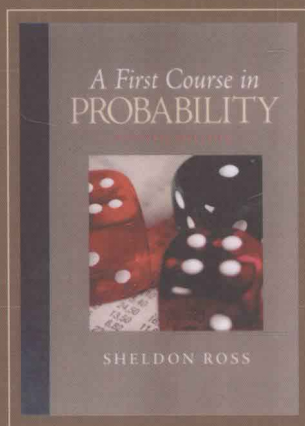


A First Course in Probability

概率论基础教程

(英文版·第8版)

[美] Sheldon M. Ross 著



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS



图灵原版数学·统计学系列

A First Course in Probability

概率论基础教程

(英文版·第8版)

[美] Sheldon M. Ross 著

人民邮电出版社
北 京

图书在版编目(CIP)数据

概率论基础教程:第8版:英文/(美)罗斯(Ross, S. M.)
著. —北京:人民邮电出版社, 2009.7
(图灵原版数学·统计学系列)
ISBN 978-7-115-20954-2

I. 概… II. 罗… III. 概率论—教材—英文 IV. O211

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第088999号

内 容 提 要

本书是世界各国高校广泛采用的概率论教材,通过大量的例子讲述了概率论的基础知识,主要内容有组合分析、概率论公理化、条件概率和独立性、离散和连续型随机变量、随机变量的联合分布、期望的性质、极限定理等。本书附有大量的练习,分为习题、理论习题和自检习题三大类,其中自检习题部分还给出全部解答。

本书适用于大专院校数学、统计、工程和相关专业(包括计算科学、生物、社会科学和管理科学)的学生阅读,也可供各学科专业科技人员参考。

图灵原版数学·统计学系列

概率论基础教程(英文版·第8版)

-
- ◆ 著 [美] Sheldon M. Ross
责任编辑 明永玲
- ◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街14号
邮编 100061 电子函件 315@ptpress.com.cn
网址 <http://www.ptpress.com.cn>
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷
- ◆ 开本: 700×1000 1/16
印张: 34
字数: 648千字 2009年7月第1版
印数: 1-2 500册 2009年7月北京第1次印刷
著作权合同登记号 图字: 01-2009-3150号
ISBN 978-7-115-20954-2/O1
-

定价: 69.00元

读者服务热线: (010) 51095186 印装质量热线: (010) 67129223

反盗版热线: (010) 67171154

前 言

法国著名数学家和天文学家拉普拉斯侯爵（人称“法国的牛顿”）曾经说过：“我们发现概率论其实就是将常识问题归结为计算，它使我们能够精确地评价凭某种直观感受到的、往往又不能解释清楚的见解……值得注意的是，概率论这门起源于机会游戏的科学，早就应该成为人类知识中最重要的组成部分……生活中那些最重要的问题绝大部分恰恰是概率论问题。”尽管许多人认为，这位对概率论的发展作出过重大贡献的著名侯爵说话有点过头，然而今日，概率论已经成为几乎所有的科学工作者、工程师、医务人员、法律工作者以及企业家们手中的基本工具，这是一个不争的事实。事实上，现代人们不再问“是这样么？”而是问“这件事发生的概率有多大？”

本书试图成为概率论的入门书。读者对象是数学、统计、工程和其他专业（包括计算机科学、生物学、社会科学和管理科学）的学生。他们的先修知识只是初等微积分。本书试图介绍概率论的数学理论，同时通过大量例子说明这门学科的广泛的应用。

第1章介绍了组合分析的基本原理，它是计算概率的最有效的工具。

第2章介绍了概率论的公理体系，并且指出如何应用这些公理进行概率计算。

第3章讨论概率论中极为重要的概念，即事件的条件概率和事件间的独立性。通过一系列例子说明，当部分信息可利用时，条件概率就会发挥它的作用；即使在没有这部分信息时，条件概率也可以使概率的计算变得容易、可行。利用“条件”计算概率这一极为重要的技巧还将出现在第7章，在那里我们用它来计算期望。

