РУКОВОДСТВО К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО КУРСУ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

РУКОВОДСТВО К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО КУРСУ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ (СТАТИКА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ)

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ
И ДОПОЛНЕННОЕ

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ
Д-РА ТЕХН. НАУК,
ПРОФ. Г. К. КЛЕЙНА

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов
строительных специальностей
высших учебных заведений

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1980

ББК 38.112
Р85
УДК 624.04

Г. К. Клейн, Н. Н. Леонтьев, М. Г. Ванюшенков, Р. Ф. Габбасов, Л. И. Кошелев, Л. П. Портаев, А. С. Яковлев

Рецензент:
Кафедра строительной механики и теории упругости Саратовского политехнического института (зав. кафедрой — проф. В. В. Петров)

Р85 **Руководство** к практическим занятиям по курсу строительной механики (статика стержневых систем): Учеб. пособие для студентов вузов / Г. К. Клейн, Н. Н. Леонтьев, М. Г. Ванюшенков и др.; Под ред. Г. К. Клейна. 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. школа / 1980. — 384 с., ил.

В пер.: 90 к.

Пособие охватывает расчет статически определимых и неопределимых стержневых систем. Содержит большое число характерных типовых примеров с подробными решениями, которым предшествует краткое изложение основных положений и окончательных результатов теории.

По сравнению с предыдущим изданием бо́льшая часть текста коренным образом переработана; введены новые главы, относящиеся к расчету пространственных рам и к программированию задач строительной механики; многие примеры заменены более информативными.

Предназначено для студентов строительных специальностей вузов.

$Р\ \dfrac{30106-117}{001(01)-80}\ 71-80$ 2105000000 ББК 38.112

Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (статика стержневых систем)

Под общей редакцией д-ра техн. наук, проф. Г. К. Клейна

Редактор *Т. М. Минаева*
Художественный редактор *Н. К. Гуторов*
Технический редактор *Т. Д. Гарина*
Корректор *Р. К. Косинова*

ИБ № 2112

Изд № От-317. Сдано в набор 12.07.79. Подп. в печать 17.01.80. Формат 60×90¹/₁₆. Бум. тип. № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 24 усл. печ. л. 21,68 уч.-изд. л. Тираж 50 000 экз. Зак. № 770. Цена 90 коп.

Издательство «Высшая школа»
Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее руководство к практическим занятиям по общему курсу строительной механики, предназначенное для студентов III курса строительных специальностей вузов, отвечает действующей в настоящее время программе.

Прослушав лекции по соответствующему разделу курса, студент может приступить к решению задач и к самостоятельному выполнению домашних расчетных работ, пользуясь этим руководством, примеры в котором расположены в логической последовательности и в порядке возрастания их сложности.

Настоящее издание по сравнению с предыдущим, вышедшим в 1973 г., значительно переработано. Добавлены главы 17 и 18, относящиеся к расчету пространственных рам и к программированию задач строительной механики стержневых систем; заново написаны главы 1, 3, 8, 13, 14 и 15; расчеты сооружений в матричной форме, содержащиеся в предыдущем издании в обособленной главе, рассмотрены здесь в каждой из глав, что повышает их роль и теснее связывает с другими разделами курса; многие примеры заменены другими, несущими бо́льшую информацию.

Руководство составлено коллективом преподавателей кафедры строительной механики Московского инженерно-строительного института имени В. В. Куйбышева. При этом § I.1—I.3 написаны М. Г. Ванюшенковым; § II.1—II.4 — Р. Ф. Габбасовым; § II.5 —Л. П. Портаевым; § III.1 и III.2 — Р. Ф. Габбасовым; § III.3 — Л. П. Портаевым; § IV.1—IV.4 — Л. И. Кошелевым; § IV.5 — Л. П. Портаевым; § V.1—V.3 — Л. И. Кошелевым; § V.4 — Л. П. Портаевым; § VI.1—VI.3 — Р. Ф. Габбасовым; § VII.1—VII.3 — А. С. Яковлевым; § VIII.1—VIII.8 — М. Г. Ванюшенковым; § VIII.9 — Л. П. Портаевым; § IX.1—IX.6 — Г. К. Клейном; § IX.7 — Л. П. Портаевым; § X.1—X.7 — Л. И. Кошелевым; § X.8 — Л. П. Портаевым; § XI.1—XI.3 — Л. П. Портаевым; § XII.1 и XII.2 — А. С. Яковлевым; § XIII.1—XIII.5 — Н. Н. Леонтьевым; § XIII.6 — Л. П. Портаевым; § XIV.1—XIV.3 — Н. Н. Леонтьевым; § XV.1—XV.6 — Г. К. Клейном; § XVI.1—XVI.7 — Г. К. Клейном; § XVII.1—XVII.3 — Г. К. Клейном; § XVIII.1—XVIII.5 — Р. Ф. Габбасовым.

При подготовке настоящего издания авторами с благодарностью учтены ценные замечания кафедры строительной механики и теории упругости Саратовского политехнического института, возглавляемой проф., д-ром техн. наук В. В. Петровым, а также пожелания, содержащиеся в откликах читателей на предыдущее издание.

