

流
体
力
学
问
题
论
文
集

COLLECTED WORKS ON THE PROBLEMS
OF FLUID MECHANICS

VOLUME III

CONTENTS

Метод характеристик для трехмерного нестационарного течения газа. Брун Г., Хаак В., Механика, 3 (1959), 3—17.	(1)
Характеристики общих уравнений газовой динамики. Русанов В. В., ЖВММФ, 3 (1963), 508—527.	(16)
The Numerical Solution of Hyperbolic Systems of Partial Differential Equations in Three independent Variables. Butler D. S., Proc. Roy. Soc. A255 (1960), 232—252.	(36)
Shock Fronts in Two-Dimensional Flow. Elliott L. A., Proc. Roy. Soc. A267 (1962), 558—565.	(57)
Taylor Instability in Shock Acceleration of Compressible Fluids. Richtmyer R. D., Comm. Pure Appl. Math., 13 (1960), 297—319.	(67)
Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями. Русанов В. В., ЖВММФ, 1 (1961), 267—279.	(91)
Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной. Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П., ЖВММФ, 1 (1961), 1020—1050.	(104)
Разностные методы численного решения задач газовой динамики. Годунов С. К., Семендяев К. А., ЖВММФ, 2 (1962), 3—14.	(135)
Об отражении сферической ударной волны от плоскости. Васильев М. М., Вычислительная Математика, 6 (1960), 89—99.	(147)
Difference Methods and the Equations of Hydrodynamics. Noh W. F. & Protter M. H., J. Math. Mech., 12 (1963), 149—191.	(161)
Calcul de Detonations mono et Bidimensionnelles. Wilkins M. L., Les ondes de de detonation, (1962), 165—173.	(205)
Numerical Methods for Computing Two-Dimensional Unsteady Fluid Motion. Jones J. G. T., Computer. Bull., 6 (1963), 127.	(215)
Numerical Stability and Unsteady Shocks Waves. Richards P. I., SIAM Review, 2 (1960), 208—216.	(216)
Stability Criteria for Numerical Solutions in Unsteady Two-Dimensional Cylindrical Lagrangian Flow. Enig J. W., J. Math. & Phys., XL (1961), 23—32.	(225)
Aerodynamics of Blasts. ——— Diffraction of Blast Around Finite Corners. Ludloff H. F. & Friedman M. B., JAS 22 (1955), 27—34.	(235)
Difference Solution of Shock Diffraction Problem. Ludloff H. F. & Friedman M. B., JAS 22 (1955), 139—140.	(243)
Calculation of Supersonic Flow Past an Axially Symmetric Cylinder. Evans M. W. & Harlow F. H., JAS 25 (1968), 269—278.	(245)
Calculation of Unsteady Supersonic Flow Past a Circular Cylinder. Evans M. W. & Harlow F. H., J. Amer. Rocket Soc., 29 (1959), 46—48.	(247)

Hydrodynamic Problems Involving Large Fluid Distortions. Harlow F. H., J. Assoc. Comp. Mach., 4 (1957), 137—142.	(251)
Two-Dimensional Hydrodynamic Calculations. Harlow F. H., Dickman D. O., Harris D. E. Jr., Martin R. E., LA-2301 (1959), 1—97.	(257)
The Particle-and-Force Computing Method For Fluid Dynamics. Harlow F. H., Meixner B. D., LAMS-2567 (1961), 1—48.	(355)
Stability of Difference Equations Selected Topics. Harlow F. H., LAMS-2452 (1960), 1—39.	(405)
Methods of Differencing in Eulerian Hydrodynamics. Longley H. J., LAMS-2379 (1960), 1—83.	(445)
A Numerical Method For Two-Dimensional Unsteady Fluid Flow. Goad W. B., LAMS-2365 (1960), 1—21.	(529)
Lagrangian Hydrodynamic Computations and Molecular Models of Matter. Birkhoff G., Lynch R. E., LA-2618 (1961), 1—57.	(551)
Application of Finite Difference Methods to Problems in Two-Dimensional Hydrodynamics. Grandy R., AD-256328 (1961), 1—28.	(609)
Practical Numerical Methods of Three-Dimensional Supersonic Flow. Sauer R., AD-264817 (1961), 1—25.	(641)

МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА ¹⁾

Г. Брун, В. Хаак

В последнее время начиная с 1945 г. нестационарное одномерное течение газа изучалось довольно подробно. Математически задача сводилась к системе квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными: пространственной координатой x и временем t . Разыскивалось решение задачи с начальными условиями [4, 5, 9]. При исследовании стационарных течений газа также ограничивались в основном изучением таких случаев, которые математически можно свести к двум независимым переменным [2, 3, 8, 10, 11].

Ниже мы покажем, что метод построения приближенного решения, предложенный для двух независимых переменных, в известных случаях может быть применен к двумерным и трехмерным нестационарным течениям газа. Будут указаны основы метода решения задачи с начальными условиями, причем могут быть удовлетворены и соответствующие граничные условия. В качестве примера будут рассмотрены два нестационарных течения в сопле Лавала: течение при наличии начального скачкообразного перепада давления и непрерывное истечение.

При выводе необходимых дифференциальных уравнений из основных уравнений, записанных в векторной форме, используется соответствующая локальная система координат в каждой точке потока ²⁾. При этом ясно выявляется связь с геометрией потока, что оказывается полезным для общего метода построения приближенного решения. Кроме того, из общих дифференциальных уравнений путем простой и наглядной специализации могут быть получены известные частные случаи для одномерного, цилиндрически симметричного и сферически симметричного потоков и т. д.

Настоящая статья опирается на теорию характеристик второго из соавторов для двумерных нестационарных потоков, доложенную в Цюрихе в 1950 г. и в Стокгольме в 1953 г. Распространение метода на трехмерный случай опирается на рукопись первого автора. Первый пример, который не мог быть опубликован из-за довольно грубой интерполяции, был сосчитан в дипломной работе Гейдриха в 1956 г. При расчете приведенных ниже примеров ценную помощь оказал Грюневальд.

1. Основные уравнения

Для течения идеального газа без трения с постоянной удельной теплоемкостью при надлежащих предположениях о дифференцируемости входящих функций имеют место следующие уравнения:

уравнение неразрывности

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1.1)$$

уравнение движения

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{F}, \quad (1.2)$$

уравнение сохранения энергии

$$\frac{dS}{dt} = 0. \quad (1.3)$$

¹⁾ Bruhn G., Haack W., Ein Charakteristikenverfahren für dreidimensionale instationäre Gasströmungen, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **9b**, № 5/6, 173—190 (1958).

