А. В. КРУШЕВСКИЙ

СПРАВОЧНИК по экономико-математическим моделям и методам

А. В. КРУШЕВСКИЙ

СПРАВОЧНИК ПО ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ МОДЕЛЯМ И МЕТОДАМ

КИЕВ «ТЕХНІКА» 1982

65.9 (2) 21 я2
К84

Крушевский А. В.

К84 Справочник по экономико-математическим моделям и методам. — К.: Техніка, 1982. — 208 с.

В пер.:1 р. 13000 экз.

В книге приведены экономико-математические модели, используемые при выработке плановых и управленческих решений на предприятиях, в министерствах, ведомствах, объединениях и в целом в народном хозяйстве. В принятой классификации рассмотрены отдельно экономико-математические модели для промышленного производства, сельского хозяйства, транспорта и торговли. Приведены методы прогнозирования технико-экономических показателей. Кратко изложены основные задачи математического программирования: методы решения систем линейных алгебраических уравнений, виды задач линейного программирования и методы их решения, двойственные задачи, целочисленное программирование, нелинейное и квадратичное программирование.

Рассчитан на инженерно-технических работников различных отраслей народного хозяйства, инженеров-экономистов, работающих в вычислительных центрах предприятий и отраслей, министерств и ведомств, научно-исследовательских институтов, а также может быть полезен студентам различных вузов.

$К \frac{2202000000\text{-}128}{М202(04)\text{-}82} 53.82$ 65.9(2)21я2

Рецензенты д-р физ.-мат. наук *Н. В. Яровицкий*, *В. В. Володин*

Редакция литературы по энергетике, электронике, кибернетике и связи

Зав. редакцией *З. В. Божко*

АРКАДИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ КРУШЕВСКИЙ, д-р экон. наук

Справочник по экономико-математическим моделям и методам

Редактор *Л. М. Друзенко*
Оформление художника *Л. А. Дикарева*
Художественные редакторы *Л. А. Дикарев*, *В. С. Шапошников*
Технический редактор *Е. О. Толстых*
Корректоры *Л. В. Ляшенко*, *В.Н. Руденко*

Информ. бланк № 1674.
Сдано в набор 19.03.81. Подписано в печать 23.06.82. БФ 07232
Формат 60×90 /16. Бумага типогр. № 3. Гарн. лит. Печ. выс.
Усл. печ. л.13. Усл.кр.-отт. 13,32. Уч.-изд. л. 16,95. Тираж 13000 экз. Зак. 1-398.
Цена 1 р.

Издательство «Техника», 252601, Киев, 1, ГСП, Крещатик, 5.

Отпечатано с матриц книжной фабрики им. М. В. Фрунзе на книжной фабрике «Коммунист» 310012, Харьков-12, Энгельса, 11.

ВВЕДЕНИЕ

Научно-технический прогресс неразрывно связан с совершенствованием системы планирования и управления на различных уровнях во всех отраслях науки, техники, производства и потребления. Одним из важных вспомогательных средств изучения технико-экономических процессов и выработки плановых управленческих решений является использование экономико-математических моделей, методов и современных электронно-вычислительных машин.

Экономико-математическая модель — это математическая задача, отражающая в абстрактном виде количественные закономерности процесса с определенной целью. Экономико-математическая модель должна реально (адекватно) отражать цели экономического процесса. Обычно цель выражена в виде критерия — целевой функции, а условия и закономерности — в виде математических соотношений. Поскольку все свойства и закономерности процесса учесть в экономико-математических моделях невозможно, то отражают лишь наиболее важные.*

Для использования экономико-математической модели необходимо произвести выбор подходящей модели, подготовить информацию, создать или подобрать метод решения задачи, составить и получить имеющуюся программу на ЭВМ, провести расчеты на ЭВМ и проанализировать полученные расчеты. Выбор математической модели должен основываться на анализе факторов, показателей и взаимосвязей между ними исходя из поставленных целей.

Математические модели одного и того же процесса могут быть различными в зависимости от требований, которые ставит перед собой исследователь. Чем больше показателей, факторов и взаимосвязей учитывается и чем точнее они вычисляются, тем полнее модель отражает экономический процесс и тем сложнее она становится. Использовать сложную модель трудно, так как она содержит много неизвестных величин, коэффициентов, соотношений. Подготовка информации и получение оптимального варианта в таких случаях становится трудной задачей. Поэтому на практике рассматриваются, как правило, несколько упрощенные модели, дающие удовлетворительные результаты. Если

* В дальнейшем экономико-математическую модель будем называть также математической моделью.

