j'intègre

MÉTHODES ET EXERCICES

MPSI

J.-M. Monier, G. Haberer, C. Lardon

Mathématiques
méthodes et exercices

CONFORME AU NOUVEAU PROGRAMME

- Synthèse des méthodes à connaître
- De nombreux exercices classés par méthode et par difficulté
- Des indications pour démarrer la résolution
- Tous les corrigés rédigés

DUNOD

j'intègre

MÉTHODES ET EXERCICES

MPSI

JEAN-MARIE **MONIER**
GUILLAUME **HABERER**
CÉCILE **LARDON**

Mathématiques
méthodes et exercices

常州大学图书馆
藏书章

DUNOD

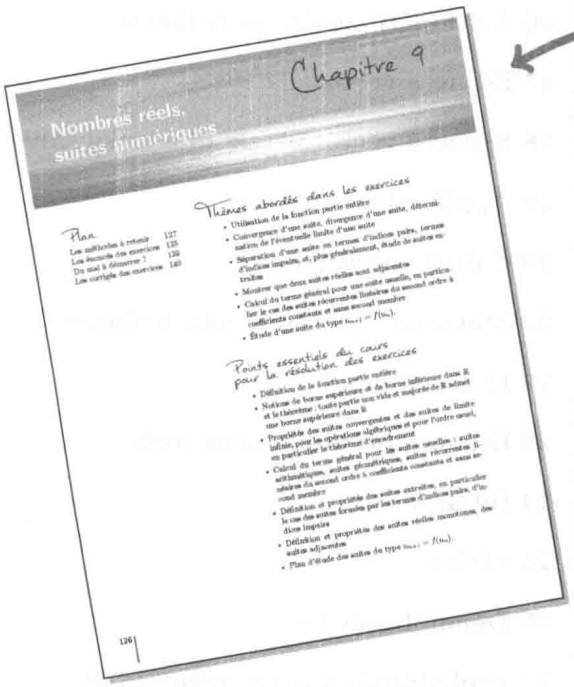
Conception et création de couverture : Atelier 3+

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.
Le Code de la propriété intellectuelle du 1er juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.
Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

© Dunod, Paris, 2013
ISBN 978-2-10-059836-6

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Pour bien utiliser cet ouvrage


Chapitre 9

Nombres réels, suites numériques

Plan

Les méthodes à retenir 127
Les énoncés des exercices 135
Du mal à démarrer ? 139
Les corrigés des exercices 140

Thèmes abordés dans les exercices

- Utilisation de la fonction partie entière
- Convergence d'une suite, divergence d'une suite, détermination de l'éventuelle limite d'une suite
- Séparation, d'une suite en termes d'indices pairs, termes d'indices impairs, et, plus généralement, étude de suites extraites
- Montrer que deux suites réelles sont adjacentes
- Calcul du terme général pour une suite usuelle, en particulier le cas des suites récurrentes linéaires du second ordre à coefficients constants et sans second membre
- Étude d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

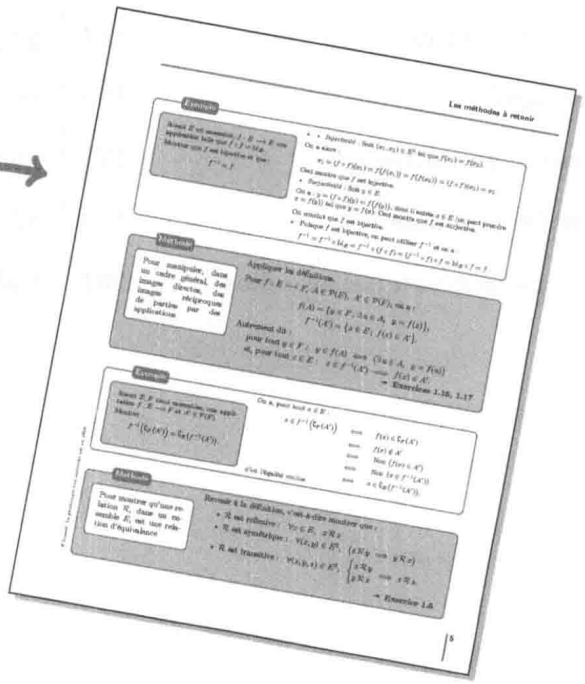
Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition de la fonction partie entière
- Notions de borne supérieure et de borne inférieure dans $\mathbb{R}$, et le théorème : toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$
- Propriété des suites convergentes et des suites de limite infinie, pour les opérations algébriques et pour l'ordre usuel, en particulier le théorème d'encadrement
- Calcul du terme général pour les suites usuelles : suites arithmétiques, suites géométriques, suites récurrentes linéaires du second ordre à coefficients constants et sans second membre
- Définition et propriété des suites extraites, en particulier le cas des suites formées par les termes d'indices pairs, d'indices impairs
- Définition et propriété des suites réelles monotones, des suites adjacentes
- Plan d'étude des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

