山内恭彦・末岡清市編

大学演習 力学

大 学 演 習

力　　学

東大名誉教授 理学博士
山 内 恭 彦

理 学 博 士
末 岡 清 市

横浜国大教授 理学博士
佐 藤 正 千 代

東大教授 理学博士
田 辺 行 人

東 京 裳 華 房 発 行

大学演習　力　学　　定価 2400 円

昭和32年10月5日　第1版印刷
昭和32年10月10日　第1版発行

昭和56年2月1日　第31版発行

編　者　山内恭彦
　　　　末岡清市
発行者　吉野達治
発行所　東京都千代田区四番町8番地
　　　　電話東京 262―9166～9
　　　　株式会社　裳華房
印刷所　東京都墨田区亀沢 1―9―14
　　　　横山印刷株式会社
製本所　東京都中央区入船 1-1-20
　　　　株式会社　中條製本工場

社団法人
自然科学書協会会員

ISBN4-7853-8011-X

凡　　例

1　基礎事項　その章の問題を解くのに必要な基礎的な事項を，公式集をややていねいにした程度にまとめ，教科書の集約として，あるいはメモとして役立つようにしたものである．詳細はもちろん教科書に譲るが，本書で用いる量の定義，記号などを知る上からも，一応目を通しておくことをすすめる．

2　例題　その章に集めた問題の中で典型的なものに，詳しい説明を付けて解を示したものである．これにより，基礎事項をより具体的に理解することができ，同時に類似の問題を解く手法を会得できるように努めたつもりである．

3　問題　[A] はやさしい問題，[C] はむずかしい問題，[B] はその中間の問題である．もっともこの難易には数学的取扱いの難易も加味して分類してある．[B] までは自力で解けることが望ましい．[C] は場合により略解を参照してもよいが，その上で，自分で十分説明できるようにしてほしい．

4　問題解答　問題の解法の要点を示したものである．頁数の関係で完全な解答という意味ではなく，例えば結果の吟味も十分でないから，読者自ら例題に示した程度の解答を作ることをおすすめする．

5　* を付けた問題は幾分本書の程度を超えるもので，飛ばしてもさしつかえない．

6　付録　数学的な事項で，力学問題の解によく使われるものを，メモ程度に集めたものである．もちろん完全は期し難いが，一々ほかの書物を参照する不便を幾分減らせると思う．なお楕円函数の部分は簡単過ぎるが，力学に使うにはこの程度の知識と，あとは函数表があれば足りると思う．大体三角函数に準じて考えておけばよかろう．

はしがき

近代物理学が，GALILEI，NEWTON の力学理論から発展したことから考えても，物理学を学ぶのに力学が最も基本的な学科であることがわかる．力学の法則は，せんじつめれば Newton の三法則に尽きるが，実際問題を解くに当って，これをどう使うかということを会得するには，相当の練習を要する．これは言葉で説明することは困難で，やはり問題を多く解いてみて，実地に習得するよりほかはない．自動車の機構を知っていても，実際にハンドルを取ってみなければ，運転はできないのと似ている．もちろん力学の教科書にも多くの例題が載せてあり，また演習問題も入れてあるから，教科書でこの修練ができないわけではないが，問題を解くことを主とした書物があって，実地訓練に全力をそそぐことにすれば，一層有効と思われる．

本書は大学程度の力学課程における演習問題として適当と思われるものをかなり多数集め，それに略解をつけたものである．編者は多年東大理学部及び工学部で力学の講義，演習を担当したものであるから，力学演習にはかなりの経験者である．その経験をもとにして，問題を易から難へ学生諸君の学力進展の度に応じて選んであるから，読者がその中から適当に選択して，解けるものから順次無理をせず片付けて行かれたならば，最後には全巻の問題がすらすらと解答できるようになり，力学を自由に使いこなす実力を養い得るものと信ずる．

