東京理科大学教授 理博 国沢清典編

確率統計演習 1

確率

培風館

確率統計演習 1

確　率

東京理科大学教授　理学博士

国沢清典編

培　風　館

編者および執筆者紹介

国沢清典（くにさわ きよのり）

1939年　大阪大学理学部数学科卒業
1949年　理学博士
現　職　東京工業大学名誉教授
　　　　東京理科大学教授

主要著書

近代確率論（岩波書店）
ORのための情報理論（日本科学技術連盟）
ORによる在庫管理（日本事務能率協会）
ビジネス数学入門（共著，東洋経済新報社）
現代統計学（上・下）（共著，広川書店）
オペレーションズ・リサーチ演習
　（共著，培風館）
情報理論の進歩（共編，岩波書店）
オペレーションズ・リサーチ入門
　（共著，広川書店）
初等確率論（共著，培風館）

真壁　肇（まかべ はじめ）〔第2巻 執筆〕

1951年　東京工業大学卒業
1962年　工学博士
現　職　東京工業大学教授

主要著書

工業経営と装置計画（共著，ダイヤモンド社）

羽鳥裕久（はとり ひろひさ）〔第1巻 執筆〕

1960年　東京工業大学大学院卒業
1960年　理学博士
現　職　東京理科大学教授

主要著書

初等確率論（共著，培風館）
確率論とその応用II（共訳，紀伊国屋書店）

昭和41年1月25日　初版発行
昭和55年10月30日　初版第16刷発行

確率統計演習1
確率

編　者　国沢清典
発行者　山本健二

発行所　株式会社　培風館
東京都千代田区九段南 4-3-12・郵便番号 102
電話 (03) 262-5256(代表)・振替東京4-44725

定価 ¥ 1300.

渥美活版組版・斎藤印刷・三水舎製本

編者の承認をえて検印を省略しました

3033-0809-6955

まえがき

確率論は17世紀の中葉，フランスに起こったと伝えられている。Pascal, Fermat の賭の問題に関する手紙の交換のなかに，これを数学的に取り扱ったことに始まるといわれているのは有名な話である。当時のフランスの貴族達がサイコロやカードの賭で，経験的に起こり易さの度合が事象によって異なっているのに気付いていたことであろう。Pascal と Fermat はそれに興味をもって，数学的に解決しようとしたのにちがいない。とにかく17世紀の中葉といえば，Newton の微積分法の発見が1665年といわれているから，微積分法の誕生と全く同時期であったのも，何か不思議な偶然性を感じる。しかし微積分法は極限の概念を導入したのであって，全く数学史上，エポック・メーキングな事実として特筆大書すべき事実だったのに反し，確率論は長期にわたって離散的な確率の場合のみを取り扱ってきた。Laplace が1812年「解析的確率論」を著述し，古典確率論が集大成されたのであるが，Laplace の時代においても，いまだに，連続量の確率の取り扱いが本格的にあらわれていない。編者はこの点に奇異の感じがしてならない。同時期に誕生した微積分法の影響が何故確率論まで及ばなかったかということである。微積分法の影響を最初に与えたのは，何と20世紀に入ってからである。Kolmogorov が1931年 "Ueber die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung" なる論文を発表し，つづいて，1933年 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung を発表し，近代確率論を測度論的方法でつくりあげた。したがつて，確率論は実に大略3世紀にわたって，Laplace の古典確率論の完成はあるにしても，旧態依然たるままで過されてきた。また，Kolmogorov の上述の近代確率論の確立に直接の影響を与えたのは，気体運動論であることは否定することのできない事実であろう。

とにかく，確率論は，幾何学の歴史の古さには及ばないが，微積分学と肩を並べることのできる程，古い歴史を持っていたのにかかわらず，何故，近代化とまではいかなくとも微積分学の導入がおくれたのであろうか。それには二つの主な理由が考えられる。その一つは，確率の定義にある，古典的な確率の定義が有限個の可能の場合に限定されていたことであり，確率論はすべて，これを前提として考えたのであるから，微積分学を導入する余地がなかった。その

