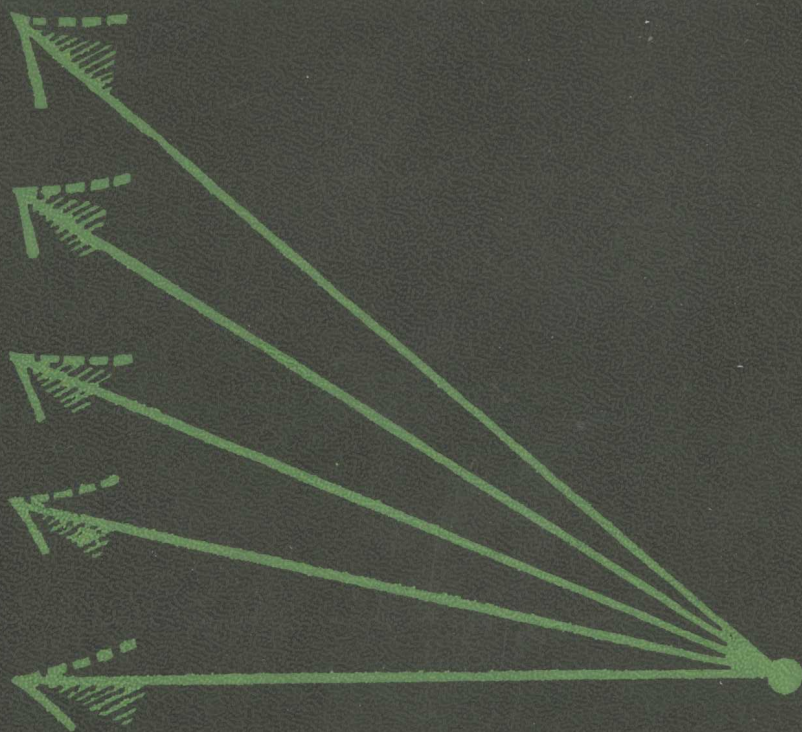

И. Экланд ЭЛЕМЕНТЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ЭКОНОМИКИ



И. Экланд

**ЭЛЕМЕНТЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ЭКОНОМИКИ**

Перевод с французского
В. Н. ДЕСНИЦКОЙ, Е. Б. ЯНОВСКОЙ
и **А. Н. ЛЯПУНОВА**

под редакцией
А. А. КОРБУТА

с предисловием
А. А. КОРБУТА и В. Л. МАКАРОВА

Москва «Мир» 1983

ББК 22.18

Э39

УДК 51.38 + 519.9

Экланд И.

Э 39 Элементы математической экономики: Пер. с франц. — М.: Мир, 1983. — 248 с., ил.

Введение в математическую экономику, начинающееся с основных понятий и доведенное до современных математических моделей. Большое внимание уделено геометрической наглядности изложения и экономическому содержанию формальной теории. Автор — французский математик, известный советским читателям по переводу его в соавторстве с Р. Темамом книги «Выпуклый анализ и вариационные проблемы» (М.: Мир, 1979).

Для математиков, интересующихся современной математической экономикой, для студентов, специализирующихся по прикладной математике, экономической кибернетике, исследованию операций,

Э $\frac{1502000000-250}{041(01)-83}$ 33-83 ч. I

ББК 22.18
517.8

Редакция литературы по математическим наукам

© 1979, Hermann, 293 rue
Lecourbe, 75015 Paris

© Перевод на русский язык,
«Мир», 1983



IVAR EKELAND

ÉLÉMENTS D' ÉCONOMIE
MATHÉMATIQUE

Hermann  *Collection*
Paris *Méthodes*

1979

Предисловие к русскому переводу

Предлагаемая читателю книга задумана как учебное пособие для студентов-экономистов младших курсов. Она написана по материалам лекций, которые читались автором в Политехнической школе и в Парижском университете-IX «Дофин», специализирующемся в области социально-экономических дисциплин. Автор книги — довольно молодой (он родился в Париже в 1944 г.), но уже достаточно известный французский математик. Нашему читателю он знаком, например, как соавтор книги [11] и как создатель вариационного принципа (см. обзор [12]), за которым в литературе закрепилось теперь его имя.