ГЛАВА I
КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СООРУЖЕНИЙ

§ 1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ И АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ПЛОСКИХ СИСТЕМ

В строительной механике при решении задач расчета реальных сооружений на прочность, жесткость и устойчивость вместо самого сооружения рассматривается его упрощенное изображение, свободное от второстепенных, не играющих существенной роли в работе сооружения факторов, называемое расчетной схемой. В дальнейшем для краткости расчетную схему будем называть сооружением и ограничимся рассмотрением лишь сооружений в виде плоских систем, составленных из отдельных элементов, связанных между собой. Такие системы могут воспринимать нагрузку лишь в том случае, если они сохраняют заданную им при возведении внутреннюю структуру, т. е. геометрическую форму и положение. *Изменяемые системы не в состоянии уравновесить внешние силы и* под их действием приходят в движение, меняют свою форму. Естественно, что такие системы нельзя использовать в качестве сооружений. Другими словами, сооружение должно быть структурно, или геометрически неизменяемым (т. е. изменение его формы возможно лишь за счет деформации элементов) и неподвижным относительно основания. Для выяснения того, обладает ли данная система этой способностью, какими условиями она обеспечена, а также для уяснения роли, которую играют отдельные элементы в работе сооружения, служит кинематический анализ, который должен предшествовать расчету.

Изменяемость внутренней структуры и подвижность сооружения относительно основания характеризуются его степенью свободы — числом независимых геометрических параметров, определяющих положение всех элементов сооружения. Поэтому кинематический анализ сооружения начинается с определения его степени свободы.

Каждый структурно (геометрически) неизменяемый элемент сооружения, называемый диском, имеет на плоскости три степени свободы, так как он может перемещаться поступательно в двух направлениях и поворачиваться вокруг любой точки. *Простейшим диском* является стержень. Для обеспечения неизменяемости структуры и неподвижности сооружения диски соединяют различными устройствами, ограничивающими степень свободы. Всякое устройство, отнимающее у тела одну степень свободы, называется кинематической связью. В качестве связей используют шарниры и опоры. Шарниры бывают простыми (рис. I.1, *а*) и кратными (рис. I.1, *б*). Простой шарнир соединяет два диска, кратный — более двух и эквивалентен (n — 1) простым шарнирам, где n — число соединяемых дисков. Каждый простой шарнир эквивалентен двум связям, так как препятствует любым двум взаимным линейным смещениям двух дисков, оставляя возможность взаимного их поворота. Различают следующие типы расчетных схем опор (рис. I.2): *а* — цилиндрическая подвижная, или шарнирно подвижная, *б* — цилиндрическая неподвижная, или шарнирно неподвижная, *в* — защемляющая неподвижная, или жесткая заделка, *г* — защемляющая подвижная, или скользящая заделка, эквивалентные соответственно одному, двум, трем и двум опорным стержням, в каждом из которых действует опорная реакция. На рис. I.3 показаны шарнирно-стержневые эквиваленты жесткой и скользящей заделок. Здесь расстояние l_0 называется глубиной заделки, а произведение $V_2 l_0 = M$ — опорным моментом или моментом в заделке. Каждый опорный стержень эквивалентен одной связи, так как препятствует перемещению диска в направлении стержня.

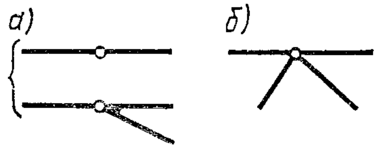

Рис. I.1

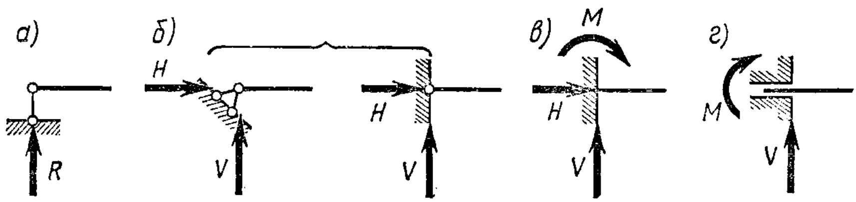

Рис. I.2

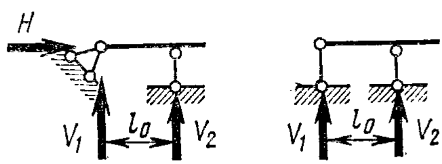

Рис. I.3

Из сказанного выше следует, что степень свободы W сооружения, состоящего из $Д$ дисков, соединенных $Ш$ простыми шарнирами и имеющего C_0 опорных стержней, может быть определена по формуле П. Л. Чебышева:

$$W = 3Д - 2Ш - C_0. \qquad (I.1)$$

Для определения числа $Д$ необходимо предварительно отбросить все шарниры и опоры, а для определения числа $Ш$ — все опоры.

Для шарнирно-стержневых систем (ферм), т. е. систем, состоящих из стержней, соединенных между собой по концам шарнирами (причем каждый стержень прикрепляется к соседним только двумя шарнирами), степень свободы может быть определена по более простой формуле:

$$W = 2У - С - С_о, \qquad (I.2)$$

где $У$ — число узлов фермы; $С$ — число внутренних стержней фермы; $С_о$ — число опорных стержней. Эта формула получена исходя из того, что каждый узел, как точка, имеет на плоскости две степени свободы, а каждый стержень, соединяющий два узла, или опорный эквивалентны одной связи, так как налагает на координаты этих точек единственное условие — постоянство расстояния.