二つは，確率論に関心をもった研究者はほとんどが昔は数学者でなく，直接に数学者がこれに参加したのは，古典的確率論までであったといえる。このために，確率論は実際の応用面にのみ関心が払われ，確率論自身の発展に寄与するまでにいかなかったのではないかと思われる。

とにかく，確率論の生いたちは上述のようなものであり，確率論の勉強のなかには，古典的確率論を近代的に見直した部分が，殆んどの領域を占めている。たとえば Feller の名著「確率論とその応用」は全部この古典的確率論の近代的な表現変えである。われわれも確率論のこの長い 3 世紀にわたった古典の流れに目をつぶるわけにはいかない。「確率論は実関数論に含まれる。だから，実関数論を勉強すれば，確率論を勉強する必要はない」という異論を編者の若いときに聞いたことがあるが，実関数論からは基礎付けは得られても確率論の面白さ，醍醐味は生れてこない。確率論を勉強される読者におすすめしたい勉強法として，「古典も無視しないで下さい」ということである。近代的な色彩のもとでの古典は美しいし，楽しいものである。

本演習書の構成は上述のような観点から，いたずらに実関数論的立場に立った測度論的ないきかたは避けた。大学初年級用の参考書として編さんしたものである。確率論は従来主として統計学を学ぶための準備として勉強した人達が多かったが，最近は，統計学とは関係なしに，確率論を勉強される読者が増加してきた。これは，極めて当然のことかもしれない。自然現象や社会現象のなかには，決定論的な問題と，確率的な問題とが，約 50% 対 50% の比率に存在しているからである。とにかくこのような読者諸兄の確率論の勉強のために平易に説明するように努力した。なお，マルコフ過程の章は設けなかったが，重要な問題は，適切な章で取り扱った。問題には，すべて解答を付した。読者諸賢の御批判を得て将来より完全なものにして行きたい念願である。

本書の編集，校正にあたっては，森俊夫氏また培風館森平勇三氏，松村良子氏をわずらわした点，多大である。ここに心より感謝の辞をささげたい。

1965 年 10 月

編　者

目　　次

〔2 巻 目 次〕

1

事象と確率

サイコロを投げてその目の数を調べるとか，同一条件の下で製造された製品のいくつかをえらびその重さをはかるというような実験をするとき，その結果は偶然的原因の影響をうけて一意的には定まらない。しかし，このような実験や観測をなんどもくり返して行なうとき，得られる結果の系列の中に，ある種の法則性を認めうることがある。たとえば，正しいサイコロを n 回投げたとき1の目が出た回数を r とすれば，n が十分大きいときは r/n はいつも大略 1/6 に近い数である☆。このような偶然的現象に関するいわゆる統計的法則を推測することが統計学の重要な目標の一つである。確率論においては，偶然的現象に関する基本的な統計的法則から出発して，より深い統計的法則を演繹することが行なわれるのである。統計的法則を記述するために確率の概念が導入される。

1-1 事象

要項

1. 試行，標本点，標本空間　考察の対象となる実験または観測を行なうことを**試行**という。試行によって得られうる個々の結果を**標本点**（または基本事象，単純事象，根元事象）といい，標本点全体の集合を，この試行に対応する**標本空間**という。以下，標本空間を Ω，標本点を $\omega, \omega', \omega_1, \omega_2, \cdots$ 等の記号

☆ 人為的にサイコロの目が 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, … のようにこの順序にくり返して出るようにしたときでも r/n は 1/6 に近い数になるが，このような場合はもちろん除外する。

で表わす。たとえば，サイコロを1回投げてその目の数を調べるという実験においては，標本点は 1, 2, 3, 4, 5, 6 の六つで*，標本空間は $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ である**。