在第4~6章，我们引进随机变量的概念。第4章讨论离散随机变量，第5章讨论连续随机变量，而将随机变量的联合分布放在第6章。在第4章和第5章中讨论了随机变量的期望和方差，并且对许多常见的随机变量，求出了相应的期望和方差。

第7章讨论了期望值和它的一些重要的性质。书中引入了许多例子，解释如何利用随机变量和的期望等于随机变量期望的和这一重要规律来计算随机变量的期望，本章中还有几节介绍条件期望（包括它在预测方面的应用）和矩母函数等。最后一节介绍了多元正态分布，同时给出了来自正态总体的样本均值和样本方差的联合分布的简单证明。

第8章介绍了概率论主要的理论结果. 特别地, 我们证明了强大数定律和中心极限定理. 关于强大数定律的证明, 我们假定随机变量具有有限的四阶矩. 在这种假定之下, 证明十分简单. 在中心极限定理的证明中, 我们假定了莱维连续性定理成立. 在本章中, 我们还介绍了若干概率不等式, 如马尔可夫不等式、切比雪夫不等式和切尔诺夫界. 在最后一节, 我们给出用随机变量的相应概率去近似独立伯努利随机变量和的相关概率的误差界.

第9章介绍了一些附加主题, 如马尔可夫链、泊松过程以及信息编码理论初步. 第10章介绍了统计模拟.

新版变化

第8版将教材内容进一步扩充与调整, 加入了很多新的习题和例子. 内容的选取不仅要适合学生的兴趣, 还要有助于学生建立概率直觉. 为此, 第1章列5d讨论了淘汰赛, 第7章的例4k和例5i是多个赌徒破产问题的例子.

新版最主要的变化是随机变量和的期望等于随机变量期望的和这一重要规律, 在第4章首次出现 (而不是旧版的第7章). 第4章还针对概率实验的样本空间有限时这一特殊情况, 给出了这一规律的新的且初等的证明.

6.3节介绍独立随机变量的和, 还有一些变化出现在这一节. 6.3.1节是新增的一节, 推导独立且具有相同均匀分布的随机变量和的分布, 并用所得到的结果证明了, 具有 $(0, 1)$ 上均匀分布的独立随机变量, 和大于1的那些随机变量的平均个数是 e . 6.3.5节也是新增的一节, 推导具有独立几何分布但均值不同的随机变量和的分布.

致谢

Hossein Hamedani 仔细审阅了本书, 对此我深表感谢. 同时我还要感谢下列人员对于这一版的改进提出宝贵的建议: Amir Ardestani (德黑兰理工大学), Joe Blitzstein (哈佛大学), Peter Nuesch (洛桑大学), Joseph Mitchell (纽约州立大学石溪分校), Alan Chambliss (精算师), Robert Kriner, Israel David (本古里安大学), T. Lim (乔治·梅森大学), Wei Chen (罗格斯大学), D. Monrad (伊利诺伊大学), W. Rosenberger (乔治·梅森大学), E. Ionides (密歇根大学), J. Corvino (拉法叶学院), T. Seppalainen (威斯康星大学).

最后, 我要感谢很多对本书各个版本给出十分有价值的意见的人们. 其中, 对第8版的改进给出意见的人, 在其名字前面加了星号.

K. B. Athreya (爱荷华州立大学)

版 权 声 明

Original edition, entitled *A First Course in Probability, Eighth Edition*, 978-0-13-603313-4 by Sheldon Ross, published by Pearson Education, Inc., publishing as Prentice Hall, Copyright © 2010, 2006, 2002, 1998, 1994, 1988, 1984, 1976.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from Pearson Education, Inc.

China edition published by PEARSON EDUCATION ASIA LTD. and POSTS & TELECOM PRESS Copyright © 2009.

This edition is manufactured in the People's Republic of China, and is authorized for sale only in People's Republic of China excluding Hong Kong, Macao and Taiwan.