²⁾ Во время печатания этой статьи появилась работа [13], в которой аналогичный метод используется для стационарного течения газа. Для жидкости в этом направлении выполнены работы С. С. Бюшгенсом [14], [15].

Оператор d/dt означает субстанциональную производную, т. е.

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla.$$

Величины p , ρ и S связаны соотношением

$$\rho = \rho(p, S) = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/\kappa} e^{(S_0 - S)/c_p}, \quad (1.4)$$

где ρ_0 , p_0 , S_0 — постоянные, характеризующие некоторые фиксированные состояния. Здесь введены следующие обозначения: $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки, $\mathbf{v}$ — вектор скорости частицы газа, $\mathbf{F}$ — вектор внешней силы, отнесенный к единице массы газа, p — давление, ρ — плотность, S — энтропия единицы массы газа, t — время, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме, $\kappa = c_p/c_v$. Наряду с ρ , p и S мы будем использовать также скорость звука

$$a = \left[\frac{\partial p(p, S)}{\partial \rho} \right]^{-1/2}. \quad (1.5)$$

Из (1.3) следует

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{a^2} \frac{dp}{dt},$$

тогда уравнение (1.1) принимает вид

$$\frac{1}{\rho a} \frac{dp}{dt} + a \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1.6)$$

2. Введение локальной системы координат

Для инвариантного описания потока каждой точке $\mathbf{r}$ поставим в соответствие некоторую тройку единичных взаимно ортогональных векторов, таких, что $\mathbf{n}_i = \mathbf{n}_i(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_k = \delta_{ik}$ ($i, k = 1, 2, 3$). Тройка таких векторов и является локальной системой координат. Вектор $\mathbf{n}_1$ можно направить по вектору скорости $\mathbf{v}$

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{v} = 0, \quad (2.1)$$

так что поле $\mathbf{n}_1(\mathbf{r}, t)$ будет непрерывно дифференцируемым вместе с $\mathbf{v}$ всюду, кроме особых точек, где $\mathbf{v} = 0$. Векторы $\mathbf{n}_2$ и $\mathbf{n}_3$, которые должны составлять правую тройку с вектором $\mathbf{n}_1$, мы определим позже. Производную $\mathbf{n}_i \cdot \nabla$ по направлению $\mathbf{n}_i$ мы будем обозначать индексом (i) , так для функции Φ введем обозначение $\mathbf{n}_i \cdot \nabla \Phi = \Phi_{(i)}$;

пусть далее $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 F_i \mathbf{n}_i$. Положим в соответствии с (2.1)

$$\mathbf{v} = w \mathbf{n}_1, \quad (2.2)$$

тогда уравнения (1.6) и (1.2) примут вид

$$\frac{1}{\rho a} \frac{dp}{dt} + a w_{(1)} + a w \nabla \cdot \mathbf{n}_1 = 0, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{n}_1 \frac{dw}{dt} + w \frac{d\mathbf{n}_1}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{F}. \quad (2.4)$$

Чтобы разложить векторное уравнение (2.4) на три скалярных, рассмотрим траекторию $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ какой-либо частицы¹⁾. Вектор $\mathbf{n}_1(\mathbf{r}(t), t)$ направлен по касательной, $ds_1 = w dt$ — элемент дуги.

¹⁾ В нестационарном случае она отлична от мгновенной линии тока.

Для векторов подвижного трехгранника $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ имеют место равенства

$$\frac{d\mathbf{n}_i}{ds_1} = \frac{1}{w} \frac{d\mathbf{n}_i}{dt} = \sum_{k=1}^3 \omega_{ik} \mathbf{n}_k \quad (i=1, 2, 3), \quad (2.5)$$

где $\omega_{ik} + \omega_{ki} = 0$. Поэтому уравнение (2.4) может быть заменено тремя скалярными уравнениями

$$\frac{dw}{dt} = F_1 - \frac{1}{\rho} p_{(1)}, \quad (2.6)$$

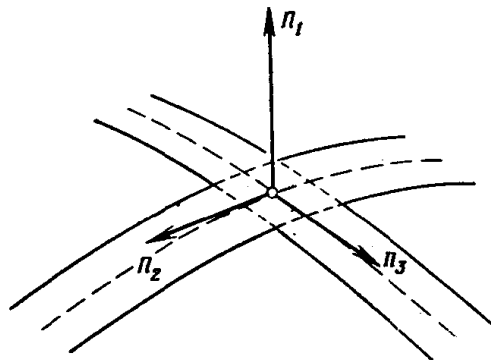
$$w^2 \omega_{12} = F_2 - \frac{1}{\rho} p_{(2)}, \quad (2.7)$$

$$w^2 \omega_{13} = F_3 - \frac{1}{\rho} p_{(3)}. \quad (2.8)$$

Эти уравнения легко могут быть истолкованы кинематически. На частицу действует внешняя сила $\mathbf{F}$ и сила давления $-\nabla p/\rho$ (на единицу массы). Уравнение (2.6) описывает тот факт, что компонента результирующей силы $\mathbf{F} - \nabla p/\rho$ в направлении касательной к траектории $\mathbf{n}_1$ порождает ускорение $d w/dt$ в этом же направлении. Так как ω_{12} и ω_{13} являются, как известно, кривизнами траектории, соответствующими направлениям нормалей $\mathbf{n}_2$ и $\mathbf{n}_3$, то можно величины $-\omega^2 \omega_{1i}$ истолковать как компоненты центральной силы. Тогда уравнения (2.7) и (2.8) можно истолковать как уравнения равновесия между центробежной силой и нормальной составляющей силы $\mathbf{F} - \nabla p/\rho$. Если, в частности, за $\mathbf{n}_2$ принять единичный вектор главной нормали $\mathbf{n}$, а за $\mathbf{n}_3$ — единичный вектор бинормали $\mathbf{b}$, то будет $\omega_{13} = 0$ и получается такой результат: *сила $\mathbf{F} - \nabla p/\rho$ всегда лежит в соприкасающейся плоскости траектории, т. е. в плоскости, содержащей векторы $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$.*

3. Геометрическое истолкование инварианта $\nabla \cdot \mathbf{n}_1$

В уравнение неразрывности (2.3) входит величина $\nabla \cdot \mathbf{n}_1$, которая зависит только от геометрии поля $\mathbf{n}_1$. Если поле $\mathbf{n}_1$ обладает в некоторый момент времени t ортогональными поверхностями, то по изве-



Фиг. 1. Локальная система координат и полосы.