2. 事象とその演算　標本空間 Ω の部分集合を**事象**という。以下，事象を $A, B, \cdots, E_1, E_2, \cdots$ 等の記号で表わす。ω が事象 A を構成する標本点の一つであるとき，ω は A に属するといい，これを $\omega\in A$ または $A\ni\omega$ なる記号で表わす。試行を行なうとき，必ず対応する標本空間 Ω の中のただ一つの標本点 ω が実現するが，この標本点 ω がある事象 A に属するとき，この事象 A が生起したという。たとえば，サイコロを1回投げる試行において，集合 $E=\{2, 4, 6\}$ はいわゆる偶数の目が出る事象であり，$F=\{1, 2, 3\}$ は3以下の目が出る事象である。試行の結果として標本点2が実現したならば，E も F もともに生起したことになる。

a. 和事象　事象 E, F の少なくとも一方に属する標本点 ω の全体からなる集合（E と F の和集合）を E と F の**和事象**といい $E\cup F$ で表わす。E, F をそれぞれ図 1・1 の大小2円の内部になぞらえて考えると，$E\cup F$ は斜線部分に対応している。さらに，一般に和事象 $E\cup F\cup G\cdots$ は，事象 $E, F, G, \cdots$ の少なくとも一つに属する標本点全体の集合である。

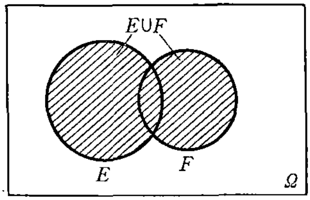

図 1・1

b. 積事象　事象 E, F のいずれにも属する標本点全体の集合（E と F の積集合）を E と F の**積事象**といい $E\cap F$ で表わす。図 1・2 の斜線部分に対応している。さらに，一般に積事象 $E\cap F\cap G\cap\cdots$ は事象 $E, F, G, \cdots$ のいずれにも属する標本点全体の集合を表わす。

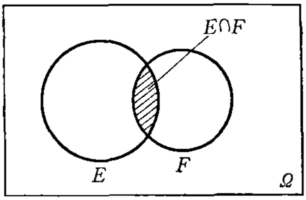

図 1・2

c. 余事象　事象 E に属しない標本点の集合（E の補集合）を E の**余事象**といい E^c で表わす***。標本空間 Ω およ

---

* 偶数の目が出るということは，この試行の可能な結果の一つではあるが，個々の結果とはいえないので標本点ではない。

** $a, b, c, \cdots$ の集合を $\{a, b, c, \cdots\}$ のように表わす。この記法を用いた。

*** c は complement の頭文字。

び事象 E をそれぞれ図 1・3 の長方形および円の内部になぞらえて考えると，E^c は斜線部分に対応している。

E に属する標本点はすべて F に属するとき，$E\subset F$ とかく。また標本点を全然含まない事象（Ω の空集合）を考え，これを**空事象**といい記号 ϕ（または θ, 0 等）で表わす。

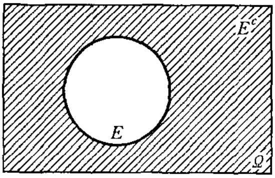

図 1・3

事象 E および F の両方に属する標本点がないときは $E\cap F=\phi$ で，このとき事象 E, F はたがいに**排反**であるという。なお集合 Ω を事象と考えたとき**全事象**という。

■**例題 1.** 銅貨を3回投げてその表，裏を調べるという実験を行なうときの標本点を列挙せよ。また2回目が表であるという事象 E およびちょうど2回だけ表が出るという事象 F を，この標本空間の部分集合として示せ。

