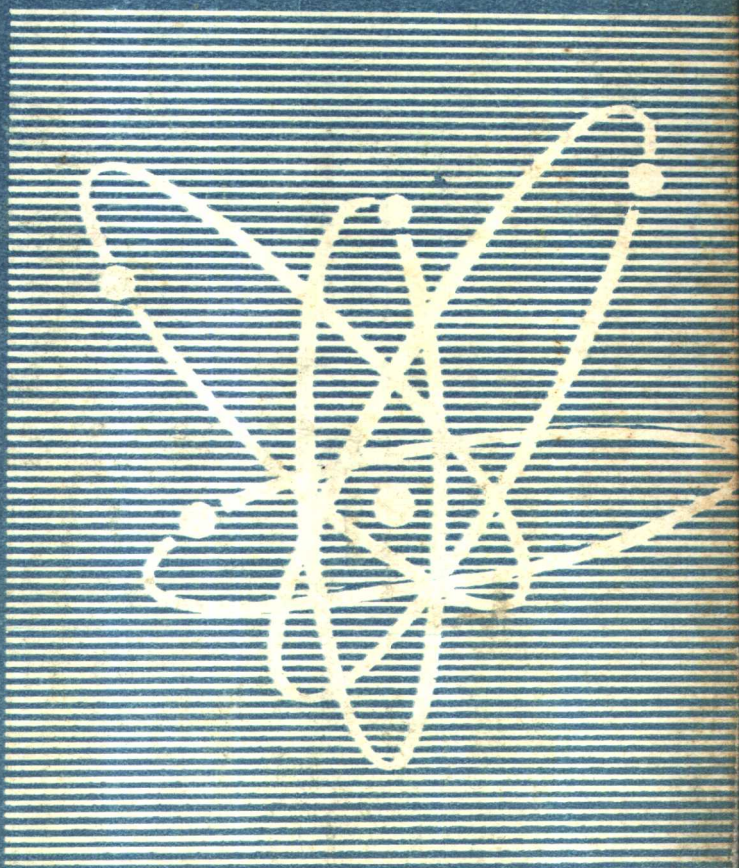


Г.С.Саакян
Э.В.Чубарян

Квантовая механика



ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Г. С. СААКЯН, Э. В. ЧУБАРЯН

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

*Второе переработанное
и дополненное издание*

Допущено Министерством высшего и среднего
специального образования Армянской ССР
в качестве учебного пособия для студентов
физико-математических специальностей вузов

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЕРЕВАНСКОГО

ЕРЕВАН—1982

ББК22.314

С12

Редактор: канд. физ.-мат. наук Р. М. АВАКЯН
Рецензент: докт. физ.-мат. наук С. Г. МАТИНЯН

Саакян, Г. С., Чубарян, Э. В.

**С12 Квантовая механика/Ред. Р. М. Авакян. Ер.: Изд-во
Ереван. ун-та, 1982.—688 с.**

Учебное пособие посвящено систематическому изложению курса квантовой механики в соответствии с новой программой. Учитывается научно-педагогический опыт лучших отечественных и зарубежных курсов по квантовой механике. Работа содержит новую важную главу «Интегралы по траекториям», которой нет в подобных учебниках.

Рассчитано на студентов физических и радиофизических факультетов вузов.

С $\frac{1704020000-02}{704(02)-82} 18-81$

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый курс квантовой механики—результат обработки лекций авторов, прочитанных ими в Ереванском государственном университете для студентов физических специальностей.

В послевоенный период появилось много прекрасных учебников и учебных пособий по этому разделу теоретической физики, среди которых по глубине содержания и объему охватываемого материала особо выделяется «Квантовая механика» Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица. Разумеется, в сложившейся ситуации не исключена необходимость написания новых учебников в наше время и в будущем. Эта потребность неизбежно возникает по мере развития теоретической физики и постоянного усовершенствования процесса преподавания в вузах. При составлении нашего курса мы широко использовали имеющийся богатый опыт в этой области. В отличие от других учебников мы сочли нужным изложить по возможности фундаментальные вопросы квантовой механики раньше конкретных проблем атомной физики. В частности, основы релятивистской квантовой теории электрона предшествуют проблеме атома водорода, что позволило наиболее полно осветить данный вопрос.