Степень свободы системы, не имеющей опорных стержней, складывается из двух частей: степени изменяемости внутренней структуры системы и степени подвижности ее *относительно основания, которая равна трем.* Обозначая степень изменяемости структуры системы через И, можно записать

$$И = W - 3 = 3Д - 2Ш - 3 \qquad (I.3)$$

или для шарнирно-стержневых систем

$$И = 2У - С - 3. \qquad (I.4)$$

Для системы, имеющей опорные стержни, не делают различия между степенью свободы и степенью изменяемости, рассматривая основание в качестве диска, связанного с сооружением опорными стержнями.

При определении степени свободы или степени изменяемости системы возможны следующие три качественно различных результата:

1. $W > 0$ или $И > 0$ — система структурно изменяемая, так как не имеет достаточного количества связей. Система, для которой $W = 1$ или $И = 1$, называется механизмом.

2. $W = 0$ или $И = 0$ — система обладает необходимым минимумом связей, чтобы быть неподвижной и неизменяемой.

3. *$W < 0$ или $И < 0$ — система имеет лишние связи.*

Аналитические условия $W \leqslant 0$ или $И \leqslant 0$ являются необходимыми, но недостаточными для суждения о неизменяемости и неподвижности сооружения, так как эти характеристики зависят не только от числа связей, наложенных на диски, но и от их расположения. Для того чтобы узнать, является ли сооружение действительно неизменяемым и неподвижным, а также выяснить, какую роль играют отдельные элементы в его работе, необходимо произвести анализ структуры сооружения, для чего нужно знать принципы образования структурно неизменяемых систем. Перечислим основные из них:

1. Присоединение к неизменяемой системе двухстержневого звена (диады) не изменяет степени свободы системы (рис. I.4, *а*).

2. Два диска могут быть соединены жестко с помощью шарнира C и стержня AB, ось которого не проходит через центр шарнира (рис. I.4, *б*).

3. Два диска могут быть соединены жестко тремя стержнями, не пересекающимися в одной точке и, следовательно, не параллельными (рис. I.4, *в*). Этот принцип может быть сведен к предыдущему, поскольку два стержня всегда могут быть заменены фиктивным шарниром, расположенным в точке пересечения этих стержней.

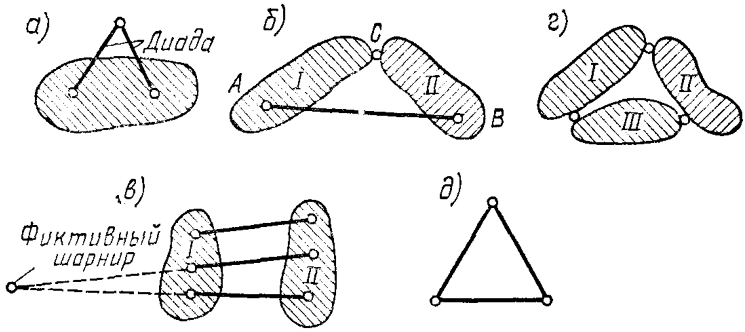

Рис. I.4

4. Три диска можно соединить жестко с помощью трех шарниров, не лежащих на одной прямой (рис. I.4, *г*).

Все перечисленные принципы могут быть сведены к одному: шарнирно-стержневой треугольник (рис. I.4, *д*) — фигура структурно, т. е. геометрически, неизменяемая.

§ 1.2. МГНОВЕННАЯ ИЗМЕНЯЕМОСТЬ СИСТЕМ

Если в структурно неизменяемой системе изменять длину стержней или угол наклона связей, то можно получить систему, которая обладает свойствами некоторой структурной изменяемости.

Рассмотрим, например, вариации простой балки, опирающейся на три опорных стержня. Эта система, очевидно, неподвижна и неизменяема до тех пор, пока ось правого опорного стержня не проходит через центр шарнира *A* (рис. 1.5, *а*). Если же эту опору повернуть в горизонтальное положение (рис. 1.5, *б*), система станет изменяемой на какое-то мгновение, пока узел *B* не переместится на бесконечно малую величину по общей касательной к дугам *1* и *2*. Как только это перемещение произойдет, три шарнира *A*, *B*, *C* перестанут находиться на одной прямой и, следовательно, система станет неизменяемой.

Такие системы называются **м г н о в е н н о и з м е н я е м ы м и**. Как и изменяемые системы, их нельзя использовать в качестве инженерных сооружений. Также следует избегать систем, близких к мгновенно изменяемым. Поэтому кинематический анализ должен содержать проверку на мгновенную изменяемость.

Для анализа несложных систем достаточно знать принципы образования неизменяемых систем. Все исключения из них приводят к мгновенно изменяемым системам. Например (рис. I.6), два диска, соединенные тремя и более пересекающимися в одной точке *O* (или параллельными) стержнями (рис. I.6, *а*), или три диска *I*, *II* и *III*, соединенные тремя шарнирами O_1, O_2 и O_3, лежащими на одной прямой (рис. I.6, *б*).

Статическим признаком мгновенно изменяемых систем является то, что в их элементах при действии конечных нагрузок или даже без них могут возникать бесконечно большие усилия или усилия неопределенной величины, что можно видеть на примере той же балки (см. рис. I.5).