［解］ たとえば“1回目が表，2回目が裏，3回目が表”という結果を (H, T, H) のようにかけば*，標本点は

$$\omega_1=(\mathrm{H, H, H}),\quad \omega_2=(\mathrm{H, H, T}),\quad \omega_3=(\mathrm{H, T, H}),\quad \omega_4=(\mathrm{H, T, T})$$
$$\omega_5=(\mathrm{T, H, H}),\quad \omega_6=(\mathrm{T, H, T}),\quad \omega_7=(\mathrm{T, T, H}),\quad \omega_8=(\mathrm{T, T, T})$$

の8つで，標本空間は

$$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$$

また，標本空間から2回目が表であるような標本点をえらんで

$$E=\{\omega_1, \omega_2, \omega_5, \omega_6\}$$

同様にして

$$F=\{\omega_2, \omega_3, \omega_5\}$$

■**例題 2.** 例題1の事象 E, F について，事象 $E\cup F$, $E\cap F$, E^c, F^c, $(E\cap F)^c$, $E^c\cap F$ を Ω の部分集合として示せ。

［解］ E, F の少なくとも一つに属する標本点を集めて

$$E\cup F=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_6\}$$

同様にして

$$E\cap F=\{\omega_2, \omega_5\}$$
$$E^c=\{\omega_3, \omega_4, \omega_7, \omega_8\},\quad F^c=\{\omega_1, \omega_4, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$$
$$(E\cap F)^c=\{\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$$
$$E^c\cap F=\{\omega_3\}\ {}^{**}$$

■**例題 3.** E, F, G が事象なるとき

---

* H は Head, T は Tail の頭文字。

** このように，ただ一つの標本点からなる集合が基本事象といわれる。これに対し二つ以上の標本点からなる集合を複事象という。

$$(E\cup F)\cap G=(E\cap G)\cup(F\cap G)$$

が成り立つことを示せ。これを**分配の法則**という☆。

[解]　　$$\text{“}\omega\in(E\cup F)\cap G\text{”}$$

とすれば

　　“$\omega\in E\cup F$” かつ “$\omega\in G$”

ゆえに　“$\omega\in E$ または $\omega\in F$” かつ “$\omega\in G$”

したがって　“$\omega\in E$ かつ $\omega\in G$” または “$\omega\in F$ かつ $\omega\in G$”

すなわち　“$\omega\in E\cap G$” または “$\omega\in F\cap G$”

いいかえれば

$$\text{“}\omega\in(E\cap G)\cup(F\cap G)\text{”}$$

以上のことは $(E\cup F)\cap G$ に属する標本点（がもしあればこれ）は，$(E\cap G)\cup(F\cap G)$ に属することを示している。同様にして，$\omega\in(E\cap G)\cup(F\cap G)$ ならば $\omega\in(E\cup F)\cap G$ なることが（上の論法の逆をたどって）示される。すなわち，$(E\cap G)\cup(F\cap G)$ に属する標本点は $(E\cup F)\cap G$ に属する。このことから

$$(E\cup F)\cap G=(E\cap G)\cup(F\cap G)$$

がわかる☆☆。

[注意]　一般に二つの事象 A, B に対して $A=B$ を証明するときに，$\omega\in A$ ならば $\omega\in B$ すなわち $A\subset B$ なることと，$A\supset B$ なることの二つを示すことにより $A=B$ を結論する方法がよく用いられる。

■例題 4.　A, B が事象のとき

$$A\cup B=(A\cap B)\cup(A^c\cap B)\cup(A\cap B^c)$$

が成り立つことを示せ。また $A\cap B$, $A^c\cap B$, $A\cap B^c$ はたがいに排反であることをたしかめよ。

[解]　　$$A=A\cap\Omega=A\cap(B\cup B^c)\ ☆☆☆$$

例題3を用いて☆☆☆☆

$$=(A\cap B)\cup(A\cap B^c)$$

同様に　　$$B=(A\cap B)\cup(A^c\cap B)$$

この二つから

$$\begin{aligned}A\cup B&=[(A\cap B)\cup(A\cap B^c)]\cup[(A\cap B)\cup(A^c\cap B)]\\&=(A\cap B)\cup(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)\end{aligned}$$