本书影印版由Pearson Education Asia Ltd. 授权人民邮电出版社独家出版。未经出版者书面许可，不得以任何方式复制或抄袭本书内容。

仅限在中华人民共和国（不包括香港、澳门特别行政区和台湾地区）销售发行。

本书封面贴有Pearson Education（培生教育出版集团）激光防伪标签，无标签者不得销售。

版权所有，侵权必究。

For Rebecca

- Richard Bass (康涅狄格大学)
- Robert Bauer (伊利诺伊大学厄巴纳-尚佩恩分校)
- Phillip Beckwith (密歇根科技大学)
- Arthur Benjamin (哈维姆德学院)
- Geoffrey Berresford (长岛大学)
- Baidurya Bhattacharya (特拉华大学)
- Howard Bird (圣克劳德州立大学)
- Shahar Boneh (丹佛城市州立学院)
- Jean Cadet (纽约州立大学石溪分校)
- Steven Chiappari (圣克拉拉大学)
- Nicolas Christou (加州大学洛杉矶分校)
- James Clay (亚利桑那大学图森分校)
- Francis Conlan (圣克拉拉大学)
- * Justin Corvino (拉法叶学院)
- Jay DeVore (圣路易斯-奥比斯波的加州技术大学)
- Scott Emerson (华盛顿大学)
- Thomas R. Fischer (德州农机大学)
- Anant Godbole (密歇根科技大学)
- Zakkhula Govindarajulu (肯塔基大学)
- Richard Groeneveld (爱荷华州立大学)
- Mike Hardy (麻省理工学院)
- Bernard Harris (威斯康星大学)
- Larry Harris (肯塔基大学)
- David Heath (康奈尔大学)
- Stephen Herschkorn (罗格斯大学)
- Julia L.Higle (亚利桑那大学)
- Mark Huber (杜克大学)
- * Edward Ionides (密歇根大学)
- Anastasia Ivanova (北卡罗来纳大学)
- Hamid Jafarkhani (加州大学厄文分校)
- Chuanshu Ji (北卡罗来纳大学 Chapel Hill分校)
- Robert Keener (密歇根大学)
- Fred Leysieffer (佛罗里达州立大学)
- Thomas Liggett (加州大学洛杉矶分校)

Helmut Mayer (佐治亚大学)

Bill McCormick (佐治亚大学)

Ian McKeague (佛罗里达州立大学)

R. Miller (斯坦福大学)

* Ditlev Monrad (伊利诺伊大学)

Robb J. Muirhead (密歇根大学)

Joe Naus (罗格斯大学)

Nhu Nguyen (新墨西哥州立大学)

Ellen O'Brien (乔治·梅森大学)

N.U. Prabhu (康奈尔大学)

Kathryn Prewitt (亚利桑那州立大学)

Jim Propp (威斯康星大学)

* William F. Rosenberger (乔治·梅森大学)

Myra Samuels (普度大学)

I. R. Savage (耶鲁大学)

Art Schwartz (密歇根大学安阿伯分校)

Therese Shelton (西南大学)

Malcolm Sherman (纽约州立大学奥尔巴尼分校)

Murad Taqqu (波士顿大学)

Eli Upfal (布朗大学)

Ed Wheeler (田纳西大学)

Allen Webster (布拉德利大学)

S. R.

smross@usc.edu

人民邮电出版社图灵公司自成立以来，引进并出版了大量世界级大师的经典著作，深受读者好评，在国内数学界引起了强烈反响，被誉为国内高端数学类图书的“旗舰出版单位”之一。这些作品都是世界级大师的心血力作，大师们包括数学界的一代宗师哈代（G. H. Hardy）、当代最杰出的数学家Peter D. Lax、20世纪日本最伟大的数学家小平邦彦、20世纪最伟大的概率学家威廉·费勒、天才青年数学家陶哲轩……