力学の問題を解くことのむずかしさは，数学的困難ではなく，与えられた問題を数学的な形に書き表わすことである．必要な数の運動方程式（あるいはつりあいの条件）が立てば，問題は半分以上解決しているといってもよい．この困難は物理学，工学のどの学科にも共通なことであるから，比較的に簡単な力学でこの素養を身につけておくことは，他の自然科学一般を習う上に大いに有利であると思われる．いずれどれかで一度は苦労しなければならないのだから，中では一番楽である力学で苦労しておくのが得策であろう．

問題の数が多いので，全部を完全に解くひまがないときには，最初の方程式

を作ることだけですませてもよいから，なるべく多数手掛けるようにしてほしい．また最初から略解を見るのはもちろんよくないが，或る程度考えてわからないときには，これを見て自分の考え方がどの点で不足であったかを反省されることにしてほしい．‘習うより慣れよ’というのは少々 easy-going すぎるが，教科書に書いてあるいかめしい理論も，多数の問題に接して内容を理解してみると，ああそういうことであったかと，初めて自分の知識になったような感じを持たれるであろう．この書物がそういうお役に立てば，編者一同の悦びこれに過ぎるものはない．

本書の刊行については，裳華房の遠藤恭平氏に大変お世話になった．ここに厚く謝意を表する．

昭和32年9月

山内恭彦

目　次

I 質点の力学

第1章 運　動　学

第2章 運動の法則及び直線運動

第3章 質点の平面運動

第4章 拘　束　運　動

第5章 相　対　運　動

II　質点系及び剛体の力学

第6章　質点系力学の基礎

第7章　質点系及び剛体のつりあい

第8章　剛体の運動学及び剛体に働く力

第9章　固定軸のある剛体の運動

第10章　剛体の平面運動

第11章　固定点をもつ剛体の運動

III　解析力学及び相対論的力学の初歩

第12章　解析力学の初歩

第13章　相対論的力学の初歩

付 録　数 学 的 予 備

I 質 点 の 力 学

第1章 運 動 学

基 礎 事 項

§1. 質点の直線運動

1. 運 動 直線 Ox 上の質点の位置 x を時間 t の函数として与えたものを質点の**運動**という:

$$x=f(t). \tag{1.1}$$

'運動を求めよ' というのは, この '函数 $f(t)$ を求める' ことである.

運動の例 (i) 等速度運動 $x=a+bt,$ (1.2)

(ii) 等加速度運動 $x=a+bt+ct^2,$ (1.3)

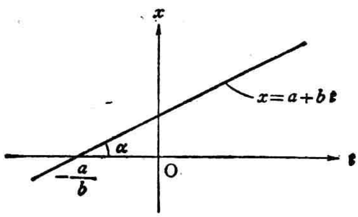
(iii) 正弦振動 (単振動) $x=a\sin(nt+\alpha),$ (1.4)

(iv) 過減衰 (exponential damping) $x=ae^{-\mu t},$ (1.5)

(v) 減衰振動 $x=ae^{-\mu t}\sin(nt+\alpha).$ (1.6)

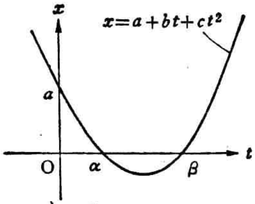
ここに $a,\ b,\ c,\ n,\ \alpha,\ \mu$ は定数である.

これらを x 対 t のグラフで示せば 1-1 図〜1-5図のようになる.



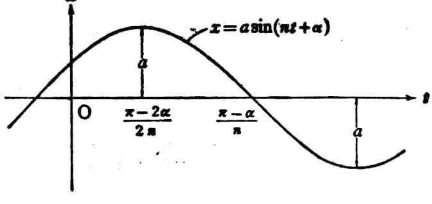
$\tan\alpha=b$

1-1 図

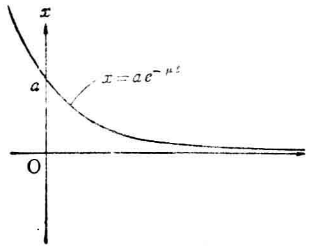


$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2c}\left(-b\pm\sqrt{b^2-4ac}\right)$