Предпоследняя глава книги посвящена интегралам по траекториям, дающим новый и интересный подход в интерпретации движения частиц и изменения состояния микромира. Аппарат интегралов по траекториям является мощным средством исследования в теоретической физике, нашедшим свое применение в физике элементарных частиц и теории гравитации.

Предлагаемое учебное пособие по сути дела одновременно является и задачником. Многочисленные задачи, приведенные в конце каждой главы, составлены так, чтобы углубить и дополнить усвоение материала, благодаря чему удалось заметно сократить объем книги не в ущерб научно-педагогического уровня.

Наконец, мы сочли нужным в конце поместить дополнительную главу, посвященную истории развития физики микромира и создания квантовой механики. Она завершается краткими биографическими сведениями об ученых, внесших фундаментальный вклад в создание квантовой теории.

Мы надеемся, что эта глава сыграет немаловажную роль в деле возбуждения интереса студентов к квантовой механике и теоретической физике вообще.

Выражаем нашу глубокую благодарность профессору С. Г. Матиняну сделавшему ряд ценных замечаний, В. М. Тер-Антоняну и Г. К. Аветисяну за помощь, оказанную при написании §§ 118, 119, 127—129, нашим коллегам по кафедре теоретической физики Р. М. Авакяну, Г. Г. Арутюнян, А. В. Саркисяну, Р. Г. Петросяну за всестороннюю и постоянную помощь, и Г. К. Савидди, проделавшему значительную работу по главе XII.

Авторы

ПОНЯТИЕ О ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ

Введение

К концу XIX столетия в физике (ныне называемой классической), считавшейся в то время логически непротиворечивой, стали выявляться трудности принципиального характера. Был открыт ряд явлений, не укладывающихся в рамки сложившихся представлений.

Первые серьезные трудности в самом начале нашего столетия возникли в области теории излучения, а именно, в проблеме черного излучения и фотоэлектрического эффекта. Дело не ограничилось этим. После экспериментального изучения структуры атома возник ряд сложных, неподдающихся объяснению проблем. Из опытов Резерфорда следовало, что атом состоит из массивного ядра сравнительно ничтожных размеров и вращающихся вокруг него электронов. Такая система неустойчива, так как согласно классической электродинамике, ускоренно движущийся заряд (электрон), непрерывно излучая электромагнитные волны, в конце концов должен упасть на ядро. Парадоксальным был также факт дискретного характера энергии электрона в атоме, установленный в экспериментах Франка и Герца.

Не менее разительным было открытие волновых свойств микрочастиц. Оказалось, что при прохождении параллельного пучка моноэнергетических частиц через поли- или монокристаллы получается точно такая же дифракционная картина, которая до этого наблюдалась для рентгеновских лучей. Из этого факта следовало, что для микрочастиц перестает быть верным характерное для макрочастиц движение по траекториям. В самом деле, дифракционная картина присуща только волнам, при движении частиц по строго определенным траекториям она не возникает.

Итак, неправомотность классической теории для описания явлений микромира стала очевидна. Возникла необходимость коренного пересмотра некоторых фундаментальных основ классической физики и создания новой теории. Она складывалась в период 1925—1930 годов в результате плодотворного труда ряда выдающихся физиков (см. приложение).

Различие между закономерностями макроскопического и микроскопического миров естественно, его можно было ожи-

дать с логической точки зрения. Макроскопические тела состоят из очень большого числа находящихся в сложном взаимодействии друг с другом микроскопических частиц, причем поля внутри атомов и молекул быстро изменяются от точки к точке. Именно этим обстоятельством можно объяснить те качественные отличия, которые наблюдаются в характере явлений макроскопических и микроскопических объектов.

Раздел физики, занимающийся изучением закономерностей микромира, называется квантовой механикой. Квантовая механика не отрицает классическую. Напротив, будучи более общей теорией, она в качестве предельного случая содержит в себе последнюю. Дело в том, что один и тот же объект (скажем электрон) при соответствующих условиях может вести себя как чисто квантовый или как классический объект. При изменении определенных характеристик (например, при возрастании энергии электрона) объект постепенно теряет квантовые и приобретает классические свойства. Поэтому, новая теория имеет возможность указать пределы применимости старой. Классическая физика перестает быть верной именно вне этих пределов.

Таким образом, между обеими этими областями физики имеется взаимная согласованность и соответствие, что и является одним из важных критериев справедливости квантовой механики.