Книга написана с большим педагогическим мастерством. Отталкиваясь от самых простых первичных экономических понятий и их математической формализации, автор быстро подводит читателя к таким фундаментальным концепциям математической экономики, как полезность, предпочтения, оптимумы Парето, ядро, равновесие и равновесные цены. Читатель вводится в проблему теории групповых решений (включая знаменитую теорему Эрроу «о невозможности») и знакомится с основными понятиями теории кооперативных игр в применении к экономическим задачам.

Большое внимание уделяется, с одной стороны, геометрической наглядности изложения (в книге без малого сотня выразительных иллюстраций) и, с другой стороны, экономической интерпретации формальных конструкций.

К математической подготовке читателя предъявляются сравнительно скромные требования, не выходящие за пределы основ аналитической геометрии и математического анализа. Однако определенные навыки формальных рассуждений, безусловно, необходимы. Автор справедливо отмечает во введении, что изучение книги сможет обогатить общую культуру читателя, а также поведи его к самостоятельным исследованиям в данной области.

Книга будет полезной для студентов (экономистов, математиков, инженеров), изучающих вопросы математической экономики. Вместе с тем представляется, что круг читателей этой книги может оказаться шире, чем это задумано автором: так, квалифицированный математик, желающий быстро войти в проблематику математической экономики, легко сможет сделать соответствующий «срез».

Современная математическая экономика (понимаемая прежде всего как математическая дисциплина, ориентированная на

экономические приложения) представляет собой весьма обширную и бурно развивающуюся область знаний. Данная книга действительно носит вводный характер. Однако автор вводит читателя не во всю математическую экономику (что в рамках одной сравнительно небольшой книги было бы попросту невозможно), а лишь в тот ее раздел — быть может, один из самых важных и наиболее разработанных, — который берет начало в основном от идей Вальраса и Парето, а также от знаменитой модели Эрроу—Дебре. Полностью за рамками изложения остались модели экономической динамики (см., например, [5], [8], [9]), стохастические модели [1], эконометрика [4]. Оптимизационные задачи (см., например, [3]) играют в данной книге незначительную и чисто вспомогательную роль. Вопросы децентрализованного управления экономикой (см. [2]) лишь намечены в гл. IV. Ключевую роль в книге играет понятие выпуклости; однако автор не говорит о связях математической экономики с выпуклым анализом ([5], [7], [9]). Не рассматривается как самостоятельный вопрос теория полезности ([6], [10]). Перечень подобных «лакун» можно было бы продолжить; тем не менее есть все основания считать, что автор весьма удачно справился с поставленными перед собой задачами.

Достаточно полное представление о современном состоянии математической экономики читатель сможет получить, ознакомившись с капитальным трехтомником [13].

Коротко остановимся на некоторых методологических вопросах. В настоящее время едва ли кто-либо станет публично оспаривать необходимость и полезность математизации экономической науки. Разумеется, для возможности проникновения в нее математики экономика (как, впрочем, и любая другая общественная наука) должна достичь определенного уровня содержательной зрелости. Язык и методы математики оказались весьма продуктивными для развития экономической теории. С другой стороны, задачи экономики стимулировали развитие многих новых разделов математики. Классический пример дает теория игр, которая мыслилась ее создателями именно как аппарат изучения первичных форм экономического поведения (см. [6]).

Исходным пунктом экономических воззрений автора являются положения так называемой «неоклассической» экономической школы, получившей широкое признание в буржуазной экономической науке. Первичными в экономике он считает процессы потребления, обмена и распределения благ (а не их производства), рассматриваемые прежде всего с точки зрения элементарного участника экономики — индивидуума-потребителя. Во введении автор прямо говорит, что это имеет не принципиальные, а скорее прагматические причины, основными из которых являются значительная разработанность соответствующей математической тео-

рии и относительная ее простота. Здесь же он признает, что математизация схем К. Маркса — значительно более сложная задача, и потому она продвинута пока в меньшей степени. Таким образом, ценность данной книги для советского читателя состоит в излагаемых в ней методах, т. е. в современном математическом аппарате. Было бы совершенно неправомерно считать его сомнительным или неадекватным лишь на том основании, что он применялся для исследования моделей, отражающих те или иные черты капиталистической формации. Напротив, нужно иметь в виду, что обменные и распределительные процессы в том или ином виде имеют место при любом способе производства. Поэтому освоение, критическое осмысление и обобщение соответствующих формальных подходов на надлежащей методологической основе дадут необходимую базу для разработки математических аспектов политической экономии социализма.