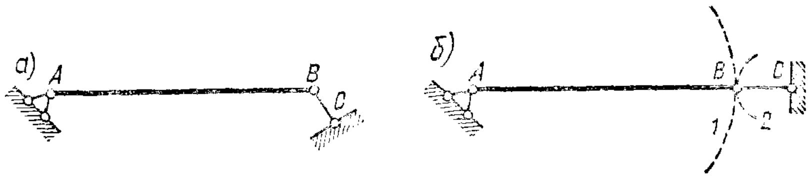

Рис. I.5

Опорная реакция в стержне BC может быть определена из уравнения равновесия $\Sigma M_A = 0$; $R_{BC} = M_A^{в}/r$, где $M_A^{в}$ — суммарный момент внешних сил относительно точки A; r — плечо реакции R_{BC}. При приближении стержня BC к горизонтальному положению $r \to 0$ и в пределе (см. рис. I.5, *б*) $r = 0$. Следовательно, $R_{BC} = M_A^{в}/0 = \infty$. При отсутствии же нагрузки $R_{BC} = [0/0]$, т. е. неопределенность.

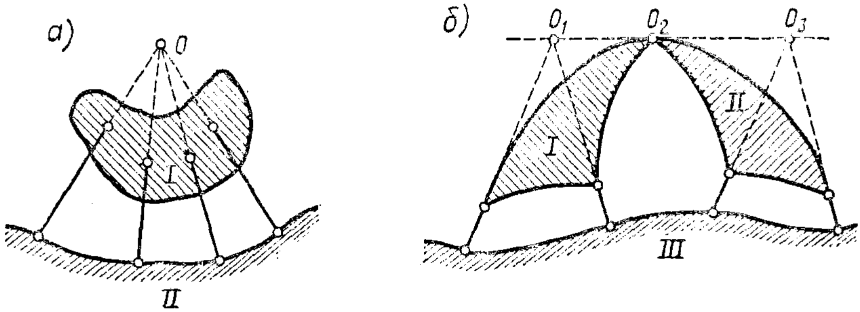

Рис. I.6

На этом признаке основан статический способ проверки систем на мгновенную изменяемость, в соответствии с которым определяют усилия во всех элементах системы при произвольной внешней нагрузке. Если они имеют вполне определенные и конечные значения, а без нагрузки (нулевая нагрузка) усилия во всех элементах равны нулю и такое нулевое решение является единственно возможным, то система структурно неизменяемая.

Для проверки на мгновенную изменяемость шарнирно-стержневых систем со сложной структурой может быть с успехом использован с п о с о б з а м е н ы с т е р ж н е й, суть которого состоит в следующем: вместо заданной системы со сложной структурой рассматривается так называемая з а м е н я ю щ а я с и с т е м а, которая получается из заданной отбрасыванием одного или нескольких стержней и заменой их действия неизвестными силами X_i. При этом в других местах системы необходимо добавить столько же стержней, сколько было отброшено, чтобы не изменить степень свободы системы. Добавлять стержни надо таким образом, чтобы полученная в результате заменяющая система была заведомо геометрически неизменяемой и удобной для расчета. Заменяющая система будет эквивалентна заданной, если усилия в добавленных, так называемых **з а м е н я ю щ и х**, стержнях будут равны нулю от действия заданной нагрузки и сил X_i, приложенных вместо отброшенных стержней. Для системы с n заменяющими стержнями это может быть записано так:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= N_{11}X_1 + N_{12}X_2 + \ldots + N_{1n}X_n + N_{1p} = 0; \\ N_2 &= N_{21}X_1 + N_{22}X_2 + \ldots + N_{2n}X_n + N_{2p} = 0; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ N_n &= N_{n1}X_1 + N_{n2}X_2 + \ldots + N_{nn}X_n + N_{np} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{I.5}$$

где N_{ik} — усилие в i-м заменяющем стержне от силы $X_k = 1$, приложенной вместо k-го отброшенного стержня; N_{ip} — усилие в том же стержне от действия внешних сил.

Данная система n алгебраических уравнений допускает единственно возможное определенное решение, если определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, отличен от нуля. Следовательно, если

$$D = \begin{vmatrix} N_{11} & \ldots & N_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ N_{n1} & \ldots & N_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{I.6}$$

или $N_{11} \neq 0$ при одном заменяющем стержне, исходная система неизменяемая, в противном случае — мгновенно изменяемая.

Итак, при анализе расчетных схем сооружений можно рекомендовать придерживаться следующего порядка: сначала по формулам (I.1) или (I.2) определяют степень свободы системы W, а для систем без опор — степень изменяемости $И$ по формулам (I.3) и (I.4). Если W или $И > 0$, анализ заканчивается, так как система изменяемая. При W или $И \leqslant 0$ проводят анализ структуры, пользуясь принципами образования неизменяемых систем. Если окажется, что система имеет неизменяемую структуру, делают проверку на мгновенную изменяемость одним из указанных способов.

§ I.3. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

П р и м е р I.1. Произвести кинематический анализ системы, показанной на рис. I.7.