в модели учесть мало факторов, показателей и взаимосвязей, то в результате получается неприемлемое решение, так как в этом случае в модели недостаточно отражены реальные условия процесса. При моделировании необходимо четко формировать цель в виде критерия эффективности решаемой задачи. Экономические зависимости должны быть представлены в определенной количественной форме. Если реальные социально-экономические связи и факторы невозможно выразить в виде количественных зависимостей определенного вида, тогда эти зависимости учитываются приближенно с помощью более простых соотношений. Следует отметить, что наиболее распространенными являются линейные модели, так как в них просто и естественно интерпретируются закономерности процесса в виде линейных зависимостей. Большое значение имеет определение эффективного метода решения задачи, представленной в виде математической модели. Как правило, нелинейные модели сложнее линейных. Для нелинейных задач общего вида эффективных методов решения не разработано. Для многих нелинейных задач частного вида, например для задач квадратического программирования, имеются специальные сравнительно эффективные методы решения. Для задач линейного программирования разработаны универсальные эффективные методы решения. Многие модели сводятся к задаче целочисленного или смешанного программирования. Для таких задач однако имеются весьма приемлемые приближенные методы решения. Если для полученной модели нет приемлемого метода решения математической задачи, то его следует разработать. Однако надо помнить, что разработка такого метода является трудной задачей, требующей больших затрат времени и труда высококвалифицированных математиков. Практика показала, что для задач большой размерности наиболее эффективно использовать приближенные методы, которые не обязательно приводят к точному решению, но за приемлемое время могут дать вариант решения лучший имеющегося. Поэтому на практике очень часто оказывается полезным тот метод, который ва приемлемое время дает возможность получить лучший вариант (не обязательно оптимальный) по сравнению с имеющимся.

Для создания программы на ЭВМ по реализации выбранного метода необходимо разработать техническое задание на программирование полученного алгоритма решения задачи. В этом задании надо указать, в какой системе дисковой операционной ДОС или операционной ОС будет создаваться программа. Система ДОС несколько проще, но имеет меньшие возможности, чем ОС. В системе ОС можно более эффективно составить программу, чем в системе ДОС, а это даст возможность при эксплуатации программы затрачивать гораздо меньше машинного времени. При создании программы целесообразно использовать блочный метод, т. е. создавать программу по блокам. Полезно выделять такие важные блоки: программа ввода данных, алгоритм решения, вывод на печать. Поскольку форма подготовки входных данных и печать результатов часто может меняться, то блочный метод позволяет легче исправить программу, перерабатывая лишь нужные блоки и оставляя остальные без переделки. Важно также предусмотреть различные варианты распечатки данных при решении одной и той же задачи. Например, если решение задачи проводится для исследовательской работы, то надо распечатать промежуточные варианты, а если требуется лишь окончательный результат, то печать должна быть в виде удобного документа.

Для решения задачи на ЭВМ необходимо подготовить информацию по конкретным значениям коэффициентов, параметров, показателей, факторов. Входная информация не должна содержать синтаксических и семантических ошибок, т. е. сбор первичной информации и ее предварительная обработка не должны искажать реальный смысл исследуемого процесса. Прагматические ошибки, т. е. неправильная оценка факторов, часто не могут быть выявлены при подготовке первичной информации, а обнаруживаются лишь после получения результатов расчетов. Поэтому для устранения прагматических ошибок проводят повторные расчеты на основе откорректированной информации. Подготовка информации — это весьма ответственная и трудоемкая работа. Особое внимание следует обращать на точность подготовки нормативной информации, так как даже небольшие ошибки в ней приводят *к большим погрешностям в результатах расчетов. Так, при небольших увеличениях норм затрат сырья окажется очень существенным завышение потребностей в сырье при выполнении плана производства продукции. И наоборот, при занижении норм потребления сырья результаты расчетов покажут нереальное уменьшение потребности в сырье. Такое же положение имеет место и при расчете норм работы оборудования и других ресурсов. Следует также учитывать, что с течением времени нормативная информация должна изменяться с учетом технического прогресса и износа оборудования.*

Для более полного и эффективного использования информации создают банки данных. На основе полученной информации проводят расчеты, а затем анализируют полученные решения и выдают рекомендации. Обычно решение оптимизационных задач приводит к получению варианта, дающего улучшение значения критерия на 10—15%, что является весьма существенным. Однако часто анализ показывает, что при составлении модели не были учтены некоторые важные факторы и условия, а при подготовке информации были допущены значительные погрешности, поэтому полученные расчеты следует откорректировать с учетом допущенных погрешностей. Такая корректировка, обычно, снижает эффективность решения вдвое. Далее после проведенных корректировок, полученное решение также может показывать большой экономический эффект по сравнению с прежними программами реализации планов. Поэтому необходимо более тщательно проанализировать рекомендации, полученные на основе решения оптимизационных задач, и лишь после всестороннего обсуждения со специалистами принимать такие рекомендации.