Перевод книги выполнили В. Н. Десницкая (введение, гл. I и § 1 гл. II), Е. Б. Яновская (§ 2—4 гл. II и гл. III) и А. Н. Ляпунов (гл. IV).

А. А. Корбут

В. Л. Макаров

ЛИТЕРАТУРА

1. Аркин В. И., Евстигнеев И. В. Вероятностные модели управления и экономической динамики. — М.: Наука, 1979.
2. Багриновский К. А. Основы согласования плановых решений. — М.: Наука, 1977.
3. Интригатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. — М.: Прогресс, 1975.
4. Маленко Э. Статистические методы эконометрии. — М.: Статистика, вып. I, 1975; вып. 2, 1976.
5. Макаров В. Л., Рубинов А. М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. — М.: Наука, 1973.
6. фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970.
7. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. — М.: Мир, 1972., 1972.
8. Рубинов А. М. Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам. — Л.: Наука, 1980.
9. Современные проблемы математики. Т. 19 (Итоги науки и техники. ВИНТИ АН СССР). — М.: 1982.
10. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. М.: Наука, 1978.
11. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. — М.: Мир, 1979.
12. Ekeland I. Nonconvex minimization problems. Bull. Amer. Math. Soc. (New Series), 1979, 1, N 3, 443—474.
13. Handbook of mathematical economics. K. J. Arrow, M. D. Intriligator, eds. Amsterdam, North-Holland. Vol. 1, 1981; Vol. 2, 1981; Vol. 3, 1982.

Введение

Эта книга была задумана и написана для серии «Методы». Это означает, что она преследует в основном педагогические цели. Математическая экономика оформилась как вполне самостоятельная наука, которой занимается много людей во всем мире. Поэтому нам представляется, что пришло время появиться книге, предназначенной для ознакомления с этой наукой.

Разумеется, это относится прежде всего к ознакомлению с результатами. Они весьма многочисленны, большая часть их имеет долгую историю, и некоторые из них широко известны. Например, теорема Эрроу о невозможности (1963) завершила исследования, начатые Кондорсе. Эта теорема утверждает, что для общества, которое должно выбирать одно из нескольких решений, единственный способ выбора, приемлемый при всех обстоятельствах, состоит в передаче права выбора «диктатору». Важность этого результата, очевидно, далеко выходит за рамки математической экономики. Однако его нужно как следует осмыслить. Возьмем другой пример. Общая теория равновесия в настоящее время облечена в математическую форму весьма расплывчатый закон спроса и предложения; это стало возможным благодаря двухсотлетним исследованиям, этапы которых были отмечены работами Адама Смита, Леона Вальраса, Вильфредо Парето, Жерара Дебре. Мысль о том, что при нехватке некоторого товара его цена имеет тенденцию к росту, теперь может показаться тривиальной. Однако между этим неясным интуитивным представлением и точной формулировкой, утверждающей существование системы цен, при которой предложение уравнивает спрос на всех рынках, лежит целая пропасть.

Эти два примера показывают, сколь глубоким является предмет исследования. Речь идет о выводе из индивидуальных способов поведения, рассматриваемых как исходные, экономических законов на уровне общества. Это традиционная цель микроэкономики в противоположность макроэкономике, в которой исходные данные с самого начала уже находятся на уровне общества. Тем не менее мы приводим здесь некоторые элементарные соображения о явлениях чисто макроэкономических, таких, как налоговая система или финансы. Однако в нашей книге упор делается не на это. Математические модели, с которыми мы будем работать, в большинстве случаев не касаются финансов; будущее — если о нем пойдет речь — предполагается полностью известным, и не рассматриваются никаких социальных механизмов, которые противодействовали бы абсолютной гибкости цен. Все приносится в жертву индивидууму; будет проведен подробный анализ структуры его вкусов, а также последствий, которые она влечет за собой для экономики в целом. В основе всех этих рассуждений лежит постулат о том, что двигателем экономики

является стремление индивидов к обогащению.