126

La page d'entrée de chapitre

Elle propose un plan du chapitre, les thèmes abordés dans les exercices, ainsi qu'un rappel des points essentiels du cours pour la résolution des exercices.


Les méthodes à retenir

Exemple

Méthode

Exemple

Méthode

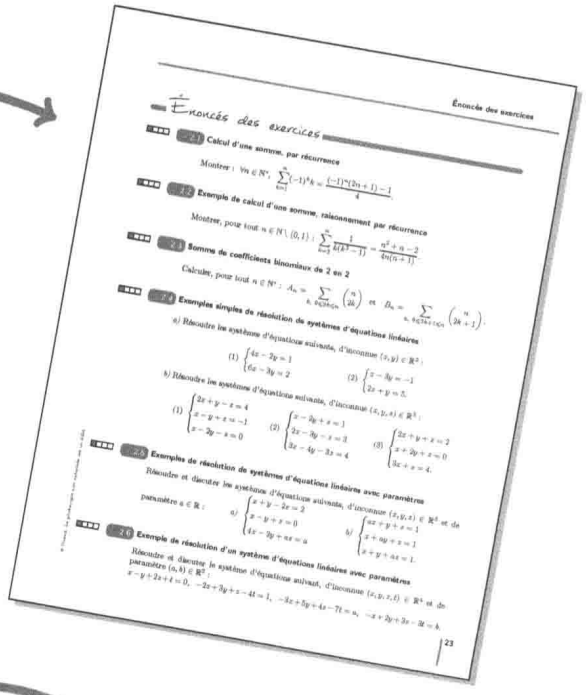
5

Les méthodes à retenir

Cette rubrique constitue une synthèse des principales méthodes à connaître, détaillées étape par étape, et indique les exercices auxquels elles se rapportent.
Chaque méthode est illustrée par un ou deux exemples qui la suivent.

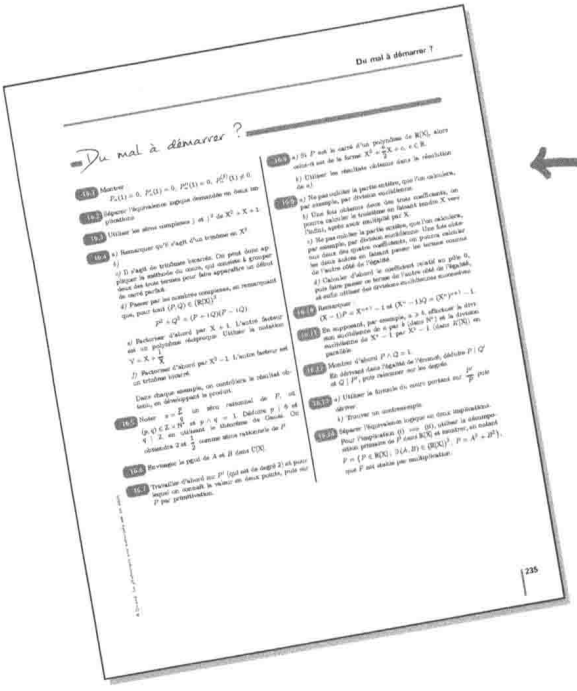
Énoncés des exercices

De nombreux exercices de difficulté croissante sont proposés pour s'entraîner. La difficulté de chaque exercice est indiquée sur une échelle de 1 à 4.