В справочнике приведены основные математические модели технико-экономических процессов на уровне предприятий и по отраслям народного хозяйства: промышленности, сельскому хозяйству, транспорту, торговле. Изложены народнохозяйственные модели межотраслевого баланса и размещения производства.

Приведены основные математические методы решения оптимизационных задач для реализации приведенных выше решений.

Отзывы и пожелания просим направлять по адресу: 252601, Киев, 1, ГСП, Крещатик, 5, издательство «Техніка».

Глава 1

МОДЕЛИ НА УРОВНЕ ПРЕДПРИЯТИЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

В промышленном производстве большое значение приобретает организация выработки наиболее рациональных решений с целью повышения технического уровня производства, механизации и автоматизации производственных процессов, выявления внутренних резервов производственно-хозяйственной деятельности предприятия, лучшего использования ресурсов, сбыта продукции, решения задач технико-экономического планирования и т. д. Применение экономико-математических моделей и ЭВМ помогает решать эти задачи.

МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ ПЛАНИРОВАНИЯ НА ПРОМЫШЛЕННОМ ПРЕДПРИЯТИИ

Продукцию изготавливают в основных и вспомогательных цехах, между которыми устанавливают технико-экономические связи. Технологический процесс заключается в комплектовании изделий из отдельных узлов и деталей, экономический — в формировании затрат на комплектацию изделий в результате использования материальных, технических, финансовых и трудовых ресурсов. Задача состоит в комплексной увязке технологической и экономической информации. Ее можно решать с помощью матричных моделей. Если матричная модель построена в натуральных показателях, то она называется технологической матричной моделью, если же она построена в денежном выражении — экономической моделью.

Введем обозначения:

i, j — вид продукции;
$i, j = 1, 2, ..., n$ — виды основной продукции;
$i, j = n+1, n+2, ..., m$ — виды вспомогательной продукции;
a_{ij} — норма расхода i-го вида продукции на производство единицы j-го вида продукции;
y_i — конечная продукция;
x_i — выпуск продукции i-го вида;
x_j — выпуск продукции j-го вида;
r — вид материалов, сырья, полуфабрикатов, комплектующих изделий и деталей, топлива, электроэнергии и др.;
d_{rj} — норма расхода r-го вида материального ресурса на изготовление единицы j-го вида продукции;
s — вид фондов (машин);
f_{sj} — норма расхода фондов (машинного времени) s-го вида на изготовление единицы j-го вида продукции;
g — вид труда;

t_{gj} — норма затрат (рабочего времени) g-го вида труда на изготовление единицы j-го вида продукции.

Математическая модель — система линейных уравнений:

$$\sum_{i=j}^{m} a_{ij}x_j + y_i = x_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Решая эту систему уравнений методом Гаусса, получаем объемы x_i основного и вспомогательного производств. Затем определяем следующие потребности:

ресурсов

$$\sum_{j=1}^{m} d_{rj}x_j = d_r;$$

фондов

$$\sum_{j=1}^{m} f_{sj}x_j = f_s;$$

труда

$$\sum_{j=1}^{m} t_{gj}x_j = t_g.$$

Если d_r, f_s, t_g выходят за лимиты, то надо пересмотреть (уменьшить) конечную продукцию y_i и решить систему уравнений, т. е. определить новые значения x_i или увеличить ресурсы.

1. Нормативы затрат на основное и вспомогательное производство

Продукция производства		Продукция потребления: основная, $j = 1$	основная, $j = 2$	вспомогательная, $j = 3$	вспомогательная, $j = 4$	Конечная продукция y_i
Основная	$i = 1$	0,15	0,10	0,05	0,08	8,5
	$i = 2$	0,20	0,30	0,10	0,50	15,0
Вспомогательная	$i = 3$	0,30	0,50	0,40	0,22	0
	$i = 4$	0,10	0,15	0,20	0,30	0
Сырье	$r = 1$	1,0	1,5	0,8	2,0	
Энергия	$r = 2$	0,5	0,8	0,3	1,0	
Фонды	$s = 1$	2,5	1,3	2,0	2,8	
	$s = 2$	1,0	1,5	1,8	1,3	
Труд	$g = 1$	2,7	3,2	3,8	4,0	
	$g = 2$	2,0	4,0	1,5	1,0	

Пример 1. Нормативы затрат приведены в табл. 1. Выпуск основной продукции x_1, x_2, вспомогательной — x_3, x_4. Для определения этих величин составляем систему уравнений:

$0{,}15x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}05x_3 + 0{,}08x_4 + 8{,}5 = x_1$; $0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}1x_3 + 0{,}5x_4 + 15 = x_2$; $0{,}3x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}4x_3 + 0{,}22x_4 + 0 = x_3$; $0{,}1x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}2x_3 + 0{,}3x_4 + 0 = x_4$.