§ 1. Понятие состояния в классической механике

Опыт показывает, что закономерности, наблюдаемые в макроскопических и микроскопических системах, отличаются друг от друга. Как уже отмечалось, это обусловлено именно большими количественными и качественными различиями между ними. Для правильного понимания основ квантовой механики очень важным является признание факта, что эти отличия находят свое отражение и в самом понятии состояния системы.

Состояние системы определяется совокупностью определенного числа независимых и совместимых величин, знание которых позволяет получить исчерпывающий ответ на любой физический вопрос, относящийся к рассматриваемому объекту. Определенное таким образом понятие состояния применимо для любой области физики, однако в каждом конкретном случае оно имеет специфическое, зачастую сильно отличное от других случаев содержание.

Например, состояние термодинамической системы определяется заданием трех величин (скажем, температуры, объема и числа частиц). Все остальные величины получаются из них, используя уравнения, формулирующие закономерности в этой области. В электродинамике состояние системы в са-

мом простом случае определяется, скажем, заданием пространственного распределения плотностей зарядов, электрических токов и материальных постоянных, остальные величины в принципе можно получить путем решения уравнений Максвелла.

Из закона причинности следует, что корректным образом определенное состояние системы (путем задания необходимого набора физических величин) позволяет получить исчерпывающие сведения о ней не только в заданный момент, но и в прошедшем и будущем времени.

В классической механике состояние системы определяется путем задания $2f$ независимых величин обобщенных координат $q_1, q_2, \dots, q_f$ и соответствующих им импульсов $p_1, p_2, \dots, p_f$, где f — число ее степеней свободы. Координаты определяют конфигурацию, а импульсы — состояние движения системы в заданный момент времени. Обобщенные импульсы определяются следующим образом:

$$p_k = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}, \quad k=1, 2, \dots, f, \quad (1.1)$$

где $L = L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$ — функция Лагранжа системы, а точка над координатой означает производную по времени. Изменение состояния системы со временем описывается системой уравнений, называемой уравнениями Гамильтона:

$$\frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad (1.2)$$

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad k=1, \dots, f,$$

где $H = H(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t)$ — функция Гамильтона системы. В принципе, для этих уравнений всегда существуют решения:

$$p_k = p_k(t_1, c_1, \dots, c_{2f}), \quad (1.3)$$

$$q_k = q_k(t_1, c_1, \dots, c_{2f}).$$

$c_1, c_2, \dots, c_{2f}$ — постоянные интегрирования. Их можно найти из (1.3), задавая значения всех обобщенных координат и импульсов (состояние системы) в некоторый начальный момент времени.

Итак, если в некоторый момент времени задано состояние системы, то оно однозначно определяется и для любого момента времени. Таким образом, в функции $H(p, q)$ запро-

граммирована полная информация о механической системе, если при этом задано ее состояние в некоторый момент времени. Это важное свойство гамильтониана сохраняется и в квантовой механике.

§ 2. Квантовая природа света

Исторически с первыми непреодолимыми трудностями классическая физика столкнулась в проблеме черного излучения. Черным называется поле электромагнитного излучения, находящееся в термодинамическом равновесии с окружающими телами. Эксперименты показывали, что спектральное распределение энергии в таком поле определяется только температурой T . Обозначим через $u(\nu, T) d\nu$ плотность энергии черного излучения в интервале частот $(\nu, \nu + d\nu)$. Последовательное рассмотрение вопроса распределения энергии излучения по частотам в рамках классической физики приводит к результату

$$u(\nu, T) d\nu = V \cdot \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3} kT, \quad (2.1)$$

где c — скорость света, $k = 1,38 \cdot 10^{-16}$ эрг/град. — постоянная Больцмана. Здесь $\frac{V \cdot 8\pi\nu^2 d\nu}{c^3}$ — число стоячих волн (осцилляторов) в интервале частот $(\nu, \nu + d\nu)$ в объеме V , занимаемом черным излучением, а kT — средняя энергия, приходящаяся на одну волну в состоянии термодинамического равновесия.

Формула (2.1) при достаточно низких частотах согласуется с экспериментом, однако при высоких частотах она приводит к нелепому результату: $\lim_{\nu \rightarrow \infty} u(\nu, T) = \infty$.

Эксперимент показывает, что с возрастанием ν функция $u(\nu, T)$ вначале растет по закону (2.1), при определенном значении частоты достигает максимума, а затем быстро стремится к нулю.