图灵数学·统计学丛书

序号	作者	书名
36	Tristan Needham	复分析：可视化方法
35	G.H.Hardy	纯数学教程（第10版）
34	Sheldon Axler	线性代数应该这样学（第2版）
33	蔡瑞胸（Ruey S. Tsay）	金融时间序列分析（第2版）
32	Alan Tucker	应用组合数学（第5版）
31	Douglas C.Montgomery	实验设计与分析（第6版）
30	Stuart A.Klugman, Harry H.Panjer, Gordon E.Willmot	损失模型：从数据到决策（第2版）
29	Peter D.Lax	线性代数及其应用（第2版）
28	Hamdy A.Taha	运筹学导论：高级篇（第8版）
27	G.H.Hardy, J.E.Littlewood, G.Pólya	不等式（第2版）
26	陶哲轩（Terence Tao）	陶哲轩实分析
25	John Willard Milnor	从微分观点看拓扑（双语版）
24	Garrett Birkhoff, Saunders Mac Lane	近世代数概论（第5版）
23	G.H.Hardy, Edward Maitland Wright	数论导引（第5版）
22	Hamdy A.Taha	运筹学导论：初级篇（第8版）
21	小平邦彦（Kunihiko Kodaira）	微积分入门II：多元微积分
20	小平邦彦（Kunihiko Kodaira）	微积分入门I：一元微积分
19	Morris W.Hirsch, Stephen Smale, Robert Devaney	微分方程、动力系统与混沌导论（第2版）
18	William Feller	概率论及其应用（第2卷·第2版）
17	Sheldon Ross	应用随机过程：概率模型导论（第9版）
16	Charalambos D.Aliprantis, Owen Burkinshaw	实分析习题集（第2版）
15	Kenneth Falconer	分形几何——数学基础及其应用（第2版）
14	Samuel Karlin, Howard M.Taylor	随机过程初级教程（第2版）
13	Gary Chartrand, Ping Zhang	图论导引
12	David C.Lay	线性代数及其应用（第3版修订版）
11	Sheldon M.Ross	统计模拟（第4版）
10	James W.Demmel	应用数值线性代数
9	Morris H.DeGroot, Mark J.Schervish	概率统计
8	Sheldon M.Ross	概率论基础教程（第7版）
7	Lloyd N.Trefethen, David Bau, III	数值线性代数
6	Alison Etheridge	金融数学教程
5	William Feller	概率论及其应用（第3版）
4	W.J.Conover	实用非参数统计（第3版）
3	Michael Spivak	流形上的微积分（双语版）
2	K.W.Morton, D.F.Mayers	偏微分方程数值解（第2版）
1	Martin W.Baxter, Andrew J.O.Rennie	金融数学：衍生产品定价引论

序号	作 者	书 名
33	Gene H. Golub等	矩阵计算 (英文版·第3版)
32	Richard Courant等	什么是数学 (英文版·第2版)
31	E. T. Jaynes	概率论沉思录 (英文版)
30	Peter J. Brockwell, Richard A. Davis	时间序列与预测 (英文版·第2版)
29	崔锦泰 (Charles K. Chui)	小波导论 (英文版)
28	Barrett O'Neill	微分几何基础 (英文版·第2版修订版)
27	Samuel Karlin, Howard M. Taylor	随机过程高级教程 (英文版)
26	Fima C. Klebaner	随机分析及应用 (英文版·第2版)
25	Kunihiko Kodaira	小平邦彦复分析 (英文版)
24	Rangarajan K. Sundaram	最优化导论 (英文版)
23	Robert B. Ash, Catherine A. Doleans-Dade	概率与测度论 (英文版·第2版)
22	Samuel Karlin, Howard M. Taylor	随机过程初级教程 (英文版·第2版)
21	Lars Hormander	多复分析导引 (英文版·第3版修订版)
20	William M. Boothby	微分流形与黎曼几何 (英文版·第2版修订版)
19	Sheldon M. Ross	概率论基础教程 (英文版·第7版)
18	Garrett Birkhoff, Saunders Mac Lane	近世代数概论 (英文版·第5版)
17	Hamdy A. Taha	运筹学导论: 初级篇 (英文版·第8版)
16	Hamdy A. Taha	运筹学导论: 高级篇 (英文版·第8版)
15	Sheldon Ross	应用随机过程: 概率模型导论 (英文版·第9版)
14	G.H. Hardy, Edward Maitland Wright	数论导引 (英文版·第5版)
13	Douglas C. Montgomery	试验设计与分析 (英文版·第6版)
12	Sheldon M. Ross	统计模拟 (英文版·第4版)
11	Tristan Needham	复分析: 可视化方法 (英文版)
10	G.H. Hardy, Edward Maitland Wright	图论导引 (英文版)
9	Herbert B. Enderton	集合论基础 (英文版)
8	Sheldon Ross	应用随机过程: 概率模型导论 (英文版·第8版)
7	Sheldon M. Ross	统计模拟 (英文版·第3版)
6	Martin W. Baxter, Andrew J. O. Rennie	金融数学: 衍生产品定价理论 (英文版)
5	Alison Etheridge	金融数学教程 (英文版)
4	K. W. Morton, D. F. Mayers	偏微分方程数值解 (英文版·第2版)
3	Roger A. Horn, Charles R. Johnson	矩阵分析, 卷2 (英文版)
2	George E. P. Box, Gwilym M. Jenkins, Gregory C. Reinsel	时间序列分析: 预测与控制 (英文版·第3版)
1	Roger A. Horn, Charles R. Johnson	矩阵分析, 卷1 (英文版)