☆　数に対する分配の法則 $(a+b)\times c=(a\times c)+(b\times c)$ との類似からこのようにいう。

☆☆　この証明で “$\omega\in(E\cup F)\cap G$” からはじまり “$\omega\in(E\cap G)\cup(F\cap G)$” に至る六つの命題が同値であるといえば（逆を含めて），いっぺんに証明されたことになる。

☆☆☆　$A=A\cap\Omega$, $\Omega=B\cup B^c$ は容易にわかるであろう。

☆☆☆☆　正確には $G\cap(E\cup F)=(G\cap E)\cup(G\cap F)$ を用いた。これは例題3と本質的に同じものである。

がわかる*。つぎに $A\cap B\subset B$, $A\cap B^c\subset B^c$ かつ B と B^c はたがいに排反なることから $A\cap B$, $A\cap B^c$ がたがいに排反なることがわかる。他も同様である。なお図のうえで確かめると Ω, A, B をそれぞれ図 1・4 の長方形，大小 2 円の内部になぞらえて考えて

$A\cup B=$(イ)，(ロ)，(ハ) の部分
$A\cap B=$(ロ) の部分，$A\cap B^c=$(イ) の部分
$A^c\cap B=$(ハ) の部分

なることから，この例題の正しいことが理解されよう。

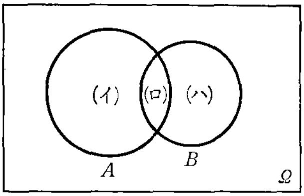

図 1・4

1-2 確率の基礎概念

要項

3. 確率 結果が偶然的原因に影響されて決まるような試行を考え，A を一つの事象とする。この試行を何回も独立に** 行なうとき，n 回中 A が生起した回数を r とする。n が十分大きいとき，いつも r/n が一定数 p に近いというような定数 p の存在が(経験的に)認められるようなとき，A を確率事象（または可測事象），p を事象 A の**確率**といって，p を $P\{A\}$ で表わす。確率事象ならびに確率はつぎの **Kolmogorov**（コルモゴロフ）**の公理***** にしたがうものとする。

公理 I A, B, C, … が確率事象ならば

$A\cup B\cup C\cup\cdots$ （高々可付番個の和事象）
$A\cap B\cap C\cap\cdots$ （高々可付番個の積事象）
A^c, B^c, …

はすべて確率事象である。また全事象 Ω，空事象 ϕ も確率事象である。

公理 II 確率事象 A には

---

* $(E\cup F)\cup(E\cup G)=E\cup F\cup G$ は容易にわかるであろう。

** ここで独立というのは常識的な意味で，毎回の試行をたがいに無関係に行なうというほどの意味である。

*** この公理は多少重複した形で述べてある。たとえば，公理 I で $A\cap B\cap C\cap\cdots$ が確率事象なることは仮定しなくてもよい（他の部分から証明される）。なお，この公理を認めると，確率の存在が技術上経験的には認めにくい事象にも確率を考えなければならないことがある。測定誤差が有理数であるという事象などがその例である。

$$0 \leqq P\{A\} \leqq 1$$

なる実数 $P\{A\}$ が対応している。これを事象 A の確率という。とくに $P\{\Omega\}=1$, $P\{\phi\}=0$ である。

公理 III $A, B, C, \cdots$ が（どの二つも）たがいに排反な（高々可付番個の）確率事象ならば

$$P\{A \cup B \cup C \cup \cdots\} = P\{A\} + P\{B\} + P\{C\} + \cdots$$

くり返して試行をしなくても，先験的判断によって事象 A, B の生起することが同様に確からしいと考えられるときは，$P\{A\}=P\{B\}$ と考えてよいであろう。たとえば，表，裏が対称に出来ている銅貨を投げるとき，表が出る事象と裏が出る事象の確率は等しい。