стной теореме (см. [6]) $\nabla \cdot \mathbf{n}_1$ равняется средней удвоенной кривизне ортогональной поверхности поля $\mathbf{n}_1$. Вообще говоря, может не существовать ни одной ортогональной поверхности. В качестве замены мы используем полосы вдоль интегральных кривых полей $\mathbf{n}_2$ и $\mathbf{n}_3$ с век-

тором $\mathbf{n}_1$, нормальным к ним. Оператор ∇ может быть разложен по ортогональному нормированному базису $\mathbf{n}_i$, т. е.

$$\nabla = \sum_{i=1}^3 \mathbf{n}_i (\mathbf{n}_i \cdot \nabla).$$

Так как

$$\mathbf{n}_i \cdot \nabla \mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_{1(i)} \quad \text{и} \quad \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_{1(1)} = 0,$$

то

$$\nabla \cdot \mathbf{n}_1 = \sum_{i=1}^3 \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_{1(i)} = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_{1(2)} + \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{n}_{1(3)} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}. \quad (3.1)$$

При этом $1/r_2 = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_{1(2)}$ и $1/r_3 = \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{n}_{1(3)}$ являются нормальными кривизнами полос в рассматриваемой точке. Величина $1/2 \nabla \cdot \mathbf{n}_1$ является, таким образом, средним арифметическим нормальных кривизн ортогональных полос.

4. Естественные уравнения

Если $\mathbf{n}_2$ направить по главной нормали, а $\mathbf{n}_3$ по бинормали к траектории, то $\omega_{12} = 1/r_1$ будет равно кривизне траектории, а $\omega_{13} = 0$. Систему уравнений (1.3), (2.3) и (2.6) — (2.8) при таком выборе трехгранника можно переписать в виде

$$\frac{dS}{dt} = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{\rho a} \frac{dp}{dt} = -a\omega_{(1)} - a\omega \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right), \quad (4.2)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = F_1 - \frac{1}{\rho} p_{(1)}, \quad (4.3)$$

$$\frac{\omega^2}{r_1} = F_2 - \frac{1}{\rho} p_{(2)}, \quad (4.4)$$

$$0 = F_3 - \frac{1}{\rho} p_{(3)}. \quad (4.5)$$

Эти пять уравнений представляют собой соотношения между геометрическими и физическими инвариантами потока. Поэтому мы будем называть их *естественными уравнениями потока*. При этом a , согласно (1.5), является функцией p и S .

Первые три уравнения описывают изменения во времени величин S , p и ω вдоль траектории. Четвертое уравнение дает кривизну траектории. Последнее уравнение устанавливает направление бинормали.

5. Введение производных по характеристическим направлениям

Мы хотим по аналогии с тем, как это делалось в случае одномерного потока, взяв линейные комбинации уравнений (4.2) и (4.3), получить новые уравнения, в которых p и ω подвергаются одинаковому пространственно-временному дифференцированию.

Если умножить уравнение (4.3) на ± 1 и прибавить к уравнению (4.2), то после введения сокращенных обозначений

$$\Phi_\alpha = \frac{d\Phi}{dt} + a\Phi_{(1)}, \quad \Phi_\beta = \frac{d\Phi}{dt} - a\Phi_{(1)}$$

получатся два уравнения

$$\frac{1}{\rho a} p_\alpha + w_\alpha = -a\omega \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) + F_1, \quad (5.1)$$

$$\frac{1}{\rho a} p_\beta - w_\beta = -a\omega \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) - F_1. \quad (5.2)$$

Соответствующие направления дифференцирования, которые мы назовем характеристическими, определяются в четырехмерном пространстве $(\mathbf{r}, t)$ уравнениями

$$\alpha: d\mathbf{r} = (w + a) \mathbf{n}_1 dt, \quad \beta: d\mathbf{r} = (w - a) \mathbf{n}_1 dt. \quad (5.3)$$

Решения этих дифференциальных уравнений мы будем называть *главными характеристиками*. Присоединяя к уравнениям (5.1) и (5.2) уравнения (4.1), (4.4) и (4.5), получим полную систему.

6. Редукция числа направлений дифференцирования¹⁾

Чтобы выяснить смысл направлений дифференцирования (5.3), напишем уравнения (2.3) и (2.6) — (2.8) как квазилинейную систему²⁾ и исследуем, какие могут быть получены из них линейные комбинации, содержащие менее четырех направлений дифференцирования. Для этого выразим вектор $\mathbf{n}_1$ в уравнениях (2.3) и (2.6) — (2.8) через скалярные функции. Вектор $\mathbf{n}_1$ как единичный вектор в R_3 может быть задан с помощью двух параметров u , v , например широты и долготы на единичной сфере. Величины

$$\nabla \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_{1(2)} + \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{n}_{1(3)}, \quad w\omega_{12} = \mathbf{n}_2 \cdot \frac{d\mathbf{n}_1}{dt}, \quad w\omega_{13} = \mathbf{n}_3 \cdot \frac{d\mathbf{n}_1}{dt}$$

[ср. (3.1) и (2.5)] могут быть поэтому представлены через производные по направлениям изменения параметров u и v . Применяя сокращенные обозначения

$$\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_{1u} = A_u, \quad \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_{1v} = A_v, \quad \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{n}_{1u} = B_u, \quad \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{n}_{1v} = B_v,$$

получим

$$\nabla \cdot \mathbf{n}_1 = A_u u_{(2)} + B_u u_{(3)} + A_v v_{(2)} + B_v v_{(3)},$$

$$w\omega_{12} = A_u \frac{du}{dt} + A_v \frac{dv}{dt}, \quad w\omega_{13} = B_u \frac{du}{dt} + B_v \frac{dv}{dt}$$

В результате приходим к системе

$$\frac{1}{\rho a} \frac{dp}{dt} + a\omega_{(1)} + a\omega (A_u u_{(2)} + B_u u_{(3)} + A_v v_{(2)} + B_v v_{(3)}) = 0, \quad (6.1)$$

$$\frac{1}{\rho} p_{(1)} + \frac{d\omega}{dt} = F_1, \quad (6.2)$$

$$\frac{1}{\rho} p_{(2)} + \omega A_u \frac{du}{dt} + \omega A_v \frac{dv}{dt} = F_2, \quad (6.3)$$

$$\frac{1}{\rho} p_{(3)} + \omega B_u \frac{du}{dt} + \omega B_v \frac{dv}{dt} = F_3. \quad (6.4)$$

Умножим эти уравнения соответственно на λ_1 , λ_2 , λ_3 , λ_4 и сложим,

¹⁾ При первом чтении разд. 6—8 можно пропустить.

²⁾ Уравнение (1.3) содержит одну лишь производную от S и поэтому не входит в рассмотрение линейных комбинаций.