Решая эту систему, получаем план производства: $x_1 = 30$, $x_2 = 80$, $x_3 = 100$, $x_4 = 50$ ед.

Потребности ресурсов: $d_1 = 1 \cdot 30 + 1{,}5 \cdot 80 + 0{,}8 \cdot 100 + 2 \cdot 50 = 330$ ед.; $d_2 = 0{,}5 \cdot 30 + 0{,}8 \cdot 80 + 0{,}3 \cdot 100 + 1 \cdot 50 = 159$ ед.

Потребности фондов: $f_1 = 2{,}5 \cdot 30 + 1{,}3 \cdot 80 + 2 \cdot 100 + 2{,}8 \cdot 50 = 519$ ед.; $f_2 = 1 \cdot 30 + 1{,}5 \cdot 80 + 1{,}8 \cdot 100 + 1{,}3 \cdot 50 = 395$ ед.

Потребности труда: $t_1 = 2{,}7 \cdot 30 + 3{,}2 \cdot 80 + 3{,}8 \cdot 100 + 4 \cdot 50 = 917$ ед.; $t_2 = 2 \cdot 30 + 4 \cdot 80 + 1{,}5 \cdot 100 + 1 \cdot 50 = 580$ ед.

МОДЕЛЬ ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКОГО (ПРОИЗВОДСТВЕННОГО) ПЛАНИРОВАНИЯ

Задача заключается в выборе такой технологии, чтобы при минимальных затратах выполнить план производства и использовать выделенные ресурсы.

Введем обозначения:

j — вид технологии;
n — число видов технологий;
x_j — интенсивность использования j-й технологии;
i — вид продукции;
l — число видов продукции;
a_{ij} — норма выпуска i-го вида продукции при использовании j-й технологии с единичной интенсивностью;
Q_i — план выпуска i-го вида продукции;
s — вид ресурса;
b_s — количество выделенного ресурса s-го вида;
k — число всех видов выделяемых ресурсов;
b_{sj} — норма использования s-го вида ресурса при применении j-й технологии с единичной интенсивностью;
c_j — норма затрат при использовании j-й технологии с единичной интенсивностью.

Математическая модель при минимуме затрат на производство продукции:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$

при ограничениях на ресурсы

$$\sum_{j=1}^{n} b_{sj} x_j \leqslant b_s \quad (s = 1, 2, \ldots, k),$$

при выполнении плана производства

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, l),$$

где $x_j \geqslant 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Это задача линейного программирования.

З а м е ч а н и е 1. Если важную роль играет прибыль, то в модели вместо минимизации затрат на производство продукции рассматривают максимизацию прибыли $\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to \max$, где p_j — прибыль от использования j-й технологии с единичной интенсивностью.

Замечание 2. Если допускается перевыполнение плана, то в модели используют неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i \geqslant Q_i \quad (i \in M),$$

где M — множество тех видов продукции, для которых допускается перевыполнение плана. В такой постановке модель технико-экономического планирования выражена в виде задачи линейного программирования, для решения которой можно применить симплекс-метод.

МАКСИМИЗАЦИЯ ВЫПУСКА КОМПЛЕКТНОЙ ПРОДУКЦИИ

При выпуске продукции, состоящей из деталей, необходимо распределить комплектующие изделия между цехами так, чтобы достичь наибольшего числа комплектов. В модели технико-экономического планирования используется критерий максимума выпуска продукции в заданном ассортиментном соотношении.

Введем обозначения:

j — вид технологии;
n — число видов технологий;
x_j — интенсивность использования j-й технологии;
i — вид детали (комплектующего изделия);
l — число видов выпускаемых изделий;
l_i — число деталей i-го вида, необходимых для комплектования единицы выпускаемой продукции;
s — вид ресурса (сырья, энергии и т. д.);
k — число видов выделяемых ресурсов;
b_s — количество выделяемого ресурса s-го вида;
a_{ij} — норма выпуска деталей i-го вида при использовании j-й технологии с единичной интенсивностью;
b_{sj} — норма использования (расхода) s-го вида ресурсов при применении j-й технологии с единичной интенсивностью;
z — число единиц выпускаемой комплектной продукции.