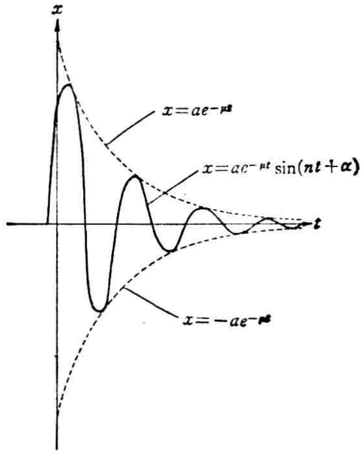
1-2 図



1-3 図



1-4 図

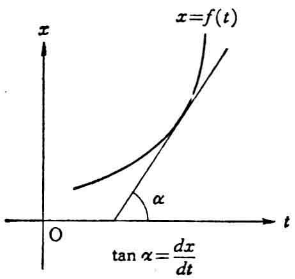


1-5 図

2. 速度　$x=f(t)$ で与えられる運動に対し，

$$v=\frac{dx}{dt}=f'(t) \tag{1.7}$$

を，時刻 t における質点の**速度**という．[微分については巻末の付録参照] x 対 t のグラフについていえば，v は t において曲線への接線が t 軸となす角 α の正接 $\tan\alpha$ を表わす：$v=\tan\alpha$. 1. の諸例につき速度を求めれば，



1-6 図

(i)　$v=b,$　(1.8)

(ii)　$v=b+2ct,$　(1.9)

(iii)　$v=an\cos(nt+\alpha),$　(1.10)

(iv)　$v=-a\mu e^{-\mu t},$　(1.11)

(v)　$v=ae^{-\mu t}\{n\cos(nt+\alpha)-\mu\sin(nt+\alpha)\}.$　(1.12)

速度を知って運動を求めるには次の積分による [付録 I. § 3 参照].

$$x=\int v\,dt+C. \quad (C \text{ は勝手な定数}) \tag{1.13}$$

$t=t_0$ で $x=x_0$ が与えられていれば (1.7) を $v=\varphi(t)$ として，

$$x=\int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)\,d\tau+x_0. \tag{1.14}$$

3. 加速度　速度が $v=\varphi(t)$ のとき，その時間的変化の割合

$$A=\frac{dv}{dt}=\varphi'(t) \tag{1.15}$$

を加速度という．(1.7) により，これはまた

$$A=\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t) \tag{1.16}$$

とかかれる．1. の諸例に対しては，

$$\text{(i)}\quad A=0, \tag{1.17}$$

$$\text{(ii)}\quad A=2b, \tag{1.18}$$

$$\text{(iii)}\quad A=-n^2a\sin(nt+\alpha)=-n^2x, \tag{1.19}$$

$$\text{(iv)}\quad A=a\mu^2e^{-\mu t}=\mu^2x, \tag{1.20}$$

$$\text{(v)}\quad A=ae^{-\mu t}\{(\mu^2-n^2)\sin(nt+\alpha)-2\mu n\cos(nt+\alpha)\} \tag{1.21}$$

となる．

$A=\psi(t)$ を知って速度及び運動を求めるには，

$$v=\int A\,dt+C_1,\qquad x=\int dt\int A\,dt+C_1t+C_2. \tag{1.22}$$

C_1, C_2 は任意定数である．$t=t_0$ で $x=x_0$, $v=v_0$ の初期条件が与えられていれば，

$$v=\int_{t_0}^{t}\psi(\tau)\,d\tau+v_0,\qquad x=\int_{t_0}^{t}d\tau\int_{\tau_0}^{\tau}\psi(\sigma)\,d\sigma+v_0t+x_0. \tag{1.23}$$

加速度 A が x, $v=\dfrac{dx}{dt}$, t の函数として $A=F\left(x,\dfrac{dx}{dt},t\right)$ のように与えられているとき，運動を求めるには，微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}=F\left(x,\frac{dx}{dt},t\right) \tag{1.24}$$

を積分しなければならない．

例．　$A=-n^2x$.