при этом получатся следующие производные по направлениям от функций p, w, u, v :

$$\left. \begin{aligned} p: & \lambda_1 \frac{d\Phi}{dt} + \lambda_2 a \Phi_{(1)} + \lambda_3 a \Phi_{(2)} + \lambda_4 a \Phi_{(3)}, \\ w: & \lambda_2 \frac{d\Phi}{dt} + \lambda_2 a \Phi_{(1)}, \\ u: & (\lambda_3 A_u + \lambda_4 B_u) \frac{d\Phi}{dt} + \lambda_1 a A_u \Phi_{(2)} + \lambda_1 a B_u \Phi_{(3)}, \\ v: & (\lambda_3 A_v + \lambda_4 B_v) \frac{d\Phi}{dt} + \lambda_1 a A_v \Phi_{(2)} + \lambda_1 a B_v \Phi_{(3)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Условием линейной зависимости этих четырех производных по направлениям является обращение в нуль определителя

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 a & \lambda_3 a & \lambda_4 a \\ \lambda_2 & \lambda_1 a & 0 & 0 \\ \lambda_3 A_u + \lambda_4 B_u & 0 & \lambda_1 a A_u & \lambda_1 a B_u \\ \lambda_3 A_v + \lambda_4 B_v & 0 & \lambda_1 a A_v & \lambda_1 a B_v \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая его, получим

$$a^3 (A_u B_v - A_v B_u) \lambda_1^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 - \lambda_4^2) = 0.$$

Так как всюду, кроме исключительных точек, $a^3 (A_u B_v - A_v B_u) \neq 0$, то мы приходим к двум уравнениям: либо

$$\lambda_1 = 0, \quad (6.6)$$

либо

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2. \quad (6.7)$$

7. Характеристический коноид

Случай $\lambda_1 = 0$ приводит к произвольной линейной комбинации уравнений (6.2)–(6.4). Встречающиеся при этом производные по направлениям суть d/dt и некоторая произвольная линейная комбинация производных (1), (2), (3). Двумерные подпространства четырехмерного пространства $(\mathbf{r}, t)$, натянутые на эти два направления, при всевозможных $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ содержат направление субстанционального дифференцирования d/dt .

Вводя угловые величины φ и ψ , общее решение уравнения (6.7) можно записать в виде

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \cos \varphi, \quad \lambda_3 = \sin \varphi \cos \psi, \quad \lambda_4 = \sin \varphi \sin \psi. \quad (7.1)$$

При этом четыре производные (6.5) могут быть получены как линейные комбинации трех производных по направлениям. Для этого мы используем производные по направлениям:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{[1]} &= \frac{d\Phi}{dt} \cos \varphi + a \Phi_{(1)}, \\ \Phi_{[2]} &= \frac{d\Phi}{dt} \sin \varphi \cos \psi + a \Phi_{(2)}, \\ \Phi_{[3]} &= \frac{d\Phi}{dt} \sin \varphi \sin \psi + a \Phi_{(3)}. \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

Для каждой пары значений φ, ψ натянем на эти направления дифференцирования трехмерное подпространство четырехмерного пространства $(\mathbf{r}, t)$. При переменных φ и ψ соответствующие подпространства огибаются некоторой гиперповерхностью. Если ее уравнением является $H(\mathbf{r}, t) = 0$, то тогда должно быть

$$H_{[1]} = H_{[2]} = H_{[3]} = 0$$

или

$$\begin{aligned} aH_{(1)} &= -\frac{dH}{dt} \cos \varphi, & aH_{(2)} &= -\frac{dH}{dt} \sin \varphi \cos \psi, \\ aH_{(3)} &= -\frac{dH}{dt} \sin \varphi \sin \psi. \end{aligned}$$

Исключение φ и ψ приводит к дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{dH}{dt}\right)^2 - a^2 (H_{(1)}^2 + H_{(2)}^2 + H_{(3)}^2) = 0. \quad (7.3)$$

Это — дифференциальное уравнение так называемого *характеристического коноида*.

Если полный дифференциал функции Φ записать в виде

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^3 \Phi_{(i)} \alpha_i$$

с дифференциальными формами α_i , то, окаймляя дискриминант уравнения (7.3), получим для направлений $dt : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$ образующих характеристического коноида, бихарактеристик, соотношение

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & dt \\ 0 & -a^2 & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & -a^2 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 & \alpha_3 \\ dt & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - a^2 dt^2 = 0. \quad (7.4)$$

Значит, первая из производных (6.5), если учесть (7.1), имеет направление одной из бихарактеристик, а именно

$$dt : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = \lambda_1 : a\lambda_2 : a\lambda_3 : a\lambda_4 = 1 : a \cos \varphi : a \sin \varphi \cos \psi : a \sin \varphi \sin \psi.$$

Тем самым для углов φ и ψ на характеристическом коноиде получается простое геометрическое истолкование.

8. Характеристические уравнения

Уравнение, образованное как линейная комбинация уравнений (6.1)—(6.4) с коэффициентами (7.1), будет

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho a} (p_{[1]} \cos \varphi + p_{[2]} \sin \varphi \cos \psi + p_{[3]} \sin \varphi \sin \psi) + w_{[1]} + \\ + w (A_u u_{[2]} + B_u u_{[3]}) + w (A_v v_{[2]} + B_v v_{[3]}) = \\ = F_1 \cos \varphi + F_2 \sin \varphi \cos \psi + F_3 \sin \varphi \sin \psi. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Физический инвариант ρ в этом уравнении дифференцируется вдоль бихарактеристики. Среди бихарактеристик есть две исключительные, которые мы будем называть *главными характеристиками*. На них направления дифференцирования **обоих** физических инвариантов ρ и w

совпадают¹⁾. Условием для этого является, очевидно, в силу (8.1), равенство $\sin \varphi = 0$ или равенства

$$\varphi = 0 \quad \text{или} \quad \pi.$$

Положим для $\varphi = 0$

$$\Phi_{(1)} = \frac{d\Phi}{dt} + a\Phi_{(1)} = \Phi_\alpha$$

и для $\varphi = \pi$

$$\Phi_{(1)} = -\left(\frac{d\Phi}{dt} - a\Phi_{(1)}\right) = -\Phi_\beta.$$

Если в (8.1) снова заменить величины u и v через геометрические инварианты, то получаются уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho a} p_\alpha + w_\alpha &= -aw \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) + F_1, \\ \frac{1}{\rho a} p_\beta - w_\beta &= -aw \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) - F_1. \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

Но это—уравнения, уже полученные ранее в разд. 5. Уравнения (5.3) являются дифференциальными уравнениями главных характеристик. Так как уравнения (8.2) получаются единственной комбинацией уравнений (6.1) и (6.2), то в случае $\lambda_1 = 0$ нужно также положить $\lambda_2 = 0$ и либо λ_3 , либо λ_4 взять равным 1, т. е. в качестве дальнейших уравнений взять сами уравнения (2.7) и (2.8). Далее к ним нужно еще присоединить уравнение сохранения энергии (1.3), а также соотношение (1.5) между a , ρ и S . Нужно еще заметить, что $\mathbf{n}_2$ и $\mathbf{n}_3$ не направлены по главной нормали и бинормали, чтобы не нарушить квазилинейный характер системы (6.1)—(6.4). Для практических целей можно эту специализацию выбора $\mathbf{n}_2$ и $\mathbf{n}_3$ выполнить позже, чтобы вместо уравнений (2.7) и (2.8) получить уравнения (4.4) и (4.5).