Математическая модель

$$z \to \max;$$

$$\frac{1}{l_i}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant z \quad (i = 1, 2, \ldots, l);$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{sj}x_j \leqslant b_s \quad (s = 1, 2, \ldots, k);$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Эта модель выражена в виде задачи линейного программирования, решая которую получаем оптимальный план использования технологий x_j; $j = 1, 2, \ldots, n$.

МАКСИМИЗАЦИЯ ИЗГОТОВЛЯЕМОЙ КОМПЛЕКТНОЙ ПРОДУКЦИИ С УЧЕТОМ ВОЗМОЖНОСТИ ЦЕХОВ

Модель определяет программу выпуска деталей цехами, при которой максимизируется выпуск комплектной продукции.

Введем обозначения:

i — вид деталей, из которых формируется комплектная продукция;
l — число видов деталей;
r — вид станка (цеха), где изготовляются детали (каждый станок может выпускать детали только одного вида);
R — число видов станков (цехов);
b_r — число станков (цехов) r-го вида;
l_i — число деталей i-го вида, необходимых для комплектации единицы выпускаемой продукции;
a_{ir} — число деталей i-го вида, которые можно произвести на одном станке (цехе) r-го вида за единицу времени;
x_{ir} — число станков (цехов) r-го вида, которые должны выпускать детали i-го вида.

Математическая модель:

$$z \to \max;$$

$$\frac{1}{l_i}\sum_{r=1}^{R} a_{ir}x_{ir} \geqslant z \quad (i = 1, 2, \ldots, l);$$

$$\sum_{i=1}^{l} x_{ir} = b_r \quad (r = 1, 2, \ldots, R);$$

$$x_{ir} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, l; \ \ r = 1, 2, \ldots, R).$$

Модель выражена в виде задачи линейного программирования. Решив эту задачу известным методом, получим оптимальный план загрузки станков (цехов) по выпуску деталей.

Пример 2. На предприятии имеется $R = 5$ типов станков ($r = 1, 2, 3, 4, 5$), надо выпустить $l = 2$ видов деталей ($i = 1, 2$). Комплект состоит из двух видов изделий 1-го вида ($l_1 = 2$) и одного изделия 2-го вида ($l_2 = 1$). Число станков 1-го вида $b_1 = 5$, 2-го вида $b_2 = 3$, 3-го вида $b_3 = 40$, 4-го вида $b_4 = 9$, 5-го вида $b_5 = 2$. Возможность производства за один месяц деталей в штуках на станках приведена в табл. 2.

2. Норма производства деталей на станках за 1 месяц

Вид детали	Вид станка				
	1	2	3	4	5
1	100	400	20	200	600
2	15	200	2,5	50	250

Тогда математическая модель задачи следующая:

$$z \to \max;$$

$$\frac{1}{2}(100x_{11} + 400x_{12} + 20x_{13} + 200x_{14} + 600x_{15}) \geqslant z;$$

$$15x_{21} + 200x_{22} + 2{,}5x_{23} + 50x_{24} + 250x_{25} \geqslant z;$$

$$x_{11} + x_{12} = 5; \ \ x_{12} + x_{22} = 3; \ \ x_{13} + x_{23} = 40;$$

$$x_{14} + x_{24} = 9; \quad x_{15} + x_{25} = 2.$$

Решая эту задачу известными методами, получаем план загрузки станков: $x_{21} = x_{12} = x_{23} = x_{15} = 0$; $x_{11} = 5$; $x_{22} = 3$; $x_{13} = 40$; $x_{14} = 6$; $x_{25} = 2$; $x_{24} = 8$; $z = 1250$.

МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОЙ ЗАГРУЗКИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ МОЩНОСТЕЙ

Объем выпуска продукции зависит от мощности технологического оборудования, наличия производственных мощностей, степени и порядка их использования. В результате решения задачи использования производственных мощностей определяют оптимальное распределение номенклатуры изделий по группам оборудования данного предприятия. Построение математических моделей зависит от универсализации оборудования. Поэтому рассмотрим два типа моделей: 1-я для невзаимозаменяемых групп оборудования, 2-я для взаимозаменяемых групп оборудования.

МОДЕЛЬ ЗАГРУЗКИ НЕВЗАИМОЗАМЕНЯЕМЫХ ГРУПП ОБОРУДОВАНИЯ

Введем обозначения:

j — вид технологии;
n — число видов технологий;
i — вид производимой продукции;
l — число видов производимой продукции;
p_{ij} — прибыль, получаемая от реализации единицы продукции i-го вида, произведенной по j-й технологии;
r — вид оборудования;
R — число видов оборудования;
b_r — полезное время работы оборудования r-го вида;
a_{ij}^r — норма расхода машинного времени r-го оборудования при изготовлении единицы продукции i-го вида по j-й технологии;
x_{ij} — количество продукции i-го вида, производимой по j-й технологии.