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-n^2x,\qquad \frac{d^2x}{dt^2}+n^2x=0. \tag{1.25}$$

この線形微分方程式を解けば［付録 II. § 4 参照］

$$x=C_1\cos nt+C_2\sin nt. \tag{1.26}$$

$t=0$ で $x=x_0$, $\dfrac{dx}{dt}=v_0$ とすれば，$x_0=C_1$, $v_0=nC_2$ であるから，

$$x=x_0\cos nt+\frac{v_0}{n}\sin nt. \tag{1.27}$$

§2. 平面及び空間における質点の運動

1. 運動 O を空間の定点とし，P を質点の位置とし，$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，すなわち P の**位置ベクトル**を時間 t の函数として与えることにより，運動が定まる：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t). \tag{1.28}$$

あるいは，O を原点とし，空間に固定した座標系 O-xyz に対する $\boldsymbol{r}$ の成分，すなわち P の座標 x, y, z を時間 t の函数として与える：

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t). \tag{1.29}$$

運動 (1.28) または (1.29) により，質点が平面または空間に描く曲線を**軌道**という．

例 1. 等速円運動 $x=a\cos(\omega t+\alpha)$，$y=a\sin(\omega t+\alpha)$，

すなわち $x^2+y^2=a^2$ (軌道は半径 a の円). (1.30)

2. 楕円振動 $x=a\sin(\omega t+\alpha)$，$y=b\sin(\omega t+\beta)$ (軌道は楕円). (1.31)

3. らせん運動 $x=a\cos(\omega t+\alpha)$，$y=a\sin(\omega t+\alpha)$．

$z=ct$ (軌道はらせん). (1.32)

質点の位置を直交座標以外の座標で表わすことも便利である．(平面運動)

(i) **極座標** (1-7 図). $r=r(t)$，$\varphi=\varphi(t)$，軌道は $r=r(\varphi)$. (1.33)

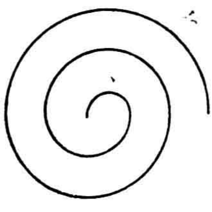
例 1. 等速円運動 $r=a$，$\varphi=\omega t+\alpha$. (1.34)

(軌道は $r=a$)

2. 渦巻き運動 $r=at+\alpha$，$\varphi=bt+\beta$. (1.35)

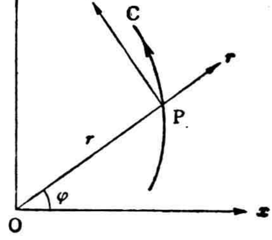
(軌道は $r=a(\varphi-\beta)/b+\alpha=A\varphi+B$，

$A=a/b$，$B=\alpha-a\beta/b$). (1-8 図)



1-8 図

P を通って OP 及びこれに垂直に φ の増す向きにとった直交座標系 P-$r\varphi$ (運動座標系) に関するベクトル成分を **r,φ 方向成分**といい，添字 r,φ によって表わす．



1-7 図

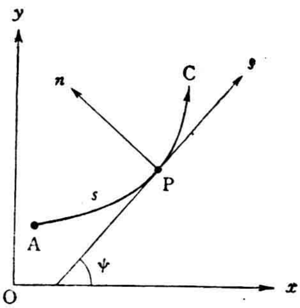
(ii) **自然座標** (1-9 図). $s=s(t)$，$\psi=\psi(t)$ (s は軌道の曲線 C 上の定点 A からの弧に沿うて計った長さ，ψ は C の接線が x-軸となす角). 軌道を求め

るには，$\psi=\psi(s)$ として，

$$x=\int\cos\psi\,ds,\quad y=\int\sin\psi\,ds \qquad (1.36)$$

なる積分を必要とする．

P を通って接線の方向に s の増す向き，ならびにこれに垂直な法線の向きにとった直交座標系 P－sn（運動座標系）に関するベクトルの成分を**接線及び法線方向の成分**といい，添字 s, n によって表わす．