Уравнения (5.1)—(5.3), полученные предварительно в разд. 5, получаются в разд. 6—8 как необходимые условия при редукции числа направлений дифференцирования²⁾. Направления дифференцирования α и β получаются из инвариантности главных характеристик относительно преобразования независимых переменных.

9. Основы трехмерного метода характеристик

Вид уравнений (5.1) и (5.2) наводит на мысль о развитии трехмерного метода характеристик, позволяющего решать задачу с начальными условиями. Пусть состояние газа при $t = t_0$ задано. Тогда с помощью уравнений (5.1), (5.2), (4.1), (4.4) и (4.5) можно вычислить состояние в момент $t = t_0 + \Delta t$.

Так как для представления пространственного потока нет никакого достаточно простого графического метода, решение нужно в основном проводить путем вычислений. Вследствие большого объема вычислений, состоящих главным образом из работы по интерполированию, годятся лишь электронные автоматические цифровые машины с программным управлением.

Мы ограничимся для примера вычислениями для одной точки потока; ρ , w , S и $\mathbf{n}_1$ предполагаются известными в момент t_0 в узлах достаточно плотной сетки в пространстве.

¹⁾ Аналогичное требование для производных от u и v не имеет смысла, так как u и v не являются инвариантами.

²⁾ Это совпадает с результатами общей теории многомерных дифференциальных уравнений гиперболического типа в работах [7] и [12].

1. *Определение главной нормали $\mathbf{n}_2$, бинормали $\mathbf{n}_3$ и $F_2 = p_{(2)}/\rho$.* Конечно-разностным методом определяем вектор $\mathbf{F} = \nabla p/\rho$, затем имеем

$$F_1 - \frac{1}{\rho} p_{(1)} = \mathbf{n}_1 \cdot \left(\mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p \right),$$

а в силу (4.5), имеем

$$\left(F_2 - \frac{1}{\rho} p_{(2)} \right) \mathbf{n}_2 = \left(\mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p \right) - \left(F_1 - \frac{1}{\rho} p_{(1)} \right) \mathbf{n}_1,$$

откуда получаем

$$\mathbf{n}_2 = \frac{\left(\mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p \right) - \left(F_1 - \frac{1}{\rho} p_{(1)} \right) \mathbf{n}_1}{\left| \left(\mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p \right) - \left(F_1 - \frac{1}{\rho} p_{(1)} \right) \mathbf{n}_1 \right|},$$

$$\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2,$$

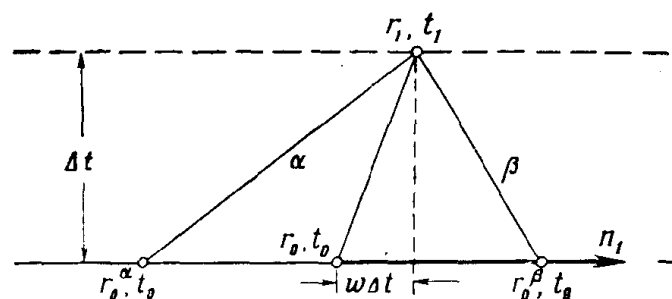
$$F_2 - \frac{1}{\rho} p_{(2)} = \mathbf{n}_2 \cdot \left(\mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p \right).$$

2. *Вычисление геометрического инварианта $1/r_2 + 1/r_3$.* Геометрический инвариант $1/r_2 + 1/r_3$ вычисляется с помощью конечных разностей,

$$\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_{1(2)} + \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{n}_{1(3)}.$$

3. *Определение изменения положения частицы в пространстве.* Частица, находящаяся в момент t_0 в положении $\mathbf{r}_0$, в момент $t_1 = t_0 + \Delta t$ находится в положении $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + (\omega \mathbf{n}_1)_m \Delta t$. За $(\omega \mathbf{n}_1)_m$ можно при этом в первом приближении взять $\omega \mathbf{n}_1$ в четырехмерной точке $(\mathbf{r}_0, t_0)$.

4. *Вычисление p и ω в точке $(\mathbf{r}_1, t_1)$.* Пусть главные характеристики α и β , проходящие через точку $(\mathbf{r}_1, t_1)$, проходят при $t = t_0$ через точки, определяемые векторами $\mathbf{r}_0^\alpha$ и $\mathbf{r}_0^\beta$ (фиг. 2). Тогда уравне-



Фиг. 2. К методу характеристик.

ния (5.1) и (5.2) можно интегрировать приближенно:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\rho a} \right)_{m_\alpha} [p(\mathbf{r}_1, t_1) - p(\mathbf{r}_0^\alpha, t_0)] + \omega(\mathbf{r}_1, t_1) - \omega(\mathbf{r}_0^\alpha, t_0) &= \\ &= - \left(\frac{a\omega}{r_2} + \frac{a\omega}{r_3} - F_1 \right)_{m_\alpha} \Delta t, \\ \left(\frac{1}{\rho a} \right)_{m_\beta} [p(\mathbf{r}_1, t_1) - p(\mathbf{r}_0^\beta, t_0)] - \omega(\mathbf{r}_1, t_1) + \omega(\mathbf{r}_0^\beta, t_0) &= \\ &= - \left(\frac{a\omega}{r_2} + \frac{a\omega}{r_3} + F_1 \right)_{m_\beta} \Delta t. \end{aligned}$$

При этом в силу того, что

$$\mathbf{r}_1 \approx \mathbf{r}_0 + \omega \mathbf{n}_1 \Delta t,$$

согласно (5.3), имеем

$$\mathbf{r}_0^a \approx \mathbf{r}_0 - a\mathbf{n}_1 \Delta t, \quad \mathbf{r}_0^b \approx \mathbf{r}_0 + a\mathbf{n}_1 \Delta t.$$

Средние вдоль главных характеристик значения, обозначенные индексами m_a и m_b , в первом приближении заменяются значениями в четырехмерных точках $(\mathbf{r}_0^a, t_0)$ и $(\mathbf{r}_0^b, t_0)$. Таким путем разностные уравнения, написанные выше, превращаются в линейную систему для определения величин $p(\mathbf{r}_1, t_1)$ и $w(\mathbf{r}_1, t_1)$.