Таким образом, мы будем иметь дело с неоклассической проблематикой. Построить непротиворечивую математическую модель на кейнсианской или марксистской основе гораздо сложнее, однако в этой области в последние годы проводились значительные исследования и были достигнуты определенные успехи. Математическая экономика — это молодая и бурно развивающаяся область науки. В настоящее время три международных журнала полностью посвящены публикации новых результатов. Масса накопленных знаний уже такова, что остро встает проблема выбора. Поэтому мы будем исходить из наиболее простой и известной модели, досконально изучим ее, а затем будем последовательно обогащать ее дополнениями в порядке возрастания их сложности.

Вряд ли на этом пути удастся изложить все, что следовало бы. Однако читатель, который доберется до конца книги, приобретет основу знаний и овладеет методами рассуждений, которые смогут стать для него либо элементом его общей культуры, либо трамплином для дальнейших исследований.

Эта книга знакомит также с методами. Один из принципов обучения состоит в том, что метод считается более важным, чем результат, подобно тому как разум важнее памяти. Это особенно верно для математической экономики, своеобразие которой по сравнению с политической экономией заключается именно в используемом методе: полной математической формализации. Как мы уже отмечали, подобная формализация не всегда возможна. К тому же для изучения внутренней стройности теории очень интересно локализовать именно те места, которые не поддаются формализации. Но когда формализация возможна, использование математики придает рассуждениям несравненную тонкость и строгость. В тех случаях, когда экономисты не довольствовались простым описанием реальности, они всегда пытались использовать дедуктивный подход. Математическая экономика является результатом их усилий. Ее современная область исследования пока еще ограничена, но ей предвещают значительное расширение. Итак, математика пришла в экономику полностью вооруженной и оснащенной. Чрезвычайная точность математического мышления требует особой терминологии, которая часто бывает обманчивой: кажется, что математики находят своеобразное удовольствие в том, чтобы обозначить привычным всем словом некоторое научное понятие. Для большей четкости излагаемый материал надлежащим образом расчленен и представлен в виде отдельных утверждений, каждое из которых сопровождается доказательством, как правило, опирающимся на предшествующие утверждения, но ни в коем случае не на последующие (чтобы избежать порочных кругов). Используемые понятия вводятся посредством выделенных в тексте определений; результаты,

которые мы считаем наиболее важными, отнесены к разряду теорем. Некоторые особо тонкие доказательства требуется проводить в несколько этапов, часть которых носит чисто технический характер; их мы выделили в виде лемм. Для проверки строгости доказательств на каждом этапе имеется целый арсенал средств. Мы не отрицаем, что он может оттолкнуть профана. Однако математика как раз и состоит в разумном применении этого арсенала. Неудобства его использования мы постараемся свести для читателя к минимуму последовательным изложением. Материал будет основываться на технически наиболее простых случаях, и при этом мы никогда не будем терять из виду экономическое обоснование.

Эту книгу смогут с пользой прочесть студенты первых курсов экономических специальностей. Некоторая научная зрелость и старательность читателя при этом более необходимы, чем знание того небольшого количества математических сведений, которые приводятся по ходу изложения.