1－9 図

例． 等速円運動　$s=at+\alpha$,　$\psi=bt+\beta$,　従って　$\psi=As+B$.

$$x=\int\cos(As+B)\,ds=\frac{1}{A}\sin(As+B),\qquad \left(A=\frac{b}{a},\right.$$

$$y=\int\sin(As+B)\,ds=-\frac{1}{A}\cos(As+B).\qquad \left.B=\beta-\frac{b}{a}\alpha\right)$$

軌道は $x^2+y^2=1/A^2$ なる円である．

2. 速　度

運動 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ に対し

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \qquad (1.37)$$

を，質点の**速度**という（ベクトルである）．その x, y, z 成分は

$$v_x=\frac{dx}{dt},\quad v_y=\frac{dy}{dt},\quad v_z=\frac{dz}{dt} \qquad (1.38)$$

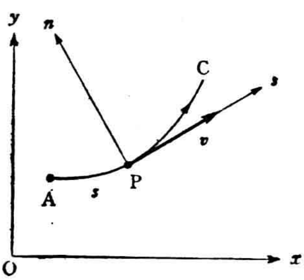
である．以下平面運動につき，ほかの速度の分解のしかたを記す．

速度の接線及び法線成分（1－10 図）

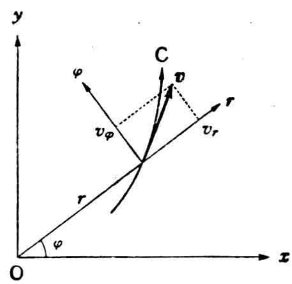
$$v_s=\frac{ds}{dt}\ (=\pm v),\qquad v_n=0. \qquad (1.39)$$

速度の動径及びこれに垂直な成分（1－11 図）

$$v_r=\frac{dr}{dt},\qquad v_\varphi=r\frac{d\varphi}{dt}. \qquad (1.40)$$



1－10 図



1－11 図

以下時間に対する微分係数 $\dfrac{dx}{dt}$ を $\dot{x}$ と記す.

例. 等速円運動 $v_x = \dot{x} = -\omega a \sin(\omega t + \alpha) = -\omega y$, $v_y = \dot{y} = \omega a \cos(\omega t + \alpha) = \omega x$.

速度の大きさは $v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2} = \omega a$, 向きは $\tan\psi = v_y/v_x = -x/y$ (ψ は軌道の接線が x 軸となす角) で, $r = \overrightarrow{OP}$ (成分 x, y) に垂直である. 極座標を用いれば, $v_r = \dot{r} = 0$, $v_\varphi = r\dot{\varphi} = a\omega$ で, 簡単である. $\omega = \dot{\varphi}$ を**角速度**という.

速度を知って運動を求めるには (1.39), (1.40) を積分すればよい.

例. 半径 a の円周上で, 一定の速度 v の運動. $r = a$, $v = v_\varphi = r\dot{\varphi} = a\dot{\varphi}$. よって

$$\dot{\varphi} = v/a = \text{一定} = \omega. \qquad \varphi = \omega t + \alpha.$$

3. 加速度　速度が $v = v(t)$ なる運動に対し,

$$A = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2} \tag{1.41}$$

を**加速度**という. その x, y, z 成分 A_x, A_y, A_z は

$$(\dot{v}_x,\ \dot{v}_y,\ \dot{v}_z) \qquad \text{または} \qquad (\ddot{x},\ \ddot{y},\ \ddot{z})$$

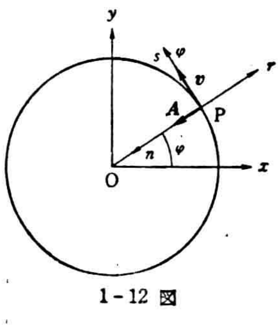
である.

平面運動に対する接線, 法線成分は $A_s = \dot{v} = \ddot{s} = v\dfrac{dv}{ds}$, $A_n = v^2/\rho$ である. ただし ρ は曲率半径, $\rho = \dfrac{ds}{d\psi}$ (ψ は接線が x 軸となす角).