5. *Вычисление $S(\mathbf{r}_1, t_1)$.* В силу (4.1) получаем

$$S(\mathbf{r}_1, t_1) = S(\mathbf{r}_0, t_0).$$

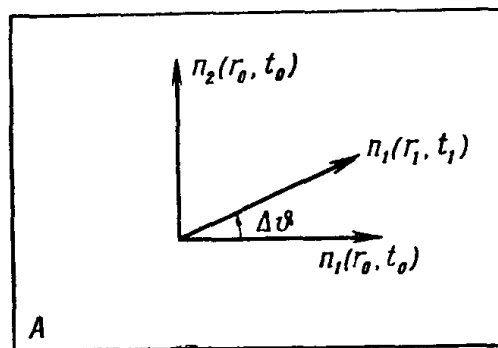
6. *Определение $\mathbf{n}_1(\mathbf{r}_0, t_1)$.* Мы имеем

$$\mathbf{n}_1(\mathbf{r}_1, t_1) = \mathbf{n}_1(\mathbf{r}_0, t_0) + \left(\frac{d\mathbf{n}_1}{dt}\right)_m \Delta t.$$

Этот вектор приближенно лежит в соприкасающейся плоскости, содержащей векторы $\mathbf{n}_1(\mathbf{r}_0, t_0)$ и $\mathbf{n}_2(\mathbf{r}_0, t_0)$ траектории, проведенной в точке $(\mathbf{r}_0, t_0)$. Поэтому, согласно (2.5) и (2.7), угол между векторами $\mathbf{n}_1(\mathbf{r}_0, t_0)$ и $\mathbf{n}_1(\mathbf{r}_1, t_1)$ равен

$$\Delta\vartheta = \left(\mathbf{n}_2 \cdot \frac{d\mathbf{n}_1}{dt}\right)_m \Delta t = \frac{1}{w_m} \left(F_2 - \frac{1}{\rho} p_{(2)}\right)_m \Delta t.$$

При этом в случае малых скоростей в первом приближении вместо среднего значения $w_m = \frac{1}{2} (w(\mathbf{r}_0, t_0) + w(\mathbf{r}_1, t_1))$ и $(F_2 - p_{(2)}/\rho)_m$ берут значения в точке $(\mathbf{r}_0, t_0)$, но лучше всего использовать среднее значение по области влияния точки $(\mathbf{r}_1, t_1)$ (т. е. по трехмерному шару с центром в точке $\mathbf{r}_0$ и радиусом $a\Delta t$; фиг. 3).



Фиг. 3. Вращение вектора $\mathbf{n}_1$ в соприкасающейся плоскости.

A — соприкасающаяся плоскость.

Этим состояние в точке $(\mathbf{r}_1, t_1)$ полностью определено. Вычисления могут быть улучшены за счет измельчения шага Δt или еще эффективнее улучшены применением итерации.

Описанный метод позволяет удовлетворить также граничным условиям. Если, например, газ должен двигаться вдоль фиксированной поверхности, то в граничных точках в качестве $\mathbf{n}_2$ целесообразно брать вектор нормали к этой поверхности. Уравнение (2.7) дает тогда, согласно разд. 6, вращение вектора $\mathbf{n}_1$ в касательной плоскости. Уравнение (2.8), которое описывает поворот вектора $\mathbf{n}_1$ из касательной плоскости, заменяется граничным условием, состоящим в том, что

вектор $\mathbf{n}_1$ должен постоянно оставаться в касательной плоскости к обтекаемой поверхности. Аналогично нужно поступать и в случае движущихся поверхностей.

10. Метод характеристик в случае двумерного потока

Если ограничиться двумерным потоком, то в простейших случаях метод характеристик осуществим и без автоматических электронных цифровых машин, так как число узлов сетки меньше и в каждый момент времени t поток может быть представлен графически в плоскости картиной линий тока. Однако по-прежнему большой труд составляют необходимые интерполяции.

Исследуем значение некоторых величин, характеризующих поток, в двумерном случае. Вектор бинормали $\mathbf{n}_3$ постоянен и перпендикулярен плоскости потока. Поэтому п. 1 в вычислительном процессе отпадает. В силу равенства

$$\frac{1}{r_3} = \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{n}_{1(3)} = -\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_{3(3)}$$

кручение $1/r_3$ обращается в нуль, величина $1/r_2$ является кривизной ортогональных траекторий поля $\mathbf{n}_1$. Так как соприкасающиеся плоскости совпадают с плоскостью потока, то изменения угла $\Delta\vartheta$ вектора $\mathbf{n}_1$ интегрируемы¹⁾. Угол ϑ может рассматриваться как угол между $\mathbf{n}_1$ и некоторым фиксированным направлением в плоскости потока. Производная (2) теперь является производной в направлении траектории, ортогональной к линиям тока.

Дифференциальные уравнения двумерного потока в характеристической форме будут следующие:

$$\frac{1}{\rho a} p_\alpha + w_\alpha = -\frac{aw}{r_2} + F_1, \quad (10.1)$$

$$\frac{1}{\rho a} p_\beta - w_\beta = -\frac{aw}{r_2} - F_1, \quad (10.2)$$

$$\frac{dS}{dt} = 0, \quad (10.3)$$

$$w \frac{d\vartheta}{dt} = F_2 - \frac{1}{\rho} p_{(2)}. \quad (10.4)$$

Уравнения (10.1) — (10.3) формально совпадают с уравнениями цилиндрически симметричного потока с расстоянием r_2 от центра. К ним прибавляется уравнение (10.4), которое описывает, каким образом поток вращением плоскости, касательной к траектории, реагирует на действие сил и, в частности, стремится выравнивать имеющийся перепад давления.

11. Примеры плоских нестационарных потоков

В качестве примера рассмотрим поток через сопло Лаваля при отсутствии внешних сил, $\mathbf{F} = 0$. К соплу примыкает канал с параллельными стенками, отделенный от сопла плоскостью при $t < 0$, мгновенно исчезающей при $t = 0$ (фиг. 4). По обе стороны плоскости раздела при $t \leq 0$ находится одинаковый газ ($\kappa = 1,4$) с $w_0 = 0$, $S_0 = 0$. Адиабатическое откачивание создает давление p_1 в канале; давление p_0 в сопле, такое, что $p_1 = p_0/119$, так что при исчезновении плоскости раздела в сопло побегит волна разрежения. Отношение давлений p_0/p_1 так велико, что при $t > 0$ на месте плоскости раздела

¹⁾ То есть $\mathbf{n}_2 \cdot d\mathbf{n}_1$ является полным дифференциалом.