Вначале с помощью формулы (I.1) определяем степень свободы системы. Отбросив все шарниры и опорные стержни, находим, что система состоит из пяти дисков, т. е. $Д = 5$. Отбросив все опорные стержни, определяем число шарниров, приведенное к простым, $Ш = 6$ — по два в точках B и C, по одному в точках A и D. Число опорных стержней $C_0 = 3$, следовательно, $W = 3Д - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 - 3 = 0$, т. е. система может быть структурно неизменяемой и статически определимой. Чтобы убедиться, что это так, производим анализ ее структуры. Так как три диска: AB, BC и AC связаны тремя шарнирами A, B, C, не лежащими на одной прямой, они образуют диск, к которому жестко присоединен диск BD с помощью шарнира B и стержня CD, ось которого не проходит через центр шарнира. Эта неизменяемая фигура в соответствии с третьим принципом жестко присоединена к земле с помощью трех опорных

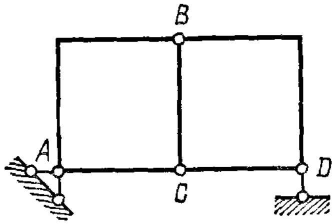

Рис. I.7

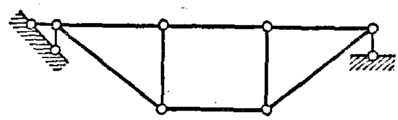

Рис. I.8

стержней, не пересекающихся в одной точке. Поскольку система образована в соответствии с принципами образования структурно неизменяемых систем, она неизменяема и не является мгновенно изменяемой.

Пример I.2. Произвести кинематический анализ системы, изображенной на рис. I.8.

Поскольку система является шарнирно-стержневой, для определения ее степени свободы используем формулу (I.2). Число узлов системы $У = 6$, число стержней $C = 8$, $C_0 = 3$, следовательно, $W = 2 \cdot 6 - 8 - 3 = 1$. Система имеет одну степень свободы, т. е.

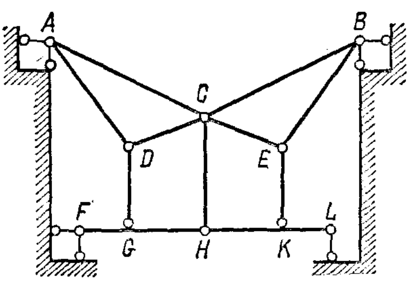

Рис. I.9

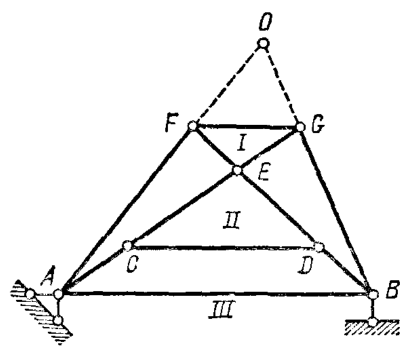

Рис. I.10

является механизмом и не может быть использована в качестве строительной конструкции.

Пример I.3. Исследовать систему, показанную на рис. I.9.

Пользуясь формулой (I.1), определяем степень свободы системы. Число дисков $Д = 11$, простых шарниров $Ш = 14$ — по одному в точках A, B, G, K, по два в точках D, E, H и четыре в точке C, опорных стержней $C_0 = 7$. $W = 3 \cdot 11 - 2 \cdot 14 - 7 = -2$, следовательно, система имеет две лишние связи. Чтобы убедиться в ее неизменяемости, необходимо произвести анализ структуры. В данной системе можно выделить два неизменяемых треугольника: ACD и BCE, которые жестко соединены между собой и с землей, рассматриваемой как диск, с помощью трех шарниров A, B, C, не лежащих на одной прямой. Стержень FH прикреплен к этой неизменяемой части системы с помощью шарнира F и стержня CH, не проходящего через центр шарнира, так же как и стержень HL с помощью шарнира H и опорного стержня L. Стержни DG и EK лишние, так как и без них система неизменяемая. Проверки на мгновенную изменяемость производить не надо, поскольку соблюдены принципы образования неизменяемых систем.

Пример I.4. Произвести кинематический анализ системы, показанной на рис. I.10.

Пользуясь формулой (I.2) для шарнирно-стержневых систем, определяем число степеней свободы. Поскольку $У = 7$, $C = 11$, $C_0 = 3$, $W = 2 \cdot 7 - 11 - 3 = 0$, следовательно, система имеет необходимое количество связей, чтобы быть неизменяемой и статически определимой. Производим анализ ее структуры. Для этого вначале выделяем в системе неизменяемые треугольники. Их два: FGE и CED. Стержень AB составляет единое целое с землей (третий диск), так как прикрепляется к ней тремя опорными стержнями, не пересекающимися в одной точке. Чтобы проверить, жестко ли соединены эти три диска, воспользуемся теоремой о трех полюсах, в соответствии с которой три диска не могут иметь взаимных перемещений, если их три мгновенных центра вращения не лежат на одной прямой. Шарнир E является мгновенным центром вращения дисков I и II, а также дисков II и III, так как здесь находится фиктивный шарнир, заменяющий стержни AC и DB, соединяющие эти два диска. Следовательно, система мгновенно изменяемая, так как где бы ни находился мгновенный центр O вращения дисков I и III, через него и точку E можно всегда провести прямую, на которой будут лежать все три мгновенных центра вращения.

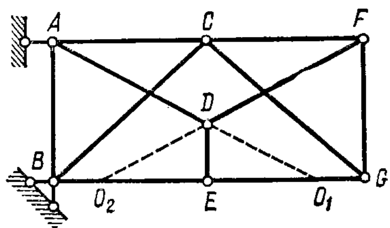

Рис. I.11

Пример I.5. Исследовать ферму, показанную на рис. I.11.