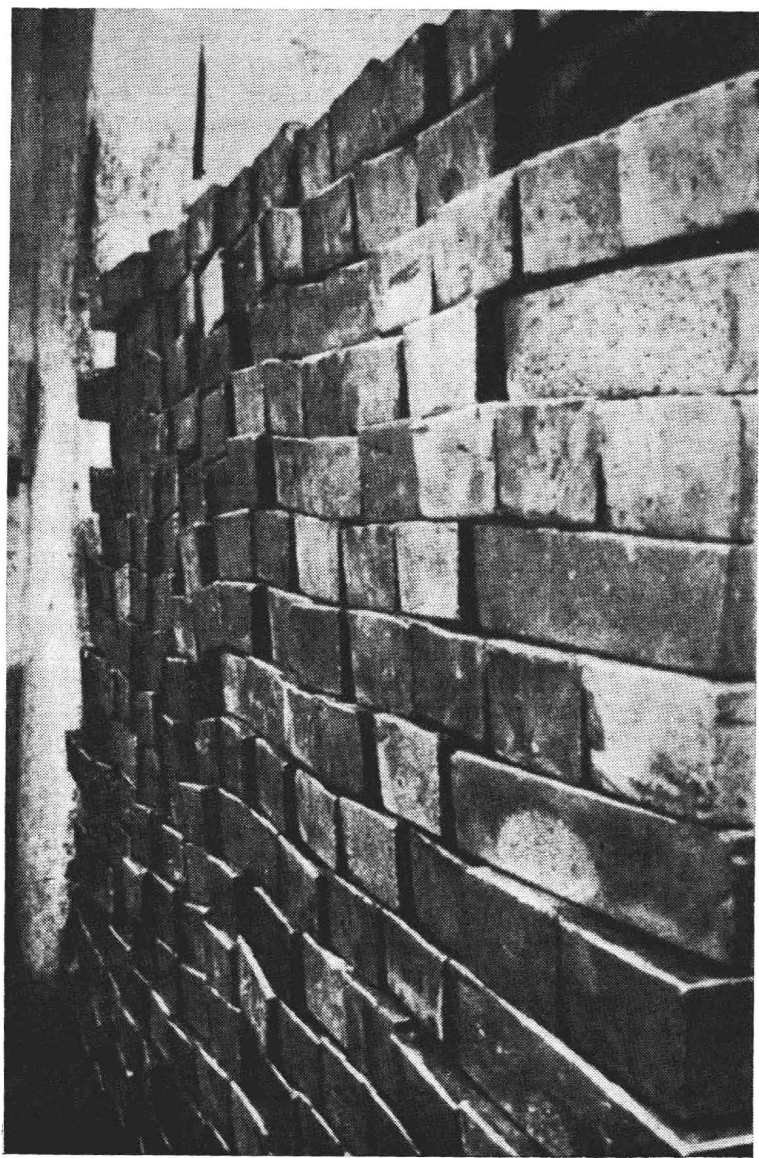
Однако не будем более уклоняться от вопроса, который постоянно возникает в различных формах. Зачем экономику делать математической? Разве этим вы поможете нам преодолеть инфляцию? Математическая экономика настолько молода, что все еще вынуждена доказывать свое право на существование.

Экономика стремится стать математической, потому что со времен Декарта математизация стала идеалом строгости для всякой науки. Физика его достигла. Общественные же науки еще далеки от этого идеала, но экономиста ближе к нему, чем какая-либо другая из них. Однако не следует немедленно ожидать слишком многого. Возможно, когда-нибудь мы будем располагать формализованной теорией финансов, объясняющей причины инфляции на Западе и дающей средства борьбы с нею. Сейчас этот момент еще не наступил. Существующие математические модели являются достижениями классической микроэкономики. Следовательно, они позволяют проводить традиционные исследования в терминах социальной эффективности и правильности цен. Можно, в частности, внести в их актив разработку процедур планирования, о которых нам представится случай поговорить. Однако мы полагаем, что основной вклад математической экономики находится на гораздо более глубоком уровне. Этот вклад состоит в отделении того, что истинно в силу логической необходимости, от того, что истинно по предположению. Поэтому в любой теоретической или практической задаче можно полностью выделить экономические предпосылки (в которых мы, возможно, и не всегда отдаем себе отчет), необходимые для получения предлагаемых выводов. Рассмотрим, например, экономику частной собственности, объединяющую большое число участников, для которых существует только один закон — их