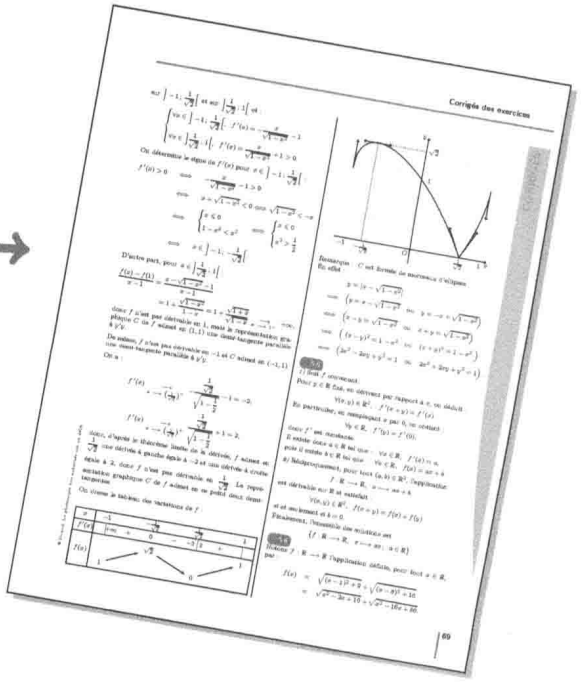
Du mal à démarrer ?

Des conseils méthodologiques sont proposés pour bien aborder la résolution des exercices.



Corrigés des exercices

Tous les exercices sont corrigés de façon détaillée.



© Dunod. Le photocopie non autorisée est un délit

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

Remerciements

Nous tenons ici à exprimer notre gratitude aux nombreux collègues qui ont accepté de réviser des parties du manuscrit :

Marc Albrecht, Bruno Arsac, Jean-Philippe Berne, Jacques Blanc, Gérard Bourgin, Sophie Cohéléach, Carine Courant, Sylvain Delpech, Hermin Durand, Jean Feyler, Viviane Gaggioli, Marguerite Gauthier, Daniel Genoud, André Laffont, Hadrien Larôme, Ibrahim Rihaoui, René Roy, Philippe Saadé, Marie-Dominique Siéfert, Marie-Pascale Thon, Audrey Verdier.

© Dunod. Le photocopie non autorisée est un délit

Table des matières

Pour bien utiliser cet ouvrage iv

Remerciements vii

1 Raisonnement, vocabulaire ensembliste 1

2 Calculs algébriques 18

3 Nombres complexes et trigonométrie 33

4 Fonctions d'une variable réelle 48

5 Calcul différentiel élémentaire 60

6 Fonctions usuelles 75

7 Calculs de primitives 90

8 Équations différentielles linéaires 108

9 Nombres réels, suites numériques 126

10 Limites, continuité 147

11 Dérivabilité 159

12 Analyse asymptotique 172

13 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ 190

14 Structures algébriques usuelles 201

15 Algèbre des polynômes 214

16 Arithmétique des polynômes 227

17 Espaces vectoriels 241

18 Espaces vectoriels de dimension finie 250

19 Applications linéaires 259

20 Calcul matriciel 272

21 Matrices et applications linéaires 287

22 Déterminants 302

23 Espaces préhilbertiens réels 317

24 Intégration 335

25 Séries 352

26 Dénombrements 370

27 Probabilités sur un univers fini 385

28 Variables aléatoires 402

29 Couples de variables aléatoires 416

30 Informatique 440

Index 473

© Dunod. Le photocopie non autorisée est un délit

Chapitre 1

Raisonnement, vocabulaire ensembliste

Plan

Les méthodes à retenir 2
Les énoncés des exercices 7
Du mal à démarrer ? 11
Les corrigés des exercices 12

Thèmes abordés dans les exercices

- Mise en oeuvre, sur des exemples simples, des différents types de raisonnement
- Égalités et inclusions d'ensembles obtenus par opérations sur des parties d'un ensemble
- Injectivité, surjectivité, bijectivité
- Image directe, image réciproque d'une partie par une application.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés des opérations entre ensembles, $\cap$, $\cup$, $\complement_E$, $\setminus$
- Définition de la fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble
- Définition du produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles
- Définition et propriétés de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité pour les applications
- Définition de l'image directe, de l'image réciproque d'une partie par une application
- Relations d'équivalence, relations d'ordre.