Математическая модель заключается в максимизации прибыли при ограниченной возможности оборудования:

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_{ij} \to \max;$$

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^r x_{ij} \leqslant b_r \quad (r = 1, 2, \ldots, R);$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, l; \quad j = 1, 2, \ldots, n).$$

Модель сформирована в виде задачи линейного программирования, решая которую известными методами, получаем оптимальный план x_{ij} загрузки невзаимозаменяемого оборудования.

Пример 3. На заводе имеется $R = 3$ группы оборудования ($r = 1, 2, 3$), на которых изготовляется $l = 3$ вида продукции ($i = 1, 2, 3$) по $n = 3$ видам технологий ($j = 1, 2, 3$). Данные для составления модели приведены в табл. 3.

Математическая модель:

$$11x_{11} + 7x_{12} + 5x_{13} + 9x_{21} + 6x_{22} + 7x_{23} + 18x_{31} + 15x_{32} \to \max;$$
$$2x_{11} + 2x_{12} + x_{13} + 3x_{21} + 4x_{23} + 3x_{31} + 3x_{32} \leqslant 20;$$
$$3x_{11} + x_{12} + 2x_{13} + x_{21} + 2x_{22} + 5x_{31} + 6x_{32} \leqslant 34;$$
$$x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + 3x_{22} + x_{23} + x_{31} \leqslant 48;$$
$$x_{ji} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, 3; \ j = 1, 2, 3).$$

Решая поставленную задачу, например, симплекс-методом, получаем оптимальный план загрузки оборудования: $x_{12} = 10$, $x_{22} = 12$ тыс. шт., остальные значения $x_{ij} = 0$. Прибыль составит $7 \cdot 10 + 6 \cdot 12 = 142$ тыс. руб.

3. **Показатели производства продукции завода**

		Нормативные коэффициенты a_{ij}^r									Тыс. станко-часов
		$i=1$			$i=2$			$i=3$			
		$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	
Группы оборудования	$r=1$	2	2	1	3	0	4	3	3	0	20
	$r=2$	3	1	2	1	2	0	5	6	0	34
	$r=3$, станко-часов	0	1	3	2	3	1	1	0	0	48
Прибыль	p_{ij}, тыс. руб.	11	7	5	9	6	7	18	15	0	
Выпуск продукции	x_{ij}, тыс. шт.	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	

Замечание 1. Модель загрузки невзаимозаменяемых групп оборудования может решаться по критерию минимума затрат

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

при ограничениях: на выпуск продукции

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geqslant Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, l),$$

на ресурсы

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^r x_{ij} \leqslant b_r \quad (r = 1, 2, \ldots, R)$$

и на неотрицательность

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, l; \quad j = 1, 2, \ldots, n),$$

где c_{ij} — стоимость затрат на производство единицы продукции i-го вида по j-й технологии; Q_i — плановый объем выпуска i-й продукции.

Это также задача линейного программирования.

Замечание 2. Модель загрузки невзаимозаменяемых групп оборудования может решаться по критерию минимума затраченного станочного времени

$$\sum_{r=1}^{R} y_r \to \max,$$

при ограничениях: на выпуск продукции

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geqslant Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, l),$$

на используемое станочное время

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{r} x_{ij} + y_r = b_r \quad (r = 1, 2, \ldots, R)$$

и на неотрицательность переменных

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, l; \quad j = 1, 2, \ldots, n),$$
$$y_r \geqslant 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, R),$$

где y_r — недоиспользованное время работы станков r-го вида; Q_i — плановый объем производства продукции i-го вида.

Это также задача линейного программирования.

МОДЕЛЬ ЗАГРУЗКИ ВЗАИМОЗАМЕНЯЕМЫХ ГРУПП ОБОРУДОВАНИЯ

Для составления плана выпуска продукции на предприятии, имеющем универсальное оборудование разной производительности при выполнении разных операций (изделий), можно провести расчеты программы с помощью следующей модели.

Введем обозначения:

r — вид станка (оборудования);
R — число видов станков;
i — вид производимой продукции;
l — число видов производимой продукции;
λ_{ri} — норма затрат времени r-го вида станка на производство единицы i-го вида продукции;
p_{ri} — прибыль, получаемая предприятием от реализации единицы i-го вида продукции, произведенной на r-м виде станков;
x_{ri} — количество продукции i-го вида, производимой на r-м виде оборудования;
Q_i — плановый объем производства продукции i-го вида;
b_r — фонд времени работы станков r-го вида;
c_{ri} — себестоимость производства единицы продукции i-го вида на r-м виде станков.