高等院校数学·统计学教材系列

书 名	作 者
常用数学软件教程	冉启康 张振宇 张立柱
线性代数	何立国 刘艳秋 石鸿雁 何春艳
统计学导论	李勇 张淑梅
统计软件教程	李东风

北京图灵文化发展有限公司 电话: 010-51095186

地 址: 北京市朝阳区北苑路13号院1号楼领地OFFICE C座603室

传真: 010-52086950

邮编: 100107

网址: <http://www.turingbook.com>

E-mail: contact@turingbook.com

Contents

1	Combinatorial Analysis	1
1.1	Introduction	1
1.2	The Basic Principle of Counting	1
1.3	Permutations	3
1.4	Combinations	5
1.5	Multinomial Coefficients	9
1.6	The Number of Integer Solutions of Equations	12
	Summary	15
	Problems	16
	Theoretical Exercises	18
	Self-Test Problems and Exercises	20
2	Axioms of Probability	22
2.1	Introduction	22
2.2	Sample Space and Events	22
2.3	Axioms of Probability	26
2.4	Some Simple Propositions	29
2.5	Sample Spaces Having Equally Likely Outcomes	33
2.6	Probability as a Continuous Set Function	44
2.7	Probability as a Measure of Belief	48
	Summary	49
	Problems	50
	Theoretical Exercises	54
	Self-Test Problems and Exercises	56
3	Conditional Probability and Independence	58
3.1	Introduction	58
3.2	Conditional Probabilities	58
3.3	Bayes's Formula	65
3.4	Independent Events	79
3.5	$P(\cdot F)$ Is a Probability	93
	Summary	101
	Problems	102
	Theoretical Exercises	110
	Self-Test Problems and Exercises	114
4	Random Variables	117
4.1	Random Variables	117
4.2	Discrete Random Variables	123
4.3	Expected Value	125
4.4	Expectation of a Function of a Random Variable	128
4.5	Variance	132
4.6	The Bernoulli and Binomial Random Variables	134
	4.6.1 Properties of Binomial Random Variables	139
	4.6.2 Computing the Binomial Distribution Function	142