© Dunod. Le photocopie non autorisée est un délit

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour travailler de manière générale sur des ensembles

Essayer de passer par les éléments des ensembles, ou de calculer globalement sur les ensembles. La deuxième voie est en général plus courte et plus claire (si elle est praticable).

➟ **Exercices 1.1, 1.2, 1.7, 1.8, 1.16 à 1.18**

Exemple

Soient E un ensemble, $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.
Montrer : $(A \backslash C) \backslash (B \backslash C) = A \backslash (B \cup C)$.

On a :

$$\begin{aligned}(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) &= (A \cap \overline{C}) \setminus (B \cap \overline{C}) \\ &= (A \cap \overline{C}) \cap \overline{B \cap \overline{C}} \\ &= (A \cap \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup C) \\ &= (A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C} \cap C) \\ &= A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \\ &= A \cap (\overline{B \cup C}) \\ &= A \setminus (B \cup C).\end{aligned}$$

Méthode

Pour établir une égalité d'ensembles

Essayer de :

- soit montrer directement l'égalité
- soit montrer deux inclusions : $A \subset B$ et $B \subset A$
- soit utiliser les fonctions indicatrices des parties d'un ensemble

➟ **Exercices 1.2, 1.7, 1.8, 1.12, 1.18**

Dans chacune des deux premières options, on essaie de passer par les éléments ou de calculer globalement sur les ensembles.

Exemple

Soient E un ensemble, $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
Montrer :
$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$.

On a :

$$\begin{aligned}(A \setminus B) \cup (A \setminus C) &= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) \\ &= A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) \\ &= A \cap \overline{B \cap C} \\ &= A \setminus (B \cap C).\end{aligned}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

Exemple

Montrer :

$\{y \in \mathbb{R};\ \exists x \in [-1\,;\,2],\ y = x^2\} = [0\,;\,4]$.

- Soit $y \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $x \in [-1\,;\,2]$ tel que $y = x^2$.

Si $x \in [-1\,;\,0]$, alors $y \in [0\,;\,1]$.
Si $x \in [0\,;\,2]$, alors $y \in [0\,;\,4]$.
On déduit $y \in [0\,;\,4]$.

Ceci montre que le premier ensemble est inclus dans le second.

- Réciproquement, soit $y \in [0\,;\,4]$.

En notant $x = \sqrt{y}$, on a $x \in [0\,;\,2] \subset [-1\,;\,2]$ et $y = x^2$.

Ceci montre que le second ensemble est inclus dans le premier.

On conclut à l'égalité demandée.

Méthode

Pour montrer, par récurrence (faible), qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n tel que $n \geqslant n_0$

Montrer que :

- $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (*initialisation*)
- pour tout entier n fixé tel que $n \geqslant n_0$, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie (*hérédité*).

➟ **Exercice 1.5**

Exemple

On considère la suite de Fibonacci $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n.$$

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \phi_{n+1}^2 - \phi_{n+2}\phi_n = (-1)^n.$$

Initialisation :
Pour $n = 0$, on a : $\phi_1^2 - \phi_2\phi_0 = 1^2 - 1 \cdot 0 = 1 = (-1)^0$,
donc la formule est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Supposons que la formule soit vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.
On a alors :

$$\begin{aligned}
\phi_{n+2}^2 - \phi_{n+3}\phi_{n+1} &= \phi_{n+2}^2 - (\phi_{n+2} + \phi_{n+1})\phi_{n+1} \\
&= (\phi_{n+2}^2 - \phi_{n+2}\phi_{n+1}) - \phi_{n+1}^2 \\
&= \phi_{n+2}(\phi_{n+2} - \phi_{n+1}) - \phi_{n+1}^2 \\
&= \phi_{n+2}\phi_n - \phi_{n+1}^2 \\
&= -(\phi_{n+1}^2 - \phi_{n+2}\phi_n) \\
&= -(-1)^n = (-1)^{n+1},
\end{aligned}$$

donc la formule est vraie pour $n + 1$.