Определив по формуле (I.2) степень свободы $W = 2 \cdot 7 - 11 - 3 = 0$, делаем вывод, что система может быть неизменяемой и статически определимой. Чтобы убедиться в ее неизменяемости, производим анализ ее структуры. Система состоит из трех дисков — треугольники ABC, CFG и стержень DE, — связанных между собой стержнями BE, AD и EG и DF, которые могут быть заменены фиктивными шарнирами O_1 и O_2, а также шарниром C. На основании четвертого принципа образования неизменяемых систем можно сделать вывод, что все стержни соединены между собой жестко и прикрепляются к земле так же жестко с помощью трех опорных стержней, не пересекающихся в одной точке. Для проверки системы на мгновенную изменяемость применим способ нулевой нагрузки — определим опорные реакции и усилия во всех стержнях при условии, что внешней нагрузки нет. Из условия равновесия всей системы ($\Sigma M_A = 0$; $\Sigma M_B = 0$; $\Sigma Y = 0$) находим, что опорные реакции равны нулю. Затем, вырезав узел E и спроектировав все силы на вертикаль, находим, что усилие в вертикальном стержне $N_{DE} = 0$. После этого, записывая уравнения проекций двух сил, сходящихся в узле D (третья сила равна нулю), на направления нормалей к этим стержням,

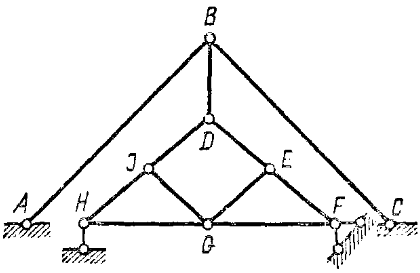

Рис. I.12

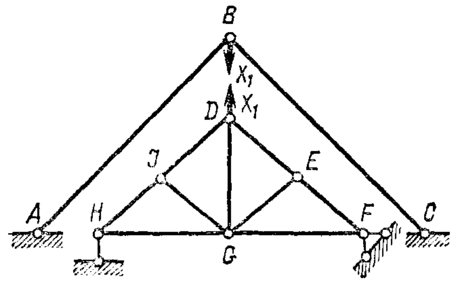

Рис. I.13

находим, что усилия в стержнях DA и DF также равны нулю. Рассмотрев затем равновесие узлов A, F, B, G, находим, что усилия во всех стержнях системы при отсутствии нагрузки равны нулю, следовательно, система неизменяемая.

Пример I.6. Произвести кинематический анализ системы, представленной на рис. I.12.

Определив по формуле (I.2) степень свободы $W = 2 \cdot 9 - 11 - 7 = 0$, устанавливаем, что система обладает необходимым минимумом связей, чтобы быть неизменяемой. Для проверки того, является ли действительно система неизменяемой, используем метод замены стержней. Для этого вначале необходимо выбрать заменяющую систему. Их может быть предложено несколько. Например, можно

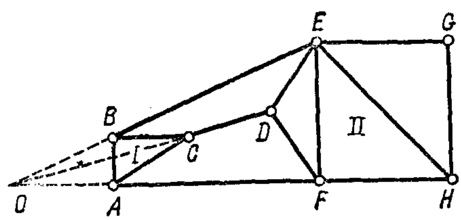

Рис. I.14

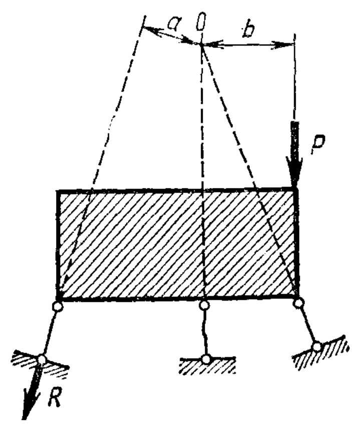

Рис. I.15

выбрать систему, представленную на рис. I.13. Она получена отбрасыванием стержня BD, замены его действия силами X_1 и добавлением одного стержня (заменяющего) между узлами D и G. Нетрудно убедиться, что выбранная заменяющая система неизменяема: стержни AB, BC и земля жестко соединены тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой. Нижняя же часть заменяющей системы имеет неизменяемую структуру, поскольку состоит из треугольника, например GHJ, к которому жестко присоединены все остальные узлы с помощью диад, и все это прикреплено к земле тремя опорными стержнями. Очевидно также, что выбранная система несложна для расчета. После выбора заменяющей системы нужно определить усилие в заменяющем стержне от действия сил $\bar{X}_1 = 1$. Вырезав последовательно узлы E, J, G и рассмотрев их равновесие (сумма проекций всех сил, сходящихся в узле, на нормаль к двум стержням, лежащим на прямой, т. е. DEF, DJH, FGH), получим, что усилие в заменяющем стержне DG от $\bar{X}_1 = 1$ равно нулю, следовательно, исходная система мгновенно изменяемая.

Пример I.7. Исследовать систему, показанную на рис. I.14.