4. 条件つき確率　A, B が確率事象で $P\{B\} \neq 0$ のとき

$$P\{A|B\} = \frac{P\{A \cap B\}}{P\{B\}}$$

で定義される $P\{A|B\}$ を，B の条件のもとでの事象 A の（**条件つき**）**確率**という。定義よりただちに，

$$P\{A \cap B\} = P\{B\}\,P\{A|B\}$$

が成り立つ。B の条件のもとで事象 A_1, A_2 の生起することが同様に確からしいと先験的に認められるときは $P\{A_1|B\}=P\{A_2|B\}$ としてよい。

5. 事象の独立　A, B が確率事象で

$$P\{A \cap B\} = P\{A\}\,P\{B\}$$

が成り立つとき，A, B はたがいに**独立**であるという。さらに，一般に A_1, $A_2, \cdots, A_n, \cdots$ が有限または可付番無限個の確率事象の系列で，その任意の有限部分系列 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}$☆ に対して

$$P\{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\} = P\{A_{i_1}\}\,P\{A_{i_2}\} \cdots P\{A_{i_k}\}$$

が成り立つとき，A_1, A_2, $A_3, \cdots$ はたがいに**独立**であるという。

6. 公式　以下 $A, B, A_1, A_2, \cdots$ 等はすべて確率事象で，また条件つき確率はすべて定義されうるものとする。

a. $P\{A^c\} = 1 - P\{A\}$　これを**全確率の公式**という。

b. $P\{A \cup B\} + P\{A \cap B\} = P\{A\} + P\{B\}$　これを**加法定理**という。

c. $A \subset B$ ならば $P\{A\} \leqq P\{B\}$

☆ $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ は $\{1, 2, 3, \cdots\}$ の部分集合である。後者が有限集合のときは，前者が後者に一致する場合も含む。

d. $P\{A_1\cup A_2\cup\cdots\}\leqq P\{A_1\}+P\{A_2\}+\cdots$

e. $P\{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\}=P\{A_1\}\,P\{A_2|A_1\}\,P\{A_3|A_1\cap A_2\}\cdots P\{A_n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1}\}$ これを**乗法定理**という。

f. $A_i\cap A_j=\phi\ (i\neq j)$ ☆ かつ $\Omega=A_1\cup A_2\cup\cdots$ ならば

$$P\{B\}=P\{A_1\}\,P\{B|A_1\}+P\{A_2\}\,P\{B|A_2\}+\cdots$$

g. $A_i\cap A_j=\phi\ (i\neq j)$ かつ $\Omega=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ ならば

$$P\{A_i|B\}=\frac{P\{A_i\}\,P\{B|A_i\}}{P\{A_1\}\,P\{B|A_1\}+P\{A_2\}\,P\{B|A_2\}+\cdots+P\{A_n\}\,P\{B|A_n\}}$$

が $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対して成り立つ。これを **Bayes**（ベイズ）**の定理**という。

■例題 5. 標本空間が $\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_N\}$ で，基本事象 $\{\omega_1\},\ \{\omega_2\},\ \cdots,\ \{\omega_N\}$ のおのおのの生起することが同様に確からしいとする。このとき任意の事象 A に対して

$$P\{A\}=\frac{A\ \text{に属する標本点の個数}^{☆☆}}{N}$$

が成り立つことを示せ。また例題1の各標本点が実現することが同様に確からしいとして，E, F の確率を求めよ。

[解] $\{\omega_i\}\cap\{\omega_j\}=\phi\ (i\neq j)$ かつ $\Omega=\{\omega_1\}\cup\{\omega_2\}\cup\cdots\cup\{\omega_N\}$ であるから公理 II, III より

$$1=P\{\Omega\}=P\{\omega_1\}+P\{\omega_2\}+\cdots+P\{\omega_N\}$$

また仮定より

$$P\{\omega_1\}=P\{\omega_2\}=\cdots=P\{\omega_N\}$$

$$\therefore\ 1=NP\{\omega_k\}$$

$$\therefore\ P\{\omega_k\}=\frac{1}{N}\qquad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$$