течение мгновенно заменяется потоком сверхзвуковой скорости. Этим гарантируется, что поток в канале не станет оказывать обратного влияния на сопло. Таким образом, для расчета потока в сопле знание характеристик потока в канале не требуется.

Для определения возникающего потока газа используется процесс, описанный в разд. 9, с шагом $\Delta t = 1$. Кроме упрощений, указанных в разд. 10, целесообразны некоторые модификации в соответствии с особенностями примера. Как известно, для изэнтропических потоков имеет место соотношение

$$\frac{1}{\rho a} dp = \frac{2}{\kappa - 1} da.$$

При этом система (10.1) — (10.4) заменяется системой

$$\left(\frac{2}{\kappa - 1} a + w \right)_\alpha = - \frac{aw}{r_2}, \quad (11.1)$$

$$\left(\frac{2}{\kappa - 1} a - w \right)_\beta = - \frac{aw}{r_2}, \quad (11.2)$$

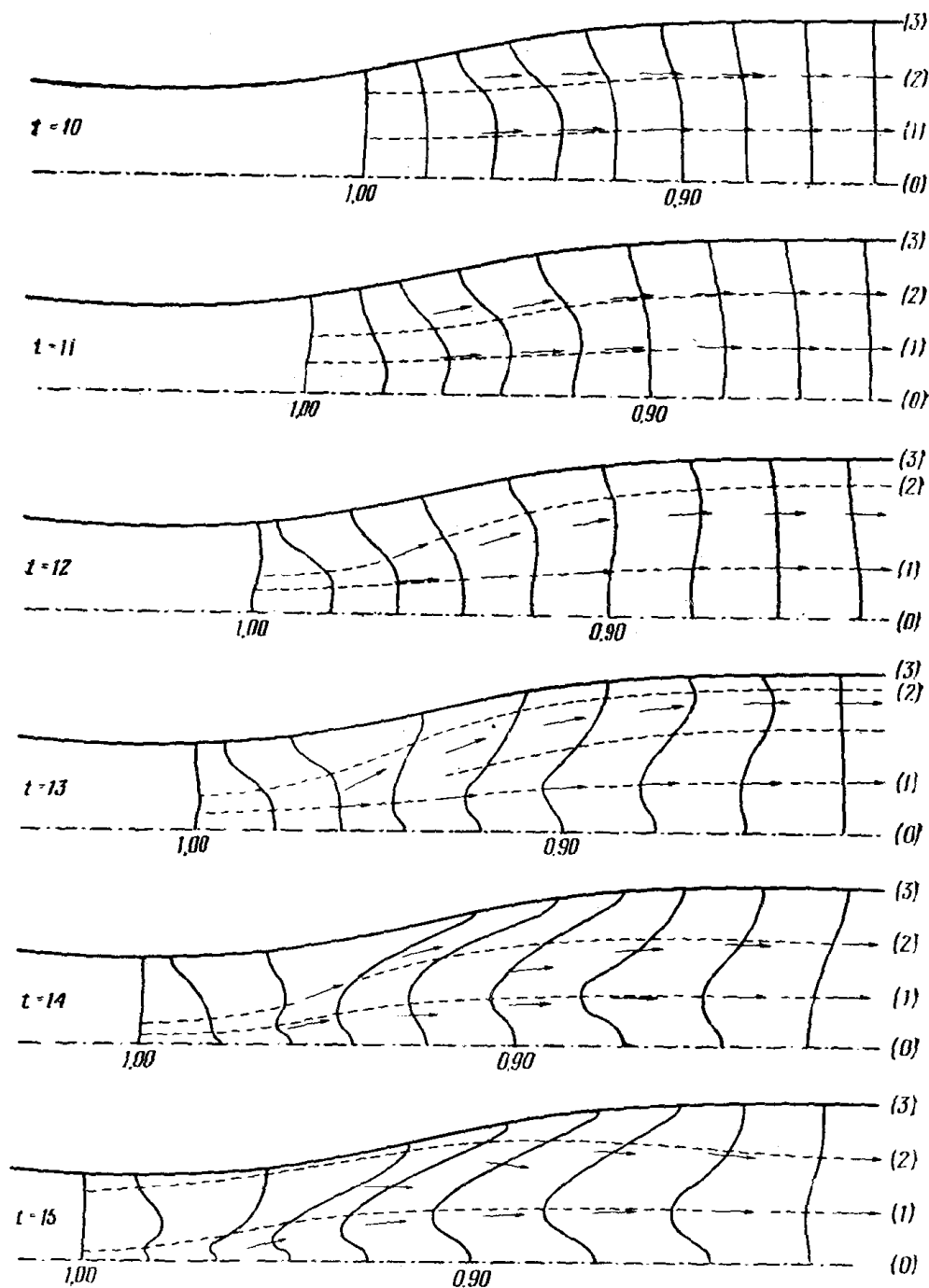
$$\frac{d\vartheta}{dt} = - \frac{2}{\kappa - 1} \frac{a}{w} a^{(2)}. \quad (11.3)$$



Фиг. 4. Сопло Лавая.
A — разделяющая плоскость.

Исходные точки r_0 , r_0^a и r_0^b берутся на каждой из четырех линий тока, а именно на фиксированных линиях (0) и (3) и на двух линиях, заключенных между ними и меняющихся со временем (фиг. 5). Это приводит к тому, что на отдельных полосах вдоль линий тока для решения уравнений (11.1) и (11.2) можно применять каждый из обычных одномерных методов характеристик (фиг. 6а и 6б). Но в противоположность одномерным потокам эти полосы нестационарных линий тока (1) и (2) не могут быть соединены в одну поверхность. Более того, после того как, согласно (11.3) (см. разд. 9, п. 6), найдено изменение вектора $\mathbf{n}_1$ вдоль старой линии тока, нужно в получающемся поле направлений нарисовать новые линии тока, чтобы получить базисные линии ближайших следующих полос. На фиг. 5 нанесены найденные для моментов 10, ..., 15 значения единичного вектора $\mathbf{n}_1$, имеющего направление скорости, и соответствующие линии тока. Фиг. 6а содержит полосы соответствующих линий тока (2) для моментов времени 11, ..., 14 с характеристиками, принадлежащими уравнениям (11.1) и (11.2). При этом речь идет о трех отдельных полосах, которые лишь нарисованы одна за другой. В противоположность этому на фиг. 6б полосы, соответствующие линии тока (3) вдоль стенки, составляют связную поверхность.