Проблему черного излучения разрешил Макс Планк (1901 г.), исходя из допущения, несовместимого с классическими представлениями. Он предположил, что энергия осцилляторов, испускающих и поглощающих волны, имеет дискретные значения $\varepsilon_0, 2\varepsilon_0, \dots, n\varepsilon_0$. Далее, используя формулу распределения Больцмана и формулу Вина, Планк пришел к результату:

$$u(\omega, T) d\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\frac{h\omega}{kT}}{e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1} d\omega, \quad (2.2)$$

который согласуется с экспериментом (см. задачу 2). Здесь $h=1,0545 \cdot 10^{-27}$ эрг сек—постоянная Планка* $\omega=2\pi\nu$ —циклическая частота.

В 1888 году Г. Герцем был открыт фотоэлектрический эффект, подробное экспериментальное исследование которого было проведено Столетовым. Попытки объяснения этого эффекта в рамках классической теории не увенчались успехами. Проблема была разрешена Альбертом Эйнштейном (1905) путем распространения идеи Планка о дискретности энергии резонаторов (осцилляторов) на излучение. Он предположил, что свет представляет собой поток корпускул, названных квантами или фотонами, энергия которых равна $h\nu$. В фотоэлектрическом эффекте падающий на тело фотон сталкивается и поглощается им; при этом, если энергия кванта превосходит энергию связи электрона, последний вылетает наружу с энергией, определяемой уравнением.

$$\frac{mv^2}{2} = h\nu - b, \quad (2.3)$$

где v —скорость фотоэлектрона, а b —работа выхода.

Гипотеза фотонов Эйнштейна нашла свое блестящее подтверждение в эффекте Комптона (1923 г.). Комптон с сотрудниками, изучая рассеяние рентгеновских лучей в легких элементах, обнаружил, что длина волны изменяется на величину

$$\Delta\lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad (2.4)$$

φ —угол рассеяния, $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$, λ_0 и λ —длины падающей и рассеянной волн, $\lambda_c = 0,0242 \text{ \AA}$ —постоянная, называемая комптоновской длиной волны электрона. По классической теории излучения, находящийся в поле электромагнитной волны электрон колеблется с частотой, равной частоте изменения напряженности электрического поля, и поэтому он должен излучать волны той же частоты. Комптон объяснил явление, предположив, что здесь происходит столкновение фотона с электроном (аналогично упругому столкновению двух частиц в релятивистской механике). При этом фотону приписывается импульс

$$p = hk, \quad (2.5)$$

где k —волновой вектор, $k = \frac{\omega}{c}$. Из законов сохранения энер-

* В этой книге всюду взамен часто используемой постоянной Планка $2\pi h = 6,624 \cdot 10^{-27}$ эргсек. мы используем постоянную h .

гии и импульса он получил формулу (2.4), причем оказалось, что

$$\lambda_c = \frac{2\pi h}{m_e c} = 2.42 \cdot 10^{-10} \text{ см}, \quad (2.6)$$

m_e — масса электрона.

Кроме перечисленных экспериментальных фактов, существует множество других, где в процессах взаимодействия с веществом монохроматическое излучение ведет себя как поток квантов с энергией $h\omega$ и импульсом hk .

Итак, из экспериментальных фактов следует, что при взаимодействии излучения с веществом законы сохранения энергии и импульса записываются в следующем виде

$$\begin{aligned} h\omega_0 + E_0 &= h\omega + E, \\ hk_0 + p_0 &= hk + p, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где величины с индексом нуль относятся к энергии и импульсу излучения и микросистемы до взаимодействия, а величины без индекса — после взаимодействия.

Уравнения (2.7) не укладываются в рамки классических волновой или корпускулярной представлений. В самом деле, классическая частица — это образование, которое локализовано в конечной области пространства, тогда как фигурирующие в (2.7) частота и длина волны — понятия, свойственные образованию, охватывающему бесконечное время и пространство. Эти уравнения не соответствуют и классическому волновому аспекту, так как по классической теории энергия монохроматической волны не определяется частотой, а пропорциональна квадрату ее амплитуды.

Таким образом, законы сохранения (2.7) не имеют ничего общего с классическими представлениями. Они выражают новое более глубокое содержание, которое называется квантовым, понимая охватывающее всю сложную ситуацию, наблюдаемую в соответствующих экспериментах.