Математическая модель: максимизация прибыли $\sum_{r=1}^{R} \sum_{i=1}^{l} p_{ri} x_{ri} \to \max$ или минимизация затрат $\sum_{r=1}^{R} \sum_{i=1}^{l} c_{ri} x_{ri} \to \min$ при ограничениях на выпуск продукции и фонд машинного времени

$$\sum_{r=1}^{R} x_{ri} = Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, l);$$

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_{ri} x_{ri} \leqslant b_r \quad (r = 1, 2, \ldots, R);$$

$$x_{ri} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, l; \quad r = 1, 2, \ldots, R).$$

Это задача распределительного типа, которую можно решить специальным методом или симплекс-методом для линейного программирования.

МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОБОРУДОВАНИЯ ПО ВИДАМ РАБОТ

Имеется R видов работ и R видов оборудования. Надо назначить один и только один станок для выполнения определенного вида работы. Эффективность выполнения работ на различном оборудовании можно рассчитывать согласно следующей модели.

Введем обозначения:

r — вид оборудования;
R — число видов оборудования;
i — вид работы;
R — число видов работы;
a_{ir} — эффективность (прибыль), получаемая при выполнении i-го вида работы на r-м виде оборудования;
x_{ir} — неизвестная величина, равная 0, если i-й вид работы не выполняется на r-м виде оборудования, и равная 1, если i-й вид работ выполняется на r-м виде оборудования.

Математическая модель:

$$\sum_{i=1}^{R} \sum_{r=1}^{R} a_{ir} x_{ir} \to \max;$$

$$\sum_{r=1}^{R} x_{ir} = 1, \quad \sum_{i=1}^{R} x_{ir} = 1, \quad x_{ir}(1 - x_{ir}) = 0.$$

Это задача нелинейного программирования.

Пример 4. Имеется $R = 3$ вида станков и 3 вида работ. Прибыль a_{ir} от закрепления работ за станками следующая:

	Виды работ 1	2	3
Виды станков 1	2	2	5
2	3	4	3
3	4	1	7

Требуется распределить виды работ по одной на каждый станок так, чтобы общая суммарная прибыль была наибольшей.

Математическая модель:

$$2x_{11} + 2x_{12} + 5x_{13} + 3x_{21} + 4x_{22} + 3x_{23} + 4x_{31} + x_{32} + 7x_{33} \to \max;$$
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1; \quad x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1; \quad x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1;$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1; \quad x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1; \quad x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1;$$
$$x_{11}(1 - x_{11}) = 0; \quad x_{12}(1 - x_{12}) = 0; \quad x_{13}(1 - x_{13}) = 0;$$
$$x_{21}(1 - x_{21}) = 0; \quad x_{22}(1 - x_{22}) = 0; \quad x_{23}(1 - x_{23}) = 0;$$
$$x_{31}(1 - x_{31}) = 0; \quad x_{32}(1 - x_{32}) = 0; \quad x_{33}(1 - x_{33}) = 0.$$

Решая задачу, получаем: $x_{13} = x_{22} = x_{31} = 1$; $x_{11} = x_{12} = x_{21} = x_{23} = x_{32} = x_{33} = 0$; т. е. надо назначить работу 3-го вида на 1-й станок, 2-го вида на 2-й станок, 1-го вида на 3-й станок и при этом будет максимальная эффективность (прибыль $5 + 4 + 4 = 13$ ед.).

МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОБОРУДОВАНИЯ ПО МЕСТАМ

При обработке деталей на нескольких станках необходимо перевозить их от станка к станку в зависимости от технологии производства. В массовом производстве имеет смысл расположить станки таким образом, чтобы общие суммарные перевозки деталей были наименьшими.

Введем обозначения:

i, j — номера станков;
n — число всех станков;
l, r — номера мест, где можно расположить станки;
n — число всех мест, где можно расположить станки;
a_{ij} — стоимость перевозки всех деталей на единицу расстояния от i-го до j-го станка;
A — матрица элементов a_{ij};
c_{lq} — расстояние между l-м и q-м пунктами;
C — матрица элементов c_{lq};
$T = \begin{Bmatrix} 1, 2, \ldots, n \\ t_1, t_2, \ldots, t_n \end{Bmatrix}$ — подстановка, которая означает, что t_k-й станок будет расположен в k-м месте ($k = 1, 2, \ldots, n$);
$c_{t_i t_j}$ — расстояние между i-м и j-м станком, если станки назначены на места согласно подстановке T;
$C(T)$ — матрица, состоящая из элементов $c_{t_i t_j}$ (матрица $C(T)$ образуется из матрицы C путем перестановки в C строк и столбцов согласно подстановке T).