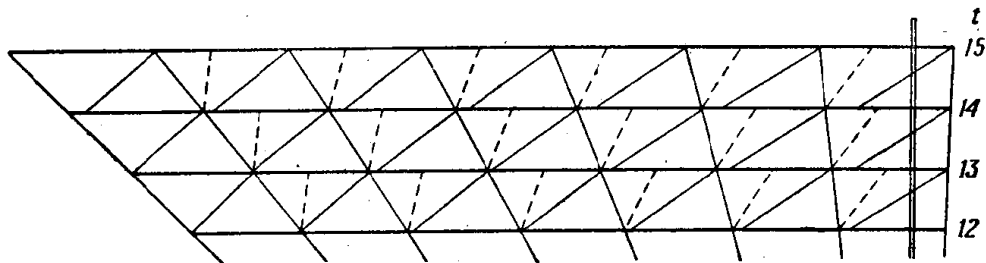
Кривые скоростей звука для $t = 10$ (фиг. 5) показывают, что на искривленной части поверхности (3) должно возникать понижение давления по отношению к соответствующим точкам на поверхности (0). Оно объясняется тем, что вследствие кривизны поверхности газ не может достаточно хорошо ей следовать. Так как, грубо говоря, газ имеет склонность течь от мест с повышенным давлением к местам



Ф и г. 5. Пример 1. Поле скоростей $\mathbf{p}_1$ ($\rightarrow$) с линиями тока (-----) и линиями равных скоростей звука (изобарами) (——) при скачкообразном начальном перепаде давления. Приведенные числа отнесены к скорости звука в сопле до начала движения.

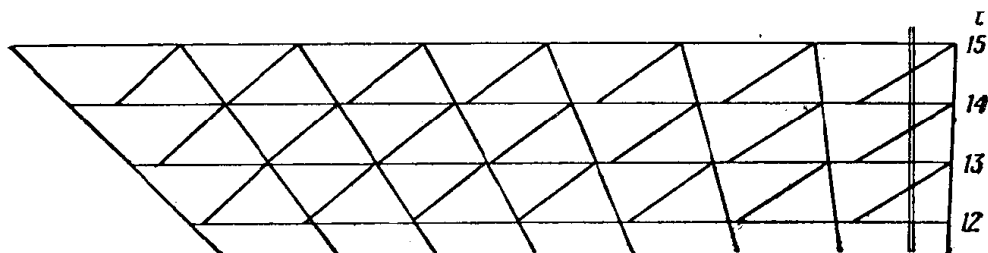
с пониженным давлением, то в качестве следствия получается вращение векторов $\mathbf{p}_1$ в направлении мест пониженного давления ($t = 11, 12$). Поэтому линия тока (2) приближается к поверхности (3). При $t = 11, 12, 13, 14$ наблюдается восполнение пониженного давления вдоль линии тока (3) до области повышенного давления, что и отображается сходящимися к (3) линиями тока. Вследствие повышенного давления в момент $t = 15$ уже имеет место обратное движение. В промежуточные моменты в окрестности линии тока (1), вблизи которой линии тока расходятся

наиболее быстро, возникает новая область пониженного давления. Очевидно, здесь речь идет о некотором регулярном колебании между поверхностями (0) и (3). Нужно ожидать, что имеющиеся колебания

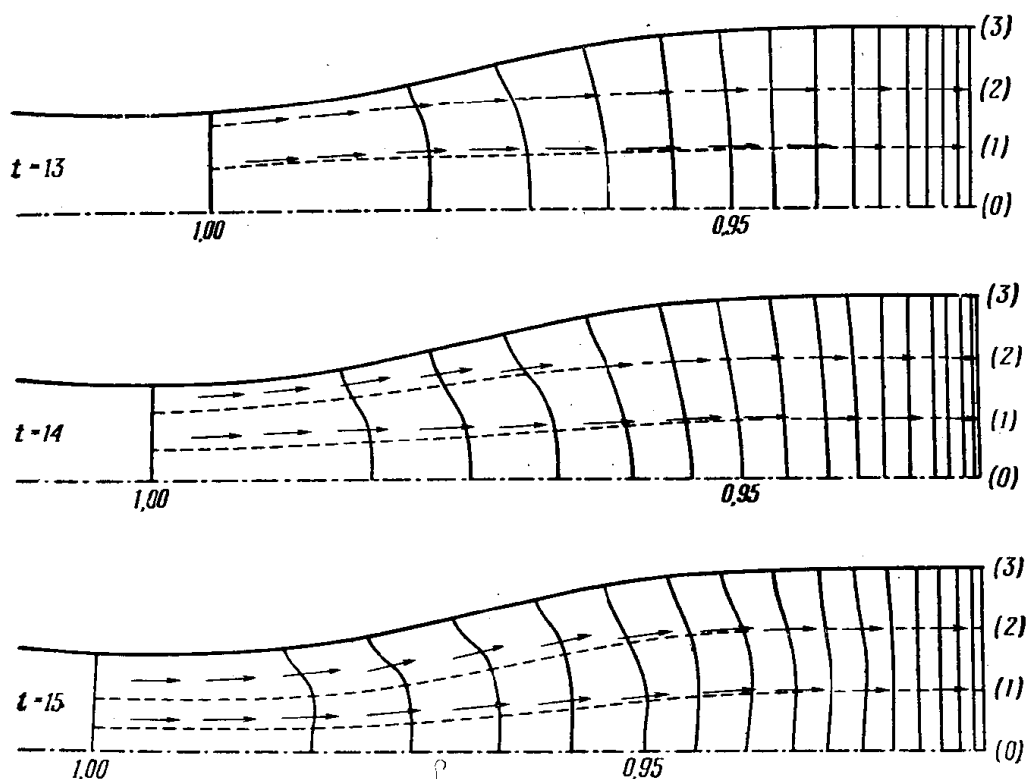


Ф и г. 6а. Пример 1. Сетка характеристик вдоль отдельных линий тока (не интегрируемый случай).

----- линии субстанционального дифференцирования.



Ф и г. 6б. Пример 1. Сетка характеристик вдоль неподвижной линии тока (3) (стенка).



Ф и г. 7. Пример 2. Поле скоростей n_1 (→) с линиями тока (-----) и линиями одинаковых скоростей звука (изобарами) (—) при непрерывном истечении.

в силу роста скоростей частиц потока будут еще больше усиливаться. В связи с этим интересно также поведение кривых скоростей звука (изобар), отмеченных 0,98—0,92 для $t=13, 14$ и 15 , которые при