§ 3. Дискретные уровни энергии

Экспериментальное изучение структуры атома также показывало, что здесь классические закономерности перестают быть верными. Можно привести множество примеров, свидетельствующих в пользу этого утверждения. В процессе создания квантовой механики особо важное значение сыграл факт дискретности атомных уровней энергии (т. е. энергии связи электрона с ядром). Непосредственное доказательство

этого факта содержится в опытах Франка и Герца (1913 год).

Совокупность фактов, наблюдаемых в атомных спектрах, также свидетельствует о дискретном характере уровней энергии в атоме. Ограничимся упоминанием закономерностей, наблюдающихся в спектре атома водорода. Бальмер (1888 г.), а затем и ряд других физиков показали, что в этом случае частоты спектральных линий подчиняются закономерности

$$\omega = 2\pi cR \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad (3.1)$$

где n и m — целые числа, $m \geq n+1$, а $R = (109677,591 \pm 0,010)$ см⁻¹ — так называемая постоянная Ридберга. Классическая электронная теория не смогла обосновать эмпирическую формулу (3.1). Согласно этой теории, возможны только некоторая частота ω и ее обертоны $n\omega$.

Первая попытка объяснения закономерностей в атомных спектрах была предпринята Н. Бором (1913). Он предложил полуклассическую теорию атома, опираясь на планетарную модель атома Резерфорда и формулу Бальмера. Для обеспечения устойчивости планетарной модели он предположил, что в атоме реализуются только некоторые определенные орбиты, вращаясь по которым электрон не излучает. Эти стационарные орбиты определяются из условия

$$\oint p_k dq_k = 2\pi h n_k, \quad k=1, 2, \dots, f \quad (3.2)$$

(условие квантования Бора—Зоммерфельда), где f — число степеней свободы, n_k — квантовое число, $n_k = 0, 1, 2, \dots$. В случае водорода $f=2$. Далее он предположил, что при переходе с одной разрешенной орбиты на другую электрон излучает квант с энергией

$$h\omega_{mn} = E_m - E_n. \quad (3.3)$$

Бор получил формулу Бальмера и показал, что постоянная Ридберга выражается через универсальные константы

$$R = \frac{m_e c^4}{4\pi c h^2}. \quad (3.5)$$

Теория Бора не смогла объяснить закономерностей спектров других атомов и вопрос интенсивностей спектральных линий. Трудности теории Бора были обусловлены ее непоследовательностью, а именно тем, что она одновременно оперировала взаимно исключаящими классическими и квантовыми понятиями. Так, допускалось, что электрон движется по траектории согласно законам классической механики и однове-

менно ему приписывались квантовые свойства (избранные стационарные орбиты, ускоренно движущийся электрон не излучает, условие частот), не имеющие ничего общего с поведением частиц, движущихся по классическим законам.

Несмотря на свою непоследовательность и противоречивость, теория Бора сыграла большую роль в деле подготовки и создания последовательной квантовой теории. Ее появление ознаменовало необходимый этап в истории развития физики. Позже, в главе X мы увидим, что теория Бора получается как предельный случай квантовой механики. Оказалось, что она верна для квазиклассических систем, т. е. таких, которые приобрели классические свойства, а квантовые еще не в полной степени потеряли свою силу.

§ 4. Волновые свойства микрочастиц

Неправомомерность законов классической физики для описания явлений микромира стала совершенно очевидной после открытия волновых свойств частиц. Волновые свойства микрочастиц теоретически были предсказаны Луи де Бройлем в 1924 году за несколько лет до соответствующих экспериментов. Исходя из формальной аналогии между распространением светового луча в геометрической оптике (уравнение эйконала) и движением частицы в ньютоновской механике (уравнения Гамильтона—Якоби), он предположил, что с движением частицы связана волна

$$\psi(x, y, z, t) = ae^{i(kr - \omega t)}, \quad (4.1)$$

где a — постоянная. Частота ω и волновое число k волн де Бройля связаны с энергией и импульсом частиц теми же соотношениями, что и в случае фотона

$$E = h\omega, \quad p = hk. \quad (4.2)$$

Для длины волны де Бройля имеем

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi h}{p} = \frac{2\pi h}{mv} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (4.3)$$

В нерелятивистском случае

$$\lambda = \frac{2\pi h}{mv}. \quad (4.4)$$

Для электронов $\lambda = \sqrt{\frac{150}{E}} \cdot 10^{-8}$ см, где E измерена в электронвольтах.