Поскольку система не имеет опорных стержней, определим степень ее внутренней изменяемости по формуле (I.4): $И = 2У - С - 3 = 2 \cdot 8 - 13 - 3 = 0$. Следовательно, система может быть неизменяемой. Чтобы проверить, так ли это, нужно произвести анализ ее структуры. Нетрудно заметить, что система состоит из двух дисков (треугольника ABC и многоугольника $DEGHF$, образованного из треугольников DEF и EHG, жестко связанных шарниром E и стержнем FH), которые соединены между собой тремя стержнями BE, CD и AF, пересекающимися в одной точке O, следовательно, система мгновенно изменяемая.

Пример I.8. Исследовать на мгновенную изменяемость систему, изображенную на рис. I.15.

Составим уравнение равновесия в форме уравнения моментов всех сил относительно точки O:

$$\sum M_O = Pb - Ra = 0,$$

отсюда $R = \frac{Pb}{a}$.

При $a = 0$, т. е. при прохождении линии действия силы R через точку 0, $R \to \infty$, и, следовательно, система станет мгновенно изменяемой. При $P = 0$ получим $R = \left[\frac{0}{0}\right]$, т. е. неопределенность.

ГЛАВА II

ЛИНИИ И МАТРИЦЫ ВЛИЯНИЯ

§ II.1. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ ДЛЯ ОДНОПРОЛЕТНЫХ БАЛОК СТАТИЧЕСКИМ СПОСОБОМ

Линией влияния называют график зависимости искомого усилия или перемещения от положения единичной силы, сохраняющей постоянное направление.

Необходимость в линиях влияния возникает при расчете сооружений на подвижные нагрузки. Пусть по балке (рис. II.1) перемещается нагрузка, распределенная равномерно на отрезке c. Следует выяснить, при каком положении этой нагрузки (при каком значении переменной x) изгибающий момент в сечении D, например, будет иметь наибольшее значение. Для ответа на этот вопрос необходимо рассмотреть все возможные положения заданной нагрузки. Для этого распределенную нагрузку заменяют одной сосредоточенной вертикальной силой $\bar{P} = 1$. Величина искомого изгибающего момента зависит от положения единичной силы на балке. Эту зависимость можно выразить в виде некоторой функции $M_D = f(x)$ и построить ее график, изображающий влияние силы $\bar{P} = 1$ на величину изгибающего момента (или другого усилия) в рассматриваемом сечении. После этого задача по определению максимального значения искомого усилия от заданной нагрузки q (рис. II.1) или любой другой легко решается.

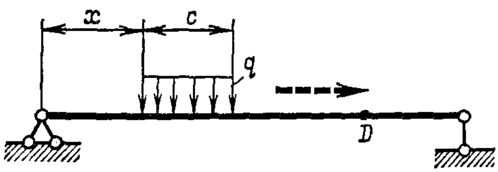

Рис. II.1

Линии влияния обычно строят в прямоугольных осях координат. Ось абсцисс удобно выбирать перпендикулярно линии действия силы $\bar{P} = 1$. По оси ординат откладывают значения искомого усилия или перемещения. Начало координат можно размещать в любой точке.

Статический способ основан на рассмотрении условий равновесия всего сооружения в целом или любой его отсеченной части.

Пример II.1. Построить линию влияния (л. в.) горизонтальной составляющей опорной реакции H_A (рис. II.2) при условии, что сила $\bar{P} = 1$ перемещается по участку AC, оставаясь горизонтальной.

Из уравнения равновесия рамы $\Sigma X = 0$ получаем $H_A = 1$, т. е. величина H_A не зависит от y и равна 1. Графически этот закон изображается прямой, параллельной оси y. По оси H_A откладываем ординату, равную *1*. Прямая действительна на участке AC (на участке действия $\bar{P} = 1$). В дальнейшем при построении линий влияния оси координат изображать не будем.

Линии влияния опорных реакций и внутренних усилий однопролетной балки используют в качестве самостоятельных решений при расчете таких балок и в виде промежуточных результатов при построении линий влияния в многопролетных балках, трехшарнирных системах, балочных и распорных фермах.

Пример II.2. Построить линии влияния опорных реакций R_A и R_B простой балки (рис. II.3, *а*).

Уравнение равновесия балки $\Sigma M_A = 0$ имеет вид $-R_B l + 1 \cdot x = 0$. Решая его относительно R_B, находим $R_B = x/l$, т. е. закон изменения R_B прямолинейный. Прямую (рис. II.3, *б*) можно построить по двум наиболее просто определяемым ор-