平面運動に対する動径及びこれに垂直な方向の成分 $A_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$, $A_\varphi = \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})$.

例. 等速円運動　$A_r = -a\omega^2$, $A_\varphi = 0$, 　あるいは $A_s = 0$, $A_n = v^2/a$.

この場合には r の方向と n の方向とは逆向きであるから $A_n = -A_r$.



1-12 図

加速度は中心に向い, 大きさは $a\omega^2 = v^2/a$ である.

これを x, y 方向に分解すれば

$A_x = -A_r \cos\varphi = -a\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x$,

$A_y = -A_r \sin\varphi = -a\omega^2 \sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 y$.

従って, 加速度は P から中心 O の方へ向き, その大きさは $\omega^2 a$ である.

例　題

［1］ 地上の物体は下方に一定の加速度 g で落下する．その運動を求めよ．

［解］ 鉛直上方に x 軸をとれば，$A=-g$．よって

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-g,\quad \frac{dx}{dt}=-gt+C_1,\quad x=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2. \tag{1.42}$$

$t=0$ で $x=x_0$, $v=v_0$ とすれば

$$x=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+x_0. \tag{1.43}$$

［2］ (1.26) は単振動 (1.4) であることを示せ．

［解］ $x=a\sin(nt+\alpha)=a\sin\alpha\cos nt+a\cos\alpha\sin nt.$

よって　$C_1=a\sin\alpha,\quad C_2=a\cos\alpha,\quad a=\sqrt{C_1^2+C_2^2},\quad \tan\alpha=C_1/C_2.$

ただし，角 α の属する象限は $a>0$ として，C_1, C_2 の符号により定まる．

［3］ 楕円振動 $x=a\sin(\omega t+\alpha)$, $y=b\sin(\omega t+\beta)$ の軌道を求めよ．

［解］ $x=a\sin\omega t\cos\alpha+a\cos\omega t\sin\alpha,\quad y=b\sin\omega t\cos\beta+b\cos\omega t\sin\beta.$

この2つから $\sin\omega t$, $\cos\omega t$ を求める．

$$\sin\omega t=\left(\frac{x}{a}\sin\beta-\frac{y}{b}\sin\alpha\right)\Big/\sin(\beta-\alpha),$$

$$\cos\omega t=\left(\frac{x}{a}\cos\beta-\frac{y}{b}\cos\alpha\right)\Big/\sin(\alpha-\beta).$$

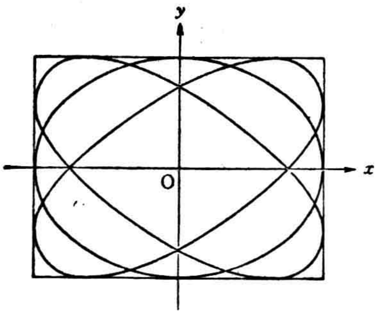
2乗して加えると

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos(\alpha-\beta)=\sin^2(\alpha-\beta).$$

よって $\alpha-\beta=2n\pi$ $(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots)$ のときは $x/a=y/b$; $\alpha-\beta=(2n+1)\pi$ のときには $x/a=-y/b$ なる直線となり，その他の $\alpha-\beta$ の値に対しては楕円になる．特に $\alpha-\beta=\pi/2+n\pi$ のときには

$$x^2/a^2+y^2/b^2=1$$

なる座標軸を主軸とする楕円になる．



1-13 図

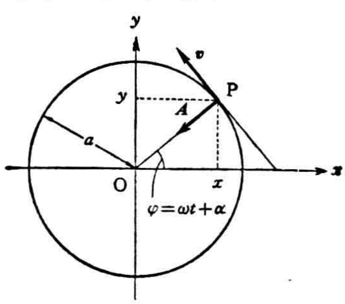
［4］ 等速度円運動の速度が接線方向に $v=a\omega$, 加速度が法線方向に $A=a\omega^2$ であることから，この運動を x, y 軸上に射影した運動の速度，加速度を求めよ．