Ceci montre, par récurrence, que la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode

Pour montrer, par récurrence à deux pas, qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n tel que $n \geqslant n_0$

Montrer que :

- $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0 + 1)$ sont vraies (*initialisation*)
- pour tout entier n fixé tel que $n \geqslant n_0$, si $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie (*hérédité*).

➟ **Exercice 1.10**

© Dunod. Le photocopie non autorisée est un délit

Exemple

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}.$$

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_n > 0.$$

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1 > 0$, et, pour $n = 2$, on a $u_2 = \dfrac{u_1 + u_0}{2} = \dfrac{1}{2} > 0$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$ et pour $n = 2$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour n et $n+1$, où $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé. On a donc $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$, d'où $\dfrac{u_{n+1} + u_n}{2} > 0$, donc la propriété est vraie pour $n + 2$.

Ceci montre, par récurrence à deux pas, que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Méthode

Pour montrer, par récurrence forte, qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n tel que $n \geqslant n_0$

Montrer que :

- $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (*initialisation*)
- pour tout entier n fixé tel que $n \geqslant n_0$, si $\mathcal{P}(n_0), ..., \mathcal{P}(n)$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie (*hérédité*).

➟ **Exercice 1.11**

Exemple

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_{n+1} = \frac{u_1 + u_2^2 + \cdots + u_n^n}{n^n}.$$

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad 0 < u_n \leqslant 1.$

Initialisation : Pour $n = 1$, on a bien $0 < u_1 \leqslant 1$ car $u_1 = 1$.

Hérédité : Supposons, pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, que l'on ait :

$$\forall k \in \{1, ..., n\},\quad 0 < u_k \leqslant 1.$$

On a alors : $u_{n+1} = \dfrac{u_1 + u_2^2 + \cdots + u_n^n}{n^n} > \dfrac{0 + \cdots + 0}{n^n} = 0$

et $u_{n+1} = \dfrac{u_1 + u_2^2 + \cdots + u_n^n}{n^n} \leqslant \dfrac{1 + \cdots + 1}{n^n} = \dfrac{n}{n^n} = \dfrac{1}{n^{n-1}} \leqslant 1.$

Ceci montre, par récurrence forte : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad 0 < u_n \leqslant 1.$

Méthode

Pour résoudre une question portant sur injectivité, surjectivité, bijectivité, d'applications dans un cadre général

Essayer de :

- utiliser les définitions et les propositions du cours sur la composée de deux applications injectives (resp. surjectives)
- utiliser le résultat de l'exercice classique 1.14 (en le redémontrant).

➟ **Exercices 1.3, 1.14, 1.15**

Exemple

Soient E un ensemble, $f : E \longrightarrow E$ une application telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.
Montrer que f est bijective et que :

$$f^{-1} = f.$$

$\star$ • *Injectivité :* Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$.
On a alors :

$$x_1 = (f \circ f)(x_1) = f\big(f(x_1)\big) = f\big(f(x_2)\big) = (f \circ f)(x_2) = x_2.$$

Ceci montre que f est injective.

• *Surjectivité :* Soit $y \in E$.
On a : $y = (f \circ f)(y) = f\big(f(y)\big)$, donc il existe $x \in E$ (on peut prendre $x = f(y)$) tel que $y = f(x)$. Ceci montre que f est surjective.

On conclut que f est bijective.

$\star$ Puisque f est bijective, on peut utiliser f^{-1} et on a :

$$f^{-1} = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_E = f^{-1} \circ (f \circ f) = (f^{-1} \circ f) \circ f = \mathrm{Id}_E \circ f = f.$$

Méthode

Pour manipuler, dans un cadre général, des images directes, des images réciproques de parties par des applications

Appliquer les définitions.
Pour $f : E \longrightarrow F$, $A \in \mathcal{P}(E)$, $A' \in \mathcal{P}(F)$, on a :

$$f(A) = \big\{y \in F\,;\, \exists a \in A,\ \ y = f(x)\big\},$$
$$f^{-1}(A') = \big\{x \in E;\ f(x) \in A'\big\}.$$

Autrement dit :
pour tout $y \in F$: $\quad y \in f(A) \iff \big(\exists a \in A,\ \ y = f(a)\big)$
et, pour tout $x \in E$: $\quad x \in f^{-1}(A') \iff f(x) \in A'$.