$A=\{\omega_{i_1},\ \omega_{i_2},\ \cdots\omega_{i_r}\}$ とすれば，上と同様にして次式が得られる。

$$P\{A\}=P\{\omega_{i_1}\}+\cdots+P\{\omega_{i_r}\}=\frac{r}{N}=\frac{A\ \text{に属する標本点の個数}}{N}$$

また例題1の標本点の総数は $N=8$ であるから $P\{E\}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$，$P\{F\}=\dfrac{3}{8}$ を得る。

■例題 6. 標本空間が $\Omega=(a,\ b]$ で I, J を Ω の部分集合なる区間とする。I, J の長さが等しいときはつねに事象 I, J の生起することが同様に確からしいならば，任意の事象 A に対して

☆ $A_1,\ A_2,\ \cdots$ のどの二つもたがいに排反であるということである。

☆☆ この分子を"A が生起するのに都合のよい場合の数"ということがある。

$$P\{A\}=\frac{A\text{ の長さ}^{\star}}{b-a}$$

が成り立つことを示せ。

[解] $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, $x_i-x_{i-1}=\dfrac{b-a}{n}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ とし, $I_i=(x_{i-1}, x_i]$ とおけば, $I_i\cap I_j=\phi$ $(i\neq j)$ かつ $\Omega=I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_n$ であるから公理 II, III より

$$1=P\{\Omega\}=P\{I_1\}+P\{I_2\}+\cdots+P\{I_n\}$$

また $I_1, I_2, \cdots, I_n$ は長さの等しい区間であるから

$$P\{I_1\}=P\{I_2\}=\cdots=P\{I_n\}$$

$$\therefore\ 1=nP\{I_k\}$$

$$\therefore\ P\{I_k\}=\frac{1}{n}=\frac{I_k\text{ の長さ}}{b-a}\qquad(k=1, 2, \cdots, n)$$

事象 $I_1, I_2, \cdots, I_n$のうちで A に全く含まれるものの和事象を $\bigcup\limits_{I_k\subset A} I_k$ で表わし, $I_1, I_2, \cdots, I_n$ のうちで A と排反ならざるものの和事象を $\bigcup\limits_{I_k\cap A\neq\phi} I_k$ で表わせば

$$\bigcup_{I_k\subset A} I_k\subset A\subset \bigcup_{I_k\cap A\neq\phi} I_k$$

で $n\to\infty$ のとき

$$\text{図形}\bigcup_{I_k\subset A} I_k\text{ の長さ}=\sum_{I_k\subset A}(I_k\text{ の長さ})\longrightarrow A\text{ の長さ}$$

$$\text{図形}\bigcup_{I_k\cap A\neq\phi} I_k\text{ の長さ}=\sum_{I_k\cap A\neq\phi}(I_k\text{ の長さ})\longrightarrow A\text{ の長さ}$$

であり**, また,

$$P\{\bigcup_{I_k\subset A} I_k\}\leqq P\{A\}\leqq P\{\bigcup_{I_k\cap A\neq\phi} I_k\}$$

が成り立つ (問題 15 参照)。$n\to\infty$ のとき

$$P\{\bigcup_{I_k\subset A} I_k\}=\sum_{I_k\subset A}P\{I_k\}=\frac{1}{b-a}\sum_{I_k\subset A}(I_k\text{ の長さ})\longrightarrow\frac{A\text{ の長さ}}{b-a}$$