алчность. Трудно представить себе, что это может привести к чему-нибудь другому, кроме полного хаоса. Однако классики экономической науки всегда утверждали, что возможно и другое решение. С этой точки зрения весьма интересно узнать, что в силу логической необходимости всегда можно найти систему цен, приводящую к равновесию (по крайней мере приближенному) между предложением и спросом. Возьмем другой пример. Карл Маркс указал на тенденцию нормы прибыли к понижению как на один из законов эволюции капиталистической системы. Однако ни одна из математических моделей, предлагавшихся на сегодняшний день, не смогла установить эту закономерность в том общем виде, который придал ей Маркс. По-видимому, этот закон находится в логической зависимости от некоторых дополнительных гипотез, например равенства темпа роста и нормы прибыли, отсутствия излишков продукции. Значит, можно считать, что в современной экономике этот закон не выполняется, что, однако, никак не затрагивает основ марксистской теории. Но это также означает, что если мы хотим усмотреть в тенденции нормы прибыли к понижению универсальный закон экономики, то его следует постулировать как таковой.

Роль математической экономики состоит в прояснении используемых предположений и в строгом выводе их следствий. Она не призвана диктовать экономические решения, которые должны включаться во всю совокупность идеологических и социальных явлений. Математическая экономика не подменяет собой ни политику, ни философию. Некоторые, возможно, будут разочарованы этой ее скромной ролью. Мы же, напротив, видим в этом выражение глубокой истины: управление людьми возлагается на людей, и наука их от этого не освобождает. Мультипликатор, гигантская вычислительная машина, которая диктует поведение каждому, исходя из общих интересов, — лишь порождение научной фантастики. Истинная наука, напротив, преграждает путь диктатуре, утверждая, что последняя не защищает общие интересы или общественные блага, — в этом, по нашему мнению, и состоит теорема Эрроу. Всякий, кто использует эти понятия, тем самым принимает определенные методологические предпосылки, в чем он должен отдавать себе отчет.

Математическая экономика учит строгости мышления и свободе суждений в области, где еще господствуют смешение стилей и доводы, базирующиеся лишь на авторитете. Она проясняет основные понятия и их взаимоотношения; вместе с тем она дает основу для приложений. Возможно, она является образом того, какими будут общественные науки в будущем. Лучше, чем какая-либо иная дисциплина, она объединяет два стимула науки, которые выдвигал в свое время Френсис Бэкон: «во славу Господа и для улучшения человеческого существования».



Они отплыли добывать таинственный металл,
Сокрытый до поры в Ниппона дальних шахтах...

I. Индивид и коллектив

§ 1. ТОВАРЫ

Первичными элементами экономики являются товары и участники. Каждое из этих понятий отталкивается от другого; именно эта их диалектическая связь и составляет предмет экономической науки. Говорят, что имеются экономические товары и участники экономики, если установлено, что эти товары обмениваются один на другой в результате соглашений, в которых заинтересованными сторонами выступают участники. Таким образом, существование рыбного рынка, на котором пользуется спросом камбала, превращает ее в экономический товар, а рыбака, поймавшего ее, в участника экономики. Тот же рыбак может затратить немало усилий на поимку медуз; однако, поскольку медузы никого не интересуют, они не составляют экономического товара. С другой стороны, морские хищники, которые питаются ценными сортами рыбы, никак не смогут повлиять на ее спрос, они никогда не приобретут статуса участников экономики. И все оттого, что они не проявляют особой склонности к обмену своей добычи на что-либо иное.

Эти несколько замечаний не так безобидны, как кажется. Их основная мысль состоит в том, что экономический товар определяется *способностью к обмену*. Этой мысли далеко до всеобщего признания. В том предпочтении, которое оказывают золоту государства и частные лица, мы находим отголоски гораздо более древней мысли о том, что экономический товар характеризуется некоторой внутренней стоимостью, присущей ему как таковому. В марксистской экономической теории экономические товары отождествляются с человеческим трудом; в качестве первичного момента в экономике выступает уже не обмен, а производство. Таким образом, каждому экономическому товару можно сопоставить его трудовую стоимость, которая ему присуща независимо от какого бы то ни было обмена. Мы не будем заниматься дальнейшим описанием этих методов; подчеркнем лишь, что мы принимаем другой подход.