➟ **Exercices 1.16, 1.17**

Exemple

Soient E, F deux ensembles, une application $f : E \longrightarrow F$ et $A' \in \mathcal{P}(F)$.
Montrer :

$$f^{-1}\big(\complement_F(A')\big) = \complement_E\big(f^{-1}(A')\big).$$

On a, pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\big(\complement_F(A')\big) &\iff f(x) \in \complement_F(A') \\ &\iff f(x) \notin A' \\ &\iff \text{Non } \big(f(x) \in A'\big) \\ &\iff \text{Non } \big(x \in f^{-1}(A')\big) \\ &\iff x \in \complement_E\big(f^{-1}(A')\big), \end{aligned}$$

d'où l'égalité voulue.

Méthode

Pour montrer qu'une relation $\mathcal{R}$, dans un ensemble E, est une relation d'équivalence

Revenir à la définition, c'est-à-dire montrer que :

- $\mathcal{R}$ est réflexive : $\forall x \in E,\ \ x \mathcal{R} x$
- $\mathcal{R}$ est symétrique : $\forall (x, y) \in E^2,\ \ (x \mathcal{R} y \implies y \mathcal{R} x)$
- $\mathcal{R}$ est transitive : $\forall (x, y, z) \in E^3,\ \begin{cases} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} z \end{cases} \implies x \mathcal{R} z.$

➟ **Exercice 1.6**

© Dunod. Le photocopie non autorisée est un délit

Exemple

On note $\mathcal{R}$ la relation définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ (x \mathcal{R} y \iff |x| = |y|).$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la classe de x modulo $\mathcal{R}$.

⋆ • On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = |x|$, d'où $x \mathcal{R} x$, donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

• On a, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$x \mathcal{R} y \iff |x| = |y| \iff |y| = |x| \iff y \mathcal{R} x,$$

donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

• On a, pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} z \end{cases} \iff \begin{cases} |x| = |y| \\ |y| = |z| \end{cases} \implies |x| = |z| \iff x \mathcal{R} z,$$

donc $\mathcal{R}$ est transitive.

On conclut que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$.

⋆ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la classe de x modulo $\mathcal{R}$ est :

$$\widehat{x} = \{y \in \mathbb{R};\ x \mathcal{R} y\} = \{y \in \mathbb{R};\ |x| = |y|\} = \begin{cases} \{x, -x\} & \text{si } x \neq 0 \\ \{0\} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Méthode

Pour montrer qu'une relation $\mathcal{R}$, dans un ensemble E, est une relation d'ordre

Revenir à la définition, c'est-à-dire montrer que :

- $\mathcal{R}$ est réflexive : $\forall x \in E,\ \ x \mathcal{R} x$
- $\mathcal{R}$ est antisymétrique : $\forall (x,y) \in E^2,\ \left(\begin{cases} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} x \end{cases} \implies x = y\right)$
- $\mathcal{R}$ est transitive : $\forall (x,y,z) \in E^3,\ \left(\begin{cases} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} z \end{cases} \implies x \mathcal{R} z\right)$.

➞ **Exercices 1.9, 1.13**

Exemple

On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\leqslant$ la relation définie dans E par, pour toutes $f, g \in E$:

$$f \leqslant g \iff (\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) \leqslant g(x)).$$

Montrer que $\leqslant$ est une relation d'ordre dans E. Cet ordre est-il total ?

⋆ • On a, pour toute $f \in E$: $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) \leqslant f(x)$, d'où $f \leqslant f$, donc $\leqslant$ est réflexive.