Тогда задача состоит в нахождении такой подстановки T^*, при которой достигается минимум общей стоимости перевозок деталей

$$M(A, C(T)) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{t_i t_j} \to \min,$$

т. е.

$$\min_T M(A, C(T)) = M(A, C(T^*)).$$

Сформулированная задача является квадратичной задачей о назначениях. Для решения такой задачи нет эффективных точных методов решения, но имеются достаточно приемлемые приближенные методы, один из которых приведен в гл. 8.

Пример 5. Имеется четыре станка, которые надо расположить на одной прямой линии на одинаковом расстоянии друг от друга. Расстояние между соседними станками принимается за единицу. Расстояния c_{lq} и стоимость перевозок на единицу расстояния a_{ij} заданы в виде матриц

$$C = (C_{lq}) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \qquad A = (a_{ij}) = \begin{Vmatrix} 0 & 4 & 8 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 8 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Требуется разместить станки таким образом, чтобы общая стоимость перевозок была наименьшей. Заметим, что обе матрицы симметричные, поэтому вычисления будут проще. Если расположить 1-й станок на 1-е место, 2-й на 2-е, 3-й на 3-е, 4-й на 4-е, то общие затраты на перевозку $M = (1 \times 4 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4) \cdot 2 = 92$.

Рассчитаем функцию

$$L(A, C(T_{rs})) = 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r,s}} (a_{ir} - a_{is})(c_{is} - c_{ir}).$$

Очевидно функция L всегда симметрична относительно своих аргументов r и s. Поэтому ее значение можно вычислить только для $r < s$.

Проведя вычисления, получаем:

$$L(A, C(T_{rs})) = \left\{\begin{array}{l} -18 \text{ при } r=1,\ s=2;\ -4 \text{ при } r=1,\ s=3; \\ -6 \text{ при } r=1,\ s=4; \\ -6 \text{ при } r=2,\ s=3;\ -4 \text{ при } r=2,\ s=4; \\ +2 \text{ при } r=3,\ s=4 \end{array}\right\}.$$

Так как для этой функции имеются отрицательные значения, то выберем наименьшее из них, —18, полученное при $r = 1$ и $s = 2$. Полагая $r_1 = 1$, $s_1 = 2$, получаем подстановку $T_1 = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{Bmatrix}$ и образуем матрицу C_1. Для этой цели в матрице C сначала переставим 1-й и 2-й столбцы, а затем в полученной матрице поменяем местами 1-ю и 2-ю строки. Выполняя действия последовательно, получаем:

$$C_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Теперь вычислим значения для $L(A, C_1(T_{rs}))$, они оказываются все положительными. Поэтому вычисляем $M_1 = M(A, C_1) = 74$. Как видно, затраты существенно снизятся на 18 ед., если 1-й станок поставить на 2-е место, а 2-й на 1-е. Выберем случайную подстановку $T_2 = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{Bmatrix}$ и вычислим для нее матрицу

$$C_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

и значения

$$L(A, C_2(T_{rs})) = \left\{\begin{array}{l} 18 \text{ при } r=1,\ s=2;\ 12 \text{ при } r=1,\ s=3; \\ -6 \text{ при } r=1,\ s=4; \\ -6 \text{ при } r=2,\ s=3;\ 12 \text{ при } r=2,\ s=4; \\ -2 \text{ при } r=3,\ s=4. \end{array}\right\}$$

Выбираем наименьшее отрицательное значение —6, полученное при $r = 1$, $s = 4$. Полагая $r_1 = 1$, $s_1 = 4$, делаем в матрице C_2 перестановку T_{14}. Тогда получим

$$C_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Для матрицы C_3 составляем $L(A, C_3(T_{rs}))$ и получаем, что все ее значения положительны. Поэтому вычисляем $M_2 = M(A, C_3) = 70$, возможное при подстановке $T^* = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{Bmatrix}$, которая получена из подстановки T_2 путем перемены местами в ней чисел 2 и 3, стоящих на 1-м и 3-м местах. В соответствии с подстановкой, надо 3-й станок поместить на 1-е место, 1-й на 2-е, 4-й на 3-е, 2-й на 4-е.

Очевидно, $M_2 < M_1$, поэтому следует взять еще случайную подстановку и для нее получить локальный минимум. Например, взяв подстановку $T_3 = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{Bmatrix}$, получим:

$$C_4 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$