in S \text{ gilt } \omega_1 \square (\omega_2 \square a) = (\omega_1 \cdot \omega_2) \square a$$

(VII) Für alle $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ und $a, b \in S$ gilt:

$$\omega_1 \square (a * b) = (\omega_1 \square a) * (\omega_1 \square b)$$

$$(\omega_1 + \omega_2) \square a = (\omega_1 \square a) * (\omega_2 \square a)$$

(VIII) Für alle $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ und $a, b \in S$ gilt:

$$\omega_1 \leq \omega_2 \Rightarrow \omega_1 \square a \leq \omega_2 \square a$$

$$a \leq b \Rightarrow \omega_1 \square a \leq \omega_1 \square b$$

(IX) Für alle $a \in S$ gilt

$$0 \square a = e$$

Beispiele für Systeme $(S, *, \leq; \Omega)$ sind etwa

a) $(S, +, \leq; \Omega)$ mit $\omega \square a = \omega \cdot a$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}_m^+$

b) $(S, \cdot, \leq; \Omega)$ mit $\omega \square a = a^\omega$, $S \subseteq \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^+$

c) $(S, \max, \leq; \Omega)$ mit $S \subseteq \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^+$ und

$$\omega \square a = \begin{cases} a, & \text{falls } \omega > 0 \\ e, & \text{falls } \omega = 0 \end{cases}$$

In $(S, *, \leq; \Omega)$ läßt sich ein Paar von zueinander dualen Optimierungsaufgaben formulieren. Es sei $c \in S^n$, $A \in M_{mn}(\Omega)$, $b \in \Omega^m$. Die Optimierungsaufgabe

$$(2.9) \quad \min_{x \in \Omega^n} \left\{ \sum_{j \in N} x_j \square c_j \mid Ax = b \right\}$$

sei das primale Problem. Als dazu duale Aufgabe setzen wir

$$(2.10) \quad \max_{y \in S^m} \left\{ \sum_{i=1}^m b_i \square y_i \mid \sum_{i=1}^m (a_{ji} \square y_i) \leq c_j, 1 \leq j \leq n \right\}$$

Während beim primalen Problem nichtnegative reelle Zahlen x_j gesucht werden, sind die Variablen des dualen Problems Elemente der Halbgruppe S . Es gilt

Satz 3 (Schwacher Dualitätssatz)

Ist $x \in \Omega^n$ eine Lösung von (2.9) und $y \in S^m$ eine Lösung von (2.10), dann gilt

$$\bigstar_{1 \leq j \leq n} x_j \circ c_j \geq \bigstar_{1 \leq i \leq m} b_i \circ y_i$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \bigstar_{1 \leq i \leq m} b_i \circ y_i &= \bigstar_{1 \leq i \leq m} \left(\sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} x_j \right) \circ y_i = \\ &= \bigstar_{1 \leq i \leq m} \bigstar_{1 \leq j \leq n} (a_{ij} x_j) \circ y_i = \bigstar_{1 \leq j \leq n} x_j \circ \left(\bigstar_{1 \leq i \leq m} a_{ij} \circ y_i \right) \leq \\ &\leq \bigstar_{1 \leq j \leq n} x_j \circ c_j \end{aligned} \quad \text{Q.E.D.}$$

Unter welchen Voraussetzungen sich ein dem starken Dualitätssatz analoges Resultat beweisen läßt, ist bis jetzt nicht bekannt.

3. Verallgemeinerte Zuordnungsprobleme

Verallgemeinerte Zuordnungsprobleme wurden erstmals von Burkard, Hahn und Zimmermann [3] untersucht. Dort wurde auch ein Lösungsverfahren für sie angegeben.

Gegeben sei ein System $(S, *, \leq)$, das die Axiome (I)-(IV) erfüllt. Ferner sei $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Ein verallgemeinertes lineares Zuordnungsproblem läßt sich folgenderweise formulieren:

Seien $c_{ij} \in S$ ($i, j \in N$). Gesucht wird eine Permutation ϕ von N , die $\bigstar_{i \in N} c_{i\phi(i)}$ minimiert.

Verallgemeinerte Zuordnungsprobleme können durch sukzessive Transformationen gelöst werden.

Definition 3: Eine Transformation von $C = (c_{ij})$ auf $\bar{C} = (\bar{c}_{ij})$ heißt zulässig, wenn es eine Konstante $a \in S$ gibt, so daß für jede Permutation ϕ von N gilt:

$$\bigstar_{i \in N} c_{i\phi(i)} = a * \bigstar_{i \in N} \bar{c}_{i\phi(i)}$$

a heißt der Index der Transformation.