2 Contents

4.7	The Poisson Random Variable	143
4.7.1	Computing the Poisson Distribution Function	154
4.8	Other Discrete Probability Distributions	155
4.8.1	The Geometric Random Variable	155
4.8.2	The Negative Binomial Random Variable	157
4.8.3	The Hypergeometric Random Variable	160
4.8.4	The Zeta (or Zipf) Distribution	163
4.9	Expected Value of Sums of Random Variables	164
4.10	Properties of the Cumulative Distribution Function	168
	Summary	170
	Problems	172
	Theoretical Exercises	179
	Self-Test Problems and Exercises	183
5	Continuous Random Variables	186
5.1	Introduction	186
5.2	Expectation and Variance of Continuous Random Variables	190
5.3	The Uniform Random Variable	194
5.4	Normal Random Variables	198
5.4.1	The Normal Approximation to the Binomial Distribution	204
5.5	Exponential Random Variables	208
5.5.1	Hazard Rate Functions	212
5.6	Other Continuous Distributions	215
5.6.1	The Gamma Distribution	215
5.6.2	The Weibull Distribution	216
5.6.3	The Cauchy Distribution	217
5.6.4	The Beta Distribution	218
5.7	The Distribution of a Function of a Random Variable	219
	Summary	222
	Problems	224
	Theoretical Exercises	227
	Self-Test Problems and Exercises	229
6	Jointly Distributed Random Variables	232
6.1	Joint Distribution Functions	232
6.2	Independent Random Variables	240
6.3	Sums of Independent Random Variables	252
6.3.1	Identically Distributed Uniform Random Variables	252
6.3.2	Gamma Random Variables	254
6.3.3	Normal Random Variables	256
6.3.4	Poisson and Binomial Random Variables	259
6.3.5	Geometric Random Variables	260
6.4	Conditional Distributions: Discrete Case	263
6.5	Conditional Distributions: Continuous Case	266
6.6	Order Statistics	270
6.7	Joint Probability Distribution of Functions of Random Variables	274
6.8	Exchangeable Random Variables	282
	Summary	285
	Problems	287
	Theoretical Exercises	291
	Self-Test Problems and Exercises	293

7	Properties of Expectation	297
7.1	Introduction	297
7.2	Expectation of Sums of Random Variables	298
7.2.1	Obtaining Bounds from Expectations via the Probabilistic Method	311
7.2.2	The Maximum–Minimums Identity	313
7.3	Moments of the Number of Events that Occur	315
7.4	Covariance, Variance of Sums, and Correlations	322
7.5	Conditional Expectation	331
7.5.1	Definitions	331
7.5.2	Computing Expectations by Conditioning	333
7.5.3	Computing Probabilities by Conditioning	344
7.5.4	Conditional Variance	347
7.6	Conditional Expectation and Prediction	349
7.7	Moment Generating Functions	354
7.7.1	Joint Moment Generating Functions	363
7.8	Additional Properties of Normal Random Variables	365
7.8.1	The Multivariate Normal Distribution	365
7.8.2	The Joint Distribution of the Sample Mean and Sample Variance	367
7.9	General Definition of Expectation	369
	Summary	370
	Problems	373
	Theoretical Exercises	380
	Self-Test Problems and Exercises	384
8	Limit Theorems	388
8.1	Introduction	388
8.2	Chebyshev's Inequality and the Weak Law of Large Numbers	388
8.3	The Central Limit Theorem	391
8.4	The Strong Law of Large Numbers	400
8.5	Other Inequalities	403
8.6	Bounding the Error Probability When Approximating a Sum of Independent Bernoulli Random Variables by a Poisson Random Variable	410
	Summary	412
	Problems	412
	Theoretical Exercises	414
	Self-Test Problems and Exercises	415
9	Additional Topics in Probability	417
9.1	The Poisson Process	417
9.2	Markov Chains	419
9.3	Surprise, Uncertainty, and Entropy	425
9.4	Coding Theory and Entropy	428
	Summary	434
	Problems and Theoretical Exercises	435
	Self-Test Problems and Exercises	436
	References	436

4 Contents

10 Simulation	438
10.1 Introduction	438
10.2 General Techniques for Simulating Continuous Random Variables	440
10.2.1 The Inverse Transformation Method	441
10.2.2 The Rejection Method	442
10.3 Simulating from Discrete Distributions	447
10.4 Variance Reduction Techniques	449
10.4.1 Use of Antithetic Variables	450
10.4.2 Variance Reduction by Conditioning	451
10.4.3 Control Variates	452
Summary	453
Problems	453
Self-Test Problems and Exercises	455
Reference	455
Answers to Selected Problems	457
Solutions to Self-Test Problems and Exercises	461
Index	521