Вскоре гипотеза де Бройля получила свое экспериментальное подтверждение. Девисон и Джермер в 1927 году, а чуть позже Томсон и Тартаковский показали, что при рассеянии моноэнергетического пучка электронов в моно- и поликристаллах наблюдались дифракционные картины, типичные для рентгеновских лучей. Позже аналогичные эксперименты были проведены и с другими частицами.

Может показаться, что дифракционные явления возникают в результате каких-то сложных взаимодействий между частицами в пучке. Но дело в том, что дифракционные явления наблюдались и в тех опытах, где частицы падали на мишень не одновременно, а поодиночке. Это свидетельствует о том, что волновые свойства присущи именно отдельным частицам. При этом весьма существенно то обстоятельство, что в опытах, в которых наблюдаются волновые свойства, частицы одновременно сохраняют свои корпускулярные свойства. В самом деле в дифракционных опытах каждый электрон падает только в одну точку (он не разделяется на части), но только в те места, где в дальнейшем образуются дифракционные кольца. Таким образом, волновые свойства электрона проявляются в том, что он попадает именно в те места, где расположены дифракционные кольца, соответствующие длине волны (4.4).

Итак, аналогично случаю жесткого электромагнитного излучения микрочастицы с классической точки зрения имеют двойственный характер, т. е. одновременно обладают и корпускулярными и волновыми свойствами. С другой стороны, физический объект, очевидно, не может иметь взаимно исключающие свойства. Это свидетельствует о том, что микрочастица есть квантовый объект и ее поведение не может описываться в рамках классических представлений.

Очевидно, при движении частиц по определенным траекториям дифракционные явления никогда бы не наблюдались. Это значит, что перестает быть верным обычное пространственно-временное описание состояния частицы с помощью координат x , y , z и соответствующих им компонент импульса P_x , P_y , P_z .

§ 5. Понятие о волновой функции

В предыдущих параграфах мы убедились, что взаимно-исключающие классические корпускулярный и волновой аспекты не соответствуют природе вещей в микромире, т. е. классическая механика не в состоянии описывать закономерности движения частиц в микромире. Возникла необходимость новой теории, которая с единой точки зрения смогла бы объяснить наблюдаемые закономерности. Причина возникшего

затруднения, очевидно, кроется в самом содержании понятия состояния системы. Экспериментальные факты убедительно указывают на то, что понятия состояния для макро- и микро-частиц коренным образом отличаются друг от друга. Итак, мы вынуждены под давлением фактов отказаться от описания состояния частицы путем задания координаты частицы и ее импульса.

В квантовой механике для описания состояния частицы вводится некоторая функция $\psi(x, y, z, t)$, называемая волновой функцией. Разумеется, она должна быть определена так, чтобы давать исчерпывающее описание физической реальности. В этом параграфе мы не можем остановиться на способе определения волновой функции и сразу же дать исчерпывающее объяснение ее содержания. Это будет сделано в основном в главе IV, а пока остановимся только на тех свойствах этой функции, которые необходимы для дальнейшего изложения.

Итак, введем понятие волновой функции в качестве постулата, приписывая ей определенные свойства. Волновая функция должна содержать в себе все волновые свойства частиц. В отличие от амплитуд (напряженностей) электромагнитного и гравитационного полей, представляющих собой реальные физические величины, непосредственно наблюдаемые на эксперименте, $\psi(x, y, z, t)$ представляет собой амплитуду вероятности, т. е.

$$\psi^*(x, y, z, t)\psi(x, y, z, t)dxdydz, \quad (5.1)$$

является вероятностью нахождения частицы в элементе объема $dV = dxdydz$. Нужно иметь в виду, что $\psi(x, y, z, t)$ комплексная функция от координат и времени (зависимость от координат иногда может быть и реальной функцией), поэтому мы пишем не ψ^2 , а $|\psi|^2$.

Позже мы увидим, что $\psi(x, y, z, t)$ непосредственно связана с экспериментом, а именно: она однозначно определяется полным набором физических величин, характеризующих состояние системы; если эти величины известны, то волновую функцию можно сразу же записать. В качестве первого примера волновой функции мы можем привести волну де Бройля. Здесь $\psi(x, y, z, t)$ описывает состояние частицы с определенными значениями компонент импульса p_x, p_y, p_z . В этом состоянии для частицы не существует понятия определенной координаты, так как согласно (4.1) частица с равной вероятностью может находиться в любой точке пространства $|\psi|^2 dV = |a|^2 dV$.