• On a, pour toutes $f, g \in E$:

$$\begin{cases} f \leqslant g \\ g \leqslant f \end{cases} \iff \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) \leqslant g(x) \\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ g(x) \leqslant f(x) \end{cases} \iff (\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = g(x)) \iff f = g,$$

donc $\leqslant$ est antisymétrique.

• On a, pour toutes $f, g, h \in E$:

$$\begin{cases} f \leqslant g \\ g \leqslant h \end{cases} \iff \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) \leqslant g(x) \\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ g(x) \leqslant h(x) \end{cases} \implies (\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) \leqslant h(x)) \iff f \leqslant h,$$

donc $\leqslant$ est transitive.

Ceci montre que $\leqslant$ est une relation d'ordre dans E.

⋆ Considérons $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto 0$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto x$.

On a $f(1) = 0 < 1 = g(1)$, donc on n'a pas $g \leqslant f$.

On a $f(1) = 0 > -1 = g(-1)$, donc on n'a pas $f \leqslant g$.

On conclut que l'ordre $\leqslant$ sur E n'est pas total.

Énoncés des exercices

1.1 Exemple de calcul ensembliste : inclusion

Soient E un ensemble, A, B, $C \in \mathcal{P}(E)$.

a) Montrer : $(A \cup B) \cap C \subset A \cup (B \cap C)$.

b) Établir qu'il y a égalité dans l'inclusion précédente si et seulement si : $A \subset C$.

1.2 Exemple de calcul ensembliste : équivalence entre deux égalités

Soient E un ensemble, $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer :

$$A \cap B = A \cap C \iff A \cap \complement_E(B) = A \cap \complement_E(C).$$

1.3 Exemple d'une restriction bijective

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par : $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-2}$.

a) Montrer qu'il existe un réel et un seul, noté a, n'ayant pas d'image par f.

b) Montrer qu'il existe un réel et un seul, noté b, n'ayant pas d'antécédent par f.

c) Montrer que la restriction g de f à $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ au départ et à $\mathbb{R}\setminus\{b\}$ à l'arrivée est bijective, et préciser l'application réciproque g^{-1} de g.

1.4 Exemple de calcul de composée de deux applications

On note $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = 1 + x, \quad g(x) = x^2.$$

Préciser $f \circ g$ et $g \circ f$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

1.5 Exemple de raisonnement par récurrence (faible)

On considère la suite de Lucas $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_{n+2} = L_{n+1} + L_n.$$

Montrer, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

a) $L_{n+1}^2 - L_n L_{n+2} = 5(-1)^{n+1}$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} L_k^2 = L_n L_{n+1} + 2$

c) $L_{2n} = L_n^2 - 2(-1)^n$ et $L_{2n+1} = L_n L_{n+1} - (-1)^n$.

© Dunod. Le photocopie non autorisée est un délit

1.6 Exemple de relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$

On note $\mathcal{R}$ la relation définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \big(x \mathcal{R} y \iff x^2 - 2x = y^2 - 2y\big).$$

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$.

b) Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la classe d'équivalence de x modulo $\mathcal{R}$.

1.7 Réunion ou intersection de produits cartésiens

Soient E, F deux ensembles, A_1, A_2 des parties de E, B_1, B_2 des parties de F.

a) Montrer : $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.

b) 1) Montrer : $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1) = (A_1 \cup A_2) \times B_1$.

2) A-t-on nécessairement : $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$?

1.8 Études de $\mathcal{P}(E \cap F)$ et de $\mathcal{P}(E \cup F)$

a) Montrer : $E \subset F \iff \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.

b) Établir : $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.

c) A-t-on : $\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$?

1.9 Exemple de relation d'ordre sur les entiers

On considère la relation $\mathcal{R}$ définie dans $\mathbb{N}^*$ par : $x \mathcal{R} y \iff \big(\exists n \in \mathbb{N}^*, \ y = x^n\big)$.

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est un ordre sur $\mathbb{N}^*$.

b) Est-ce que $\mathcal{R}$ est total ?

1.10 Exemple de raisonnement par récurrence à deux pas

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2} + 1.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

1.11 Exemple de raisonnement par récurrence forte

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!(n-k)!}.$$

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \in \mathbb{Q}_+^*$.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com