Für das System $(R, +, \leq)$ sind Matrizentransformationen, wie sie etwa bei der Ungarischen Methode durchgeführt werden, zulässige Transformationen. Wir zeigen, daß hier ein ähnliches Resultat gilt

Satz 4 Es sei $C \in M_{nn}(S)$ und $I \subseteq N$, $J \subseteq N$ mit $|I| > |J|$

Ferner sei

$$\alpha = \min \{c_{ij} \mid i \in I, j \in J\}$$

Dann ist die Transformation $C \rightsquigarrow \bar{C}$, wobei die Koeffizienten $\bar{c}_{ij}$ definiert sind durch

$$\begin{aligned} \alpha * \bar{c}_{ij} &= c_{ij} & (i \in I, j \notin J) \\ (3.1) \quad \bar{c}_{ij} &= c_{ij} & (i \in I, j \in J \text{ und } i \notin I, j \notin J) \\ \bar{c}_{ij} &= \alpha * c_{ij} & (i \notin I, j \in J) \end{aligned}$$

eine zulässige Transformation mit dem Index $\alpha^{|I|-|J|}$

Bemerkung: Ist $I = \{i\}$, $J = \emptyset$, so handelt es sich um eine Reduktion der Zeile i ; ist $I = N$, $J = N \setminus \{j\}$, so ist (3.1) eine Reduktion der Spalte j .

Beweis: Es sei φ eine beliebige Permutation von N . Wir bezeichnen mit $n_0(\varphi)$ die Anzahl der Paare $(i, \varphi(i))$ mit $i \in I$, $\varphi(i) \notin J$, mit $n_1(\varphi)$ die Anzahl der Paare $(i, \varphi(i))$ mit $i \in I$, $\varphi(i) \in J$ und $i \notin I$, $\varphi(i) \notin J$ sowie mit $n_2(\varphi)$ die Anzahl jener $(i, \varphi(i))$ mit $i \notin I$, $\varphi(i) \in J$. Dann gilt

$$(3.2) \quad n_0(\varphi) = m + n_2(\varphi) \quad \text{mit } m = |I| - |J|$$

Nun ist

$$\begin{aligned} (3.3) \quad \prod_{i \in N} c_{i\varphi(i)} &= \prod_{i \in I} c_{i\varphi(i)} * \prod_{i \notin I} c_{i\varphi(i)} = \\ &= \alpha^{n_0} * \prod_{i \in I} \bar{c}_{i\varphi(i)} * \prod_{i \notin I} c_{i\varphi(i)} \end{aligned}$$

Infolge (3.2) gilt

$$\alpha^{n_0} = \alpha^m * \alpha^{n_2}$$

und aus (3.1) folgt

$$\alpha^{n_2} * \bigstar_{i \in I} c_{i\varphi(i)} = \bigstar_{i \in I} \overline{c_{i\varphi(i)}}$$

daher folgt aus (3.3) die Behauptung des Satzes.

Q.E.D.

Es ist möglich, ein Lösungsverfahren für verallgemeinerte lineare Zuordnungsprobleme anzugeben, das nach höchstens $\frac{1}{2}(n^2+3n-2)$ Transformationen der Form (3.1) die Optimallösung ergibt [3]. Jede Transformation der Gestalt (3.1) erhöht den Wert der Zielfunktion um α^m mit $m = |I| - |J|$. Dadurch wird bei Bottleneckproblemen bei jeder derartigen Transformation die Anzahl der vom Zielfunktionswert z dominierten Elemente größer, während etwa bei Summenproblemen nur die Nullelemente vom Zielfunktionswert dominiert werden. Da das Verfahren dann abbricht, wenn n voneinander unabhängige Elemente gefunden sind, die vom Zielfunktionswert dominiert werden, erhält man bei Bottleneckproblemen wesentlich schneller die Optimallösung als bei Summenproblemen.

Verallgemeinerte quadratische Zuordnungsprobleme sind Probleme der Gestalt

$$(3.4) \quad \min_{\varphi} \bigstar_{i \in N} \bigstar_{p \in N} d_{i\varphi(i)p\varphi(p)}$$

Allgemeine quadratische Zuordnungsprobleme lassen sich durch eine verallgemeinerte Störungsmethode [1] lösen.

4. Flußprobleme mit minimalen Kosten

Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$, in dem zwei voneinander verschiedene Knoten ausgezeichnet werden: die Quelle q und die Senke s . Die Abbildung $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vermittele eine Bewertung der Knoten des Graphen. Wir bezeichnen mit $V(x) = \{y \mid (y, x) \in E\}$ die Vorgängerknoten des Knotens $x \in V$ und mit $N(x) = \{y \mid (x, y) \in E\}$ die Nachfolgerknoten von x . Ein Fluß mit dem Wert v von q nach s ist eine Abbildung $f : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit folgenden Eigenschaften

$$\sum_{y \in N(x)} f(x,y) - \sum_{y \in V(x)} f(y,x) = \begin{cases} v & x=q \\ 0 & x \neq q, \quad x \neq s \\ -v & x=s \end{cases}$$

$$\bigwedge_{(x,y) \in E} f(x,y) \leq c(x,y)$$

Zur Bestimmung eines maximalen Flusses von q nach s steht zum Beispiel der Markierungsalgorithmus von Ford und Fulkerson [5] zur Verfügung. Es sei nun eine weitere Abbildung $a : E \rightarrow S$ gegeben. Wir nennen $a(x,y)$ die Kosten für eine Flusseinheit in der Kante (x,y) . Ein Flußproblem mit minimalen verallgemeinerten Kosten läßt sich nun so formulieren:

Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V,E)$ mit Quelle q , Senke s und Bewertung c . Ferner sei $(S,*,\leq;\Omega)$ eine Halbgruppe, die die Axiome (I)-(IX) erfüllt und $a : E \rightarrow S$ sei eine Abbildung, die jeder Kante "Kosten" $a(x,y)$ zuordnet. Gesucht ist ein maximaler Fluß von q nach s , für den

$$\bigstar_{(x,y) \in E} f(x,y) \square a(x,y)$$

minimal wird.

Ist $(S,*,\leq;\Omega)$ das System $(\mathbb{R},+,\leq;\mathbb{R}^+)$ und $\square$ die Multiplikation, so erhält man ein maximales Flußproblem mit minimalen Kosten im herkömmlichen Sinne. Ein Algorithmus zur Lösung dieses Problems findet sich ebenfalls in [5].

Die Idee des nachfolgenden Verfahrens zur Lösung des maximalen Flußproblems mit minimalen allgemeinen Kosten besteht im folgenden:

Es seien $f_1, f_2, \dots, f_k$ Teilflüsse, deren Summe einen maximalen Fluß ergibt. Nach Axiom (VII) gilt

$$\bigstar_{(x,y) \in E} \left(\sum_{1 \leq i \leq k} f_i(x,y) \right) \square a(x,y) = \bigstar_{1 \leq i \leq k} \left(\bigstar_{(x,y) \in E} f_i(x,y) \square a(x,y) \right)$$

Zur Bestimmung eines maximalen Flusses mit minimalen Kosten werden zunächst die Kapazitätsrestriktionen außer acht gelassen und es wird ein Fluß von q nach s mit dem Wert 1 konstruiert, der minimale Kosten z_1 hat. Jene Kanten, in denen der Fluß mit den Kosten z_1 fließen kann,

definieren einen Teilgraphen G_1 von G . In diesem Teilgraphen bestimmt man nun unter Berücksichtigung der gegebenen Kapazitäten einen maximalen Fluß f_1 . Dieser besitzt die Kosten $v_1 \sqcap z_1$. Der maximale Fluß f_1 liefert einen minimalen Schnitt $(X, \bar{X})$ mit

$$X \cap \bar{X} = \emptyset, \quad q \in X, \quad s \in \bar{X}, \quad X \cup \bar{X} = V$$

Man streicht in G die Kanten (x, y) mit $(x, y) \in G_1$, $x \in X$, $y \in \bar{X}$ sowie $x \in \bar{X}$, $y \in X$ und sucht im restlichen Teilgraphen erneut - ohne Berücksichtigung der Kapazitäten - einen Fluß der Größe 1 mit minimalen Kosten z_2 . Im zugehörigen Teilgraphen G_2 bestimmt man nun einen maximalen Fluß f_2 mit den Kosten $v_2 \sqcap z_2$. Aufgrund der Verträglichkeitsaxiome (VIII) gilt:

$f_1 + f_2$ ist unter den Flüssen mit dem Wert $v_1 + v_2$ minimal.

Beweis: Würde es einen Fluß f der Größe $v_1 + v_2$ geben, der kleinere Kosten ergäbe, so wäre

$$(4.1) \quad (v_1 \sqcap z_1) * (v_2 \sqcap z_2) > (v_1 + v_2) \sqcap z$$

Wegen der Wahl von z_1 wäre $z > z_1$ und wegen der Wahl von z_2 wäre auch $z > z_2$. Daraus folgt nach Axiom (VIII)

$$(v_1 \sqcap z) * (v_2 \sqcap z) \geq (v_1 \sqcap z_1) * (v_2 \sqcap z_2)$$

im Widerspruch zu (4.1).

Q.E.D.

Somit läßt sich der maximale Fluß von q nach s mit minimalen allgemeinen Kosten in der oben beschriebenen Weise aufbauen.

Einheitsflüsse mit minimalen Kosten lassen sich einfach bestimmen, wenn man den Knoten von G sogenannte "Knotenzahlen" $\pi(x) \in S$ zuordnet. Anfangs wählt man für alle $x \in V$:

$$\pi(x) \in \bigcap_{(x,y) \in E} \text{dom } a(x,y)$$

und erklärt alle Kanten für zulässig, für die

$$\pi(x) * a(x,y) = \pi(y)$$