Состояние частиц в параллельном моноэнергетическом пучке описывается волной де Бройля: частицы с равной вероятностью могут находиться всюду. При наличии мишени из

моно- или поликристалла перед пучком волновое поле ψ дифрагирует на мишени. В результате этой дифракции на экране в некоторых местах волновая функция исчезает $|\psi|^2=0$, в других она отлична от нуля. В те точки, где $|\psi|^2=0$, разумеется не попадет ни одна частица, а в других—число падающих частиц пропорционально $|\psi|^2$. При такой интерпретации фактов частица остается частицей, однако она все-таки не обычная. Необычность ее состоит в том, что после прохождения мишени она падает только в те места экрана, где образуются дифракционные максимумы волны с длиной $\lambda = \frac{h}{p}$.

Вероятность нахождения частицы в некотором объеме V равна

$$W(t) = \int_V |\psi(x, y, z, t)|^2 dV. \quad (5.2)$$

Если интегрирование ведется по ~~всему пространству~~, то мы получим вероятность нахождения частицы ~~где-либо в про-~~странстве: это вероятность достоверного события, к которому принято считать равной единице*.

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, y, z, t)|^2 dx dy dz = 1. \quad (5.3)$$

Удовлетворяющая этому условию $\psi(x, y, z, t)$ называется нормированной волновой функцией.

Для описания состояния сложной микросистемы также вводится понятие волновой функции. Волновая функция для сложных систем, кроме времени, зависит от всех координат $q_1, q_2, \dots, q_i$, где i —число степеней свободы системы. В этом случае

$$|\psi(q_1, q_2, \dots, q_i, t)|^2 dq_1 dq_2 \dots dq_i \quad (5.4)$$

представляет собой вероятность того, что система в момент времени t имеет заданную конфигурацию $q_1, q_2, \dots, q_i$.

§ 6. Принцип суперпозиции

Для всех волновых полей, описываемых линейными дифференциальными уравнениями, справедлив принцип суперпозиции. Сначала раскроем его содержание на примере элек-

* Как увидим позже, волновую функцию не всегда удается нормировать на единицу.

ромагнитного поля. Пусть $\varphi_k(x, y, z, t)$ и $A_k(x, y, z, t)$, $k=1, 2, 3, \dots$ — скалярные и векторные потенциалы полей, созданных некоторым распределением зарядов и токов. Тогда

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_k a_k \varphi_k(x, y, z, t), \quad (6.1)$$

$$A(x, y, z, t) = \sum_k b_k A_k(x, y, z, t)$$

(a_k и b_k — вещественные постоянные) также представляют электромагнитное поле, соответствующее вполне определенному распределению зарядов и токов, т. е. $\varphi(x, y, z, t)$ и $A(x, y, z, t)$ удовлетворяют уравнению Максвелла. В этом и состоит суть принципа суперпозиции. Поля, подчиняющиеся этому принципу, описываются линейными дифференциальными уравнениями.

$\psi(x, y, z, t)$ является волновым полем, поэтому оно также должно подчиняться принципу суперпозиции. Пусть $\psi_1, \psi_2, \dots$ — волновые функции каких-то состояний системы, а $c_1, c_2, \dots$ — произвольные постоянные, тогда согласно принципу суперпозиции

$$\psi(x, y, z, t) = \sum_k c_k \psi_k(x, y, z, t) \quad (6.2)$$

представляет собой волновую функцию некоторого возможного состояния той же системы. Волновые функции определяются набором совместимых физических величин, входящих в них в качестве постоянных параметров. Следовательно, индексы k фактически нумеруют возможные значения этих величин.

Если параметры, определяющие волновую функцию, меняются непрерывно, взамен (6.2) следует писать

$$\psi(x, y, z, t) = \int c(\alpha) \psi_\alpha(x, y, z, t) d\alpha, \quad (6.3)$$

где α символическая запись совокупности совместимых физических величин, определяющих волновую функцию $\psi_\alpha(x, y, z, t)$. Отсюда следует, что дифференциальные уравнения, определяющие ψ , неизбежно должны быть линейными.

В качестве примера рассмотрим интеграл:

$$\psi(x, y, z, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} c(p_x, p_y, p_z) \psi_p(x, y, z, t) dp_x dp_y dp_z, \quad (6.4)$$