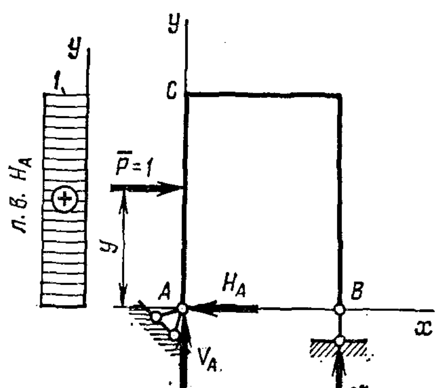

Рис. II.2

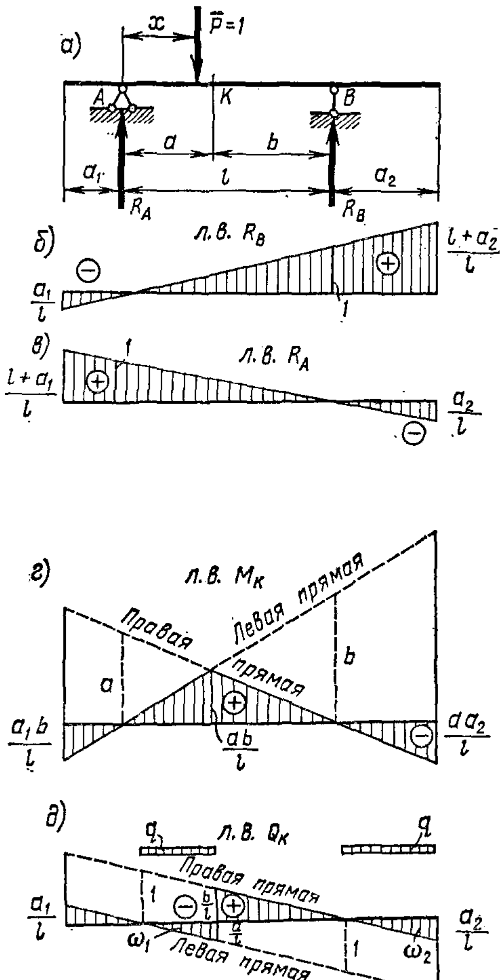

Рис. II.3

динатам: $R_B = 0$ при $x = 0$ ($\bar{P} = 1$ над опорой A), $R_B = 1$ при $x = l$ ($\bar{P} = 1$ над опорой B).

Полученная прямая является линией влияния R_B. Она ограничена крайними положениями подвижной единичной силы $-a_1 \leqslant x \leqslant l + a_2$.

Из условия $\Sigma M_B = 0$ $R_A = (l - x)/l$. График этой линейной функции строится аналогично предыдущему случаю. Построенный график (рис. II.3, *в*) назовем линией влияния R_A. Любая ордината этой линии на расстоянии x от точки A равна значению R_A при нахождении силы $\bar{P} = 1$ на балке на расстоянии x.

Нетрудно заметить, что ординаты линий влияния опорных реакций безразмерны и зависят от отношения абсциссы точки приложения силы $\bar{P} = 1$ к величине пролета.

Пример II.3. Построить линию влияния изгибающего момента в сечении K балки AB (рис. II.3, *а*).

Рассмотрим равновесие отсеченной части балки KB (рис. II.4) при положении силы $\bar{P} = 1$ левее точки K. Из уравнения $\Sigma M_K = 0$ следует $M_K = R_B b = xb/l$. При $x = 0$ $M_K = 0$, при $x = a$ $M_K = ab/l$. По этим ординатам строим участок линии влияния M_K, справедливый при левых положениях силы $\bar{P} = 1$, или левую прямую (см. рис. II.3, *г*). Уравнение правой прямой получаем, рассматривая равновесие части балки AK при положениях груза $\bar{P} = 1$ правее точки K: $M_K = R_A \ a = (l - x)\, a/l$. При $x = a$ $M_K = (l - a)\, a/l = ab/l$, т. е. под рассматриваемым сечением левые и правые прямые пересекаются. На рис. II.3, *г* участки, имеющие физический смысл, заштрихованы.

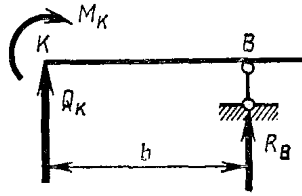

Рис. II.4

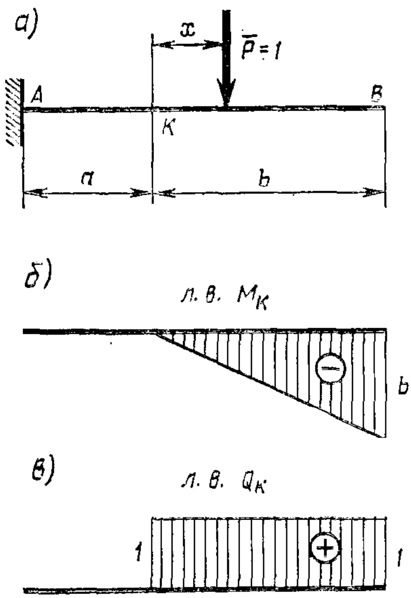

Рис. II.5

Для построения линии влияния поперечной силы Q_K поступаем аналогично. При левых относительно точки K положениях силы $\bar{P} = 1$ из уравнения равновесия $\Sigma Y = 0$ отсеченной части балки KB (см. рис. II.4) следует $Q_K = -R_B$, т. е. левая прямая линии влияния Q_K совпадает с линией влияния R_B, взятой с обратным знаком. При положениях $\bar{P} = 1$ правее точки K $Q_K = R_A$. Линия влияния изображена на рис. II.3, *д*. При известных значениях надопорных ординат, равных единице, прочие ординаты определяются весьма просто.

Пример II.4. Построить линии влияния M_K и Q_K в консольной балке (рис. II.5, *а*).

Начало координат выбираем в точке K. Рассматриваем положение силы $\bar{P} = 1$ правее точки K; из условий равновесия правой части балки KB $\Sigma M_K = 0$ и $\Sigma Y = 0$ следует $M_K = -x$, $Q_K = 1$. При $x = 0$ $M_K = 0$, при $x = b$ $M_K = -b$. По этим ординатам строим правую прямую линии влияния M_K. Правая прямая Q_K параллельна оси x и имеет постоянную ординату 1. Если рассматривать равновесие части консоли KB при левых положениях силы $\bar{P} = 1$, получим