Combinatorial Analysis

1.1 INTRODUCTION

1.2 THE BASIC PRINCIPLE OF COUNTING

1.3 PERMUTATIONS

1.4 COMBINATIONS

1.5 MULTINOMIAL COEFFICIENTS

1.6 THE NUMBER OF INTEGER SOLUTIONS OF EQUATIONS

1.1 INTRODUCTION

Here is a typical problem of interest involving probability: A communication system is to consist of n seemingly identical antennas that are to be lined up in a linear order. The resulting system will then be able to receive all incoming signals—and will be called *functional*—as long as no two consecutive antennas are defective. If it turns out that exactly m of the n antennas are defective, what is the probability that the resulting system will be functional? For instance, in the special case where $n = 4$ and $m = 2$, there are 6 possible system configurations, namely,

0	1	1	0
0	1	0	1
1	0	1	0
0	0	1	1
1	0	0	1
1	1	0	0

where 1 means that the antenna is working and 0 that it is defective. Because the resulting system will be functional in the first 3 arrangements and not functional in the remaining 3, it seems reasonable to take $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ as the desired probability. In the case of general n and m , we could compute the probability that the system is functional in a similar fashion. That is, we could count the number of configurations that result in the system's being functional and then divide by the total number of all possible configurations.

From the preceding discussion, we see that it would be useful to have an effective method for counting the number of ways that things can occur. In fact, many problems in probability theory can be solved simply by counting the number of different ways that a certain event can occur. The mathematical theory of counting is formally known as *combinatorial analysis*.

1.2 THE BASIC PRINCIPLE OF COUNTING

The basic principle of counting will be fundamental to all our work. Loosely put, it states that if one experiment can result in any of m possible outcomes and if another experiment can result in any of n possible outcomes, then there are mn possible outcomes of the two experiments.

The basic principle of counting

Suppose that two experiments are to be performed. Then if experiment 1 can result in any one of m possible outcomes and if, for each outcome of experiment 1, there are n possible outcomes of experiment 2, then together there are mn possible outcomes of the two experiments.

Proof of the Basic Principle: The basic principle may be proven by enumerating all the possible outcomes of the two experiments; that is,

$$\begin{array}{c} (1, 1), (1, 2), \dots, (1, n) \\ (2, 1), (2, 2), \dots, (2, n) \\ \vdots \\ (m, 1), (m, 2), \dots, (m, n) \end{array}$$

where we say that the outcome is (i, j) if experiment 1 results in its i th possible outcome and experiment 2 then results in its j th possible outcome. Hence, the set of possible outcomes consists of m rows, each containing n elements. This proves the result.

EXAMPLE 2a

A small community consists of 10 women, each of whom has 3 children. If one woman and one of her children are to be chosen as mother and child of the year, how many different choices are possible?

Solution. By regarding the choice of the woman as the outcome of the first experiment and the subsequent choice of one of her children as the outcome of the second experiment, we see from the basic principle that there are $10 \times 3 = 30$ possible choices. ■

When there are more than two experiments to be performed, the basic principle can be generalized.

The generalized basic principle of counting

If r experiments that are to be performed are such that the first one may result in any of n_1 possible outcomes; and if, for each of these n_1 possible outcomes, there are n_2 possible outcomes of the second experiment; and if, for each of the possible outcomes of the first two experiments, there are n_3 possible outcomes of the third experiment; and if ..., then there is a total of $n_1 \cdot n_2 \cdots n_r$ possible outcomes of the r experiments.

EXAMPLE 2b

A college planning committee consists of 3 freshmen, 4 sophomores, 5 juniors, and 2 seniors. A subcommittee of 4, consisting of 1 person from each class, is to be chosen. How many different subcommittees are possible?