［解］ $x=a\cos\varphi=a\cos(\omega t+\alpha),$

$y=a\sin\varphi=a\sin(\omega t+\alpha),$

$$v_x=v\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=-a\omega\sin(\omega t+\alpha),$$

$$v_y=v\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=a\omega\cos(\omega t+\alpha),$$



1-14 図

$$A_x = A\cos(\varphi+\pi) = -a\omega^2\cos(\omega t+\alpha),$$
$$A_y = A\sin(\varphi+\pi) = -a\omega^2\sin(\omega t+\alpha).$$

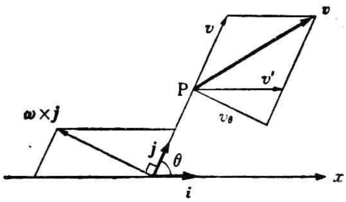
$v_x=\dot{x}$, $A_x=\ddot{x}$, $v_y=\dot{y}$, $A_y=\ddot{y}$ の関係により，これから $\cos(\omega t+\alpha)$, $\sin(\omega t+\alpha)$ の微分係数を知ることができる.

〔5〕 平面上を運動する質点 P の速度が，固定点 O からの位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 方向の成分 v と固定直線 Ox に平行な成分 v' とから成っている. この両方向の間の角を θ とすれば，加速度のこれらの方向の成分はそれぞれ

$$\frac{dv}{dt}-\frac{vv'}{r}\cos\theta \quad 及び \quad \frac{dv'}{dt}+\frac{vv'}{r}$$

であることを示せ.

〔解〕 Ox 及び OP 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$ 及び $\boldsymbol{j}$ とすれば $\boldsymbol{v}=v'\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}$, 従って加速度は（$\boldsymbol{i}$ は固定）



1-15 図

$$\boldsymbol{A}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{dv'}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dv}{dt}\boldsymbol{j}+v\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}.$$

いま，Ox 及び OP を含む面に垂直で $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ が右手系をなすように単位ベクトル $\boldsymbol{k}$ をとり，この方向に $\dot{\theta}$ の成分を持つ回転ベクトル $\boldsymbol{\omega}(0, 0, \dot{\theta})$ を考えると〔付録 V. § 7 参照〕

$$\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{j}=-\dot{\theta}\operatorname{cosec}\theta\cdot\boldsymbol{i}+\dot{\theta}\cot\theta\cdot\boldsymbol{j}=\frac{v'}{r}\boldsymbol{i}-\frac{v'}{r}\cos\theta\cdot\boldsymbol{j}. \qquad (1.44)$$

$$\left(|\dot{\theta}|=\frac{v_\theta}{r},\ かつ\ v'>0\ のとき\ \dot{\theta}<0.\quad よって,\ \dot{\theta}=-\frac{v'}{r}\sin\theta\right)$$

$$\therefore\ \boldsymbol{A}=\left(\frac{dv'}{dt}+\frac{vv'}{r}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{dv}{dt}-\frac{vv'}{r}\cos\theta\right)\boldsymbol{j}.$$

〔6〕 空間を運動する質点の速度及び加速度の自然座標及び球座標による成分を求めよ.

〔解〕（1） **自然座標の場合.** 軌道の方程式を $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ とかくと質点の位置ベクトルが t の函数としてきまることを表わしており，成分では x, y, z がそれぞれ時間の函数として $\qquad x=f(t), \quad y=g(t), \quad z=h(t)$

のようにきまることになる. これから t を消去すると軌道としての空間曲線がえられる. § 2 の (ii) と同じく空間に固定した軌道上の点 A をとると，任意の質点の位置は A から軌道に沿っての距離 s の函数としてきまると考えてもよい. すなわち

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s), \qquad s=s(t).$$

これにより速度は

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}\frac{ds}{dt}.$$

[付録 V. § 4] によると $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ は接線方向の単位ベクトル $\boldsymbol{t}$, $\dfrac{ds}{dt}=v$ であるから