同様に

$$P\{\bigcup_{I_k\cap A\neq\phi} I_k\}\longrightarrow\frac{A\text{ の長さ}}{b-a}$$

が成り立つから, はさみうちの原理*** を用いて

$\star$ A は Jordan (ジョルダン) 可測集合とし, “A の長さ” は “Jordan 測度” (この定義については次の脚注参照) のこととする。なお一般に Lebesgue (ルベーグ) 可測な集合についてこのことがいえる。しかしこの場合, Lebesgue 可測でない集合に確率を対応させることはできないのである (公理に矛盾する)。すなわち, 確率事象でない事象がある。

$\star\star$ この二つの図形の長さが $n\to\infty$ のとき同じ極限をもつならば A を Jordan 可測といい, その共通の極限を A の Jordan 測度 (すなわちここでいう A の長さ) という。

$\star\star\star$ $a_n\leqq\alpha\leqq b_n$ $(n=1, 2, \cdots)$ で, $n\to\infty$ のとき $a_n\to\beta$, $b_n\to\beta$ ならば $\alpha=\beta$.

$$P\{A\}=\frac{A\text{ の長さ}}{b-a}$$

を得る。

■例題 7. 条件つき確率の定義の意味を考えよ。

[解] ある試行に対応する標本空間を Ω とし，A，B を確率事象とする（もちろん $P\{B\}\neq 0$）。この試行を何回も（常識的な意味で）独立にくり返し行なうものとしよう。n 回の試行中，B の生起した回数を r，B が生起したという条件のもとでさらに A も生起している回数（すなわち $A\cap B$ の生起した回数）を s とすれば，n が十分大きい（したがって r も十分大きい）とき

$$\frac{s}{r}=\frac{s/n}{r/n}\fallingdotseq\frac{P\{A\cap B\}}{P\{B\}}=P\{A|B\}$$

すなわち，$P\{A|B\}$ は B が生起した中での A も生起した割合 s/r の近似値を与える。

■例題 8. A，B が確率事象で $P\{B\}\neq 0$ とする。このとき，A，B がたがいに独立なるための必要十分条件は

$$P\{A|B\}=P\{A\}$$

なることを示せ。さらに $P\{B^c\}\neq 0$ ならばこの値は $P\{A|B^c\}$ にも一致することを示し，独立の定義の意味を考えよ。

[解] A，B が独立ならば

$$P\{A|B\}=\frac{P\{A\cap B\}}{P\{B\}}=\frac{P\{A\}P\{B\}}{P\{B\}}=P\{A\}$$

すなわち，$P\{A|B\}=P\{A\}$ がわかる。逆に $P\{A|B\}=P\{A\}$ ならば

$$P\{A\cap B\}=P\{B\}P\{A|B\}=P\{A\}P\{B\}$$

すなわち A，B が独立である。つぎに

$$A=(A\cap B)\cup(A\cap B^c)$$

で $A\cap B$，$A\cap B^c$ がたがいに排反なる確率事象であるから

$$P\{A\}=P\{A\cap B\}+P\{A\cap B^c\}$$

また（問題 14 参照），

$$1=P\{B\}+P\{B^c\}$$

ゆえに $P\{A\}=P\{A|B\}$ のとき，加比の理* を用いて

$$\frac{P\{A\}}{1}=\frac{P\{A\cap B\}}{P\{B\}}=\frac{P\{A\}-P\{A\cap B\}}{1-P\{B\}}=\frac{P\{A\cap B^c\}}{P\{B^c\}}=P\{A|B^c\}$$

を得る。以上のことから A，B が独立のときは，A の確率は条件 B のもとでの A の確率および条件 B^c のもとでの A の確率と一致することがわかった。すなわち "B（または B^c）のもとでの" という条件をつけてもつけなくても，A の確率に影響を与えない。同様に $P\{A\}\neq 0$，$P\{A^c\}\neq 0$ のときには，B の確率は "A（または A^c）のもとでの" という条件をつけてもつけなくても変わらない。

---

* $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ ならこの値は $\dfrac{a-c}{b-d}$ にも等しい。