Принятая здесь точка зрения становится особенно ясной, если мы прибегнем к контрасту. Экономический товар — это именно то, что является предметом сделок в данном обществе. Это не нормативное определение, это понятие, связанное с исторической ситуацией. Даже человек или его труд не имеют внутренней стоимости, которая позволяет оценить их наверняка. Конечно, в индустриальных обществах все люди выступают как

участники экономики (по крайней мере как потребители), и их труд, разумеется, является основным экономическим товаром, а для большинства — и единственным средством существования. Но это касается данной исторической ситуации. В античных обществах к экономическим товарам относилось большое количество людей, именовавшихся «рабами». Что касается труда, то он является экономическим товаром, если совершается свободным человеком, отдающим свой труд внаем за плату. Однако труд таковым не является, если он совершается рабом, все силы которого принадлежат его хозяину, в то время как хозяин со своей стороны ничем ему не обязан.

Разница между экономическими товарами и тем, что таковыми не является, будет колебаться в зависимости от исторических условий. Общественные посты являются экономическими товарами при продажности официальных учреждений. Становясь наследственными или замещаемыми по конкурсу, они перестают быть экономическими товарами. Даже если рассматривать общество в данный исторический момент, эта граница может быть очень расплывчатой. Например, куда отнести различные скрытые рынки, такие, как проституция или коррупция в современных обществах? Основное упрощение, которое мы сделаем для нужд нашей модели, будет состоять в том, что эта граница четко определена. Следовательно, список экономических товаров и участников экономики для изучаемого общества установлен. Повторим в последний раз, что этот список является чисто дескриптивным и не имеет никакой нормативной ценности.

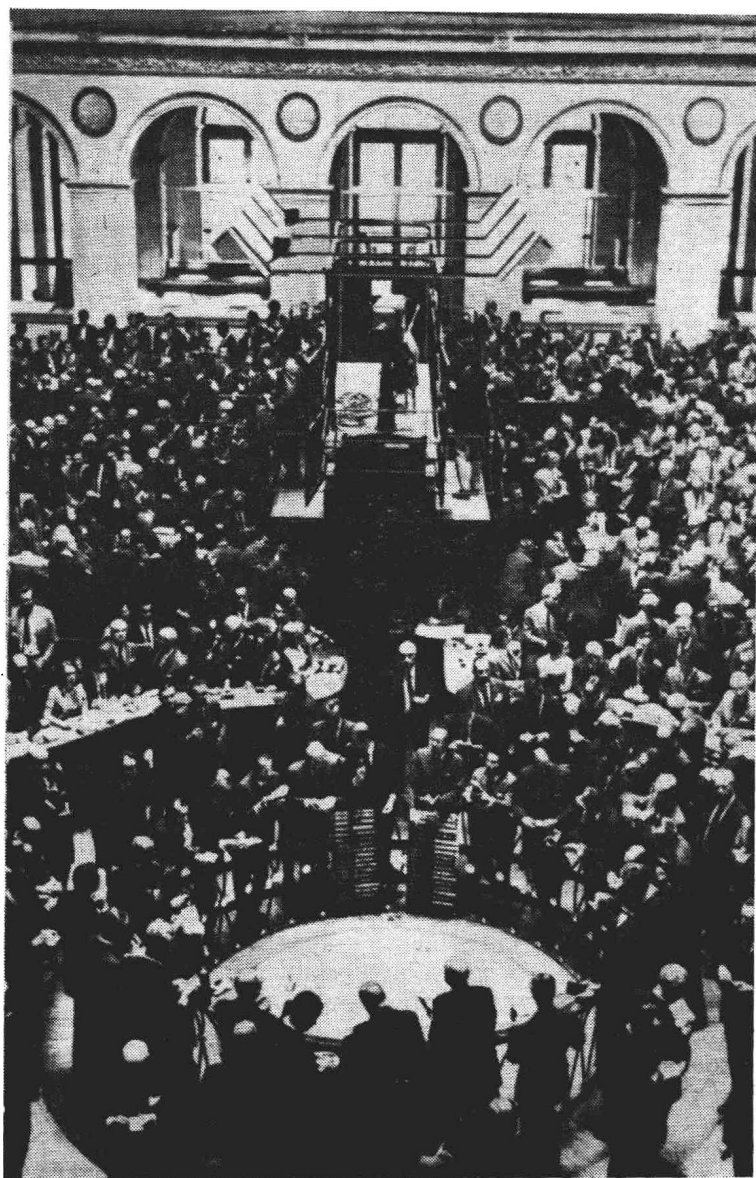
Пусть l — число экономических товаров и m — число участников. То, что число участников конечно, никого не удивит. Разумеется, если мы хотим сколько-нибудь претендовать на описание современной реальности, это число должно быть весьма велико. Это не мешает нам взять $m = 2$, если это упростит для нас представление некоторого конкретного явления. Больше может удивить то, что число товаров конечно, особенно если принять во внимание тот факт, что они локализованы и связаны с определенным моментом времени, как мы сейчас увидим. Попросту говоря, трудно допустить, чтобы участники всегда четко различали между собой бесконечное число различных товаров. По-видимому, более соответствует действительности весьма большое, но конечное число l . Во всяком случае, выбор бесконечного l приведет к математическим трудностям, несоизмеримым со скудными экономическими преимуществами, которые можно из этого извлечь.

Относительно экономических товаров всегда предполагается, что они локализованы и связаны с определенным моментом времени. Иными словами, зерно, подлежащее доставке в Чикаго в сентябре 1979 г., и зерно, подлежащее доставке в Париж в мае

1980 г., рассматриваются как различные товары. Экономическая реальность этого различия подтверждается существованием сделок на определенный срок, при которых один и тот же товар может продаваться одновременно по различным ценам. Некоторые из этих сделок являются к тому же в высшей степени спекулятивными: купить сегодня какао, подлежащее доставке через год, — это прекрасный способ разориться (или разбогатеть). Для целей нашего изложения разобьем время на некоторое число T периодов и пространство на некоторое число P мест доставки. Предполагается, что эти числа T и P конечны (но, возможно, очень велики). Это означает, что, например, за период принимается один месяц и предполагается изучать развитие экономики в течение десяти лет; тогда $T = 120$. Мы не будем делать различия с точки зрения времени и пространства между товарами, доставленными в течение одного и того же периода в окрестности одной и той же точки доставки.

Теперь мы сделаем второе упрощение для нужд нашей модели: все товары предполагаются *измеримыми*. Под этим мы подразумеваем, что каждый из них однороден и что их не продают поштучно. Это понимается в том смысле, что можно купить немного больше или немного меньше товара, или ровно в два раза больше, или ровно в два раза меньше.

Понятно, что эта возможность регулирования сильно упрощает процесс обмена. Поэтому исторические общества использовали различные приемы для ее обобщения: продукты питания продаются на вес, жидкости — на объем, труд оплачивается повременно. Для всех этих обычных товаров наше предположение справедливо. Проблемы возникают, когда речь заходит, например, об автомобилях: либо у нас есть автомобиль, либо его нет. На уровне производителя эта проблема исчезает: при годовом выпуске порядка миллиона автомобилей можно, конечно, продать любую долю этого количества. Даже на уровне потребителя можно выйти из положения, рассматривая различные модели, предлагаемые одним производителем, как один и тот же товар. Ведущие производители автомобилей предлагают весьма широкую гамму моделей, еще более обогащающуюся за счет дополнительного оборудования и распродаж со скидкой; благодаря этому можно купить автомобиль практически за любую цену. Сходные рассуждения применимы к продуктам тяжелой промышленности, таким, как атомные электростанции и авианосцы. Эти уникальные предметы создаются исключительно по заказам. Не существует ярмарки атомных электростанций или салона по продаже авианосцев. Создание такого рода установки является не исходным моментом сделки участников, а ее завершением. Проблема состоит не в том, чтобы узнать, купит ли государство или нет уже построенную установку, а в том, чтобы прийти к компро-



Современные экономики: множество участников ...