mathématiques
éléments de probabilités et statistiques

ministère de l'économie et des finances

du personnel & des services généraux / centre de formation professionnelle et de perfectionnement

Alain JEAN
Jean-Noël BLOT

mathématiques b

ELEMENTS DE PROBABILITES ET STATISTIQUES

AVRIL 1977

INTRODUCTION

Ce deuxième volet des mathématiques du niveau B couvre le programme de Probabilités et Statistiques. Comme pour le premier tome : Analyse, nous avons volontairement réduit les démonstrations théoriques. Nous nous sommes attachés à donner les explications les plus simples et un maximum d'exemples concrets. Les exercices ont été regroupés en fin de partie et leurs corrigés détaillés à la fin du livre.

Nous sommes conscients que ce livre peut encore être amélioré. Nous acceptons bien volontiers, les remarques, critiques et suggestions que nos lecteurs apporteront.

A. JEAN et J.N. BLOT

1

COMBINATOIRE

TABLE DES MATIERES

I

ENSEMBLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE

A - PARTIE D'UN ENSEMBLE.

a) *Définition.*

On appelle partie ou sous-ensemble de E tout ensemble A dont tous les éléments appartiennent à E.

On écrit $A \subset E$

$\subset$ représente le signe d'inclusion

et on lit A est un sous-ensemble de E

ou A est une partie de E

ou A est inclus dans l'ensemble E

Dans l'ensemble des parties de E, il en existe deux singulières :

- la partie pleine de E (qui est E lui-même)
- la partie vide de E notée $\emptyset$

b) *Exemples.*

Soit E un ensemble composé des éléments a, b, et c

$E = \{ a, b, c \}$

Les parties de E sont :

- les singletons $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$
- les parties à deux éléments : $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$

- la partie pleine : $\{a, b, c\}$
- la partie vide : $\emptyset$

L'ensemble de toutes les parties de E est noté ρ (E)

$$\rho(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

c) *Complémentaire d'une partie.*

Définition : Etant donné un ensemble E et une partie A de E, on appelle complémentaire de A dans E l'ensemble de tous les éléments de E n'appartenant pas à A.

Le complémentaire de A dans E se note

$C_E\ A = \overline{A}$

Exemples : Soit $E = \{a, b, c\}$

. A une partie de E par exemple $A = \{a, b\}$

$C_E\ A = \overline{A} = \{c\}$

. Si A est la partie pleine c'est-à-dire $A = \{a, b, c\}$

$C_E\ A = \overline{A} = \emptyset$

. Si A est la partie vide c'est-à-dire $A = \emptyset$

alors $C_E\ A = E = \{a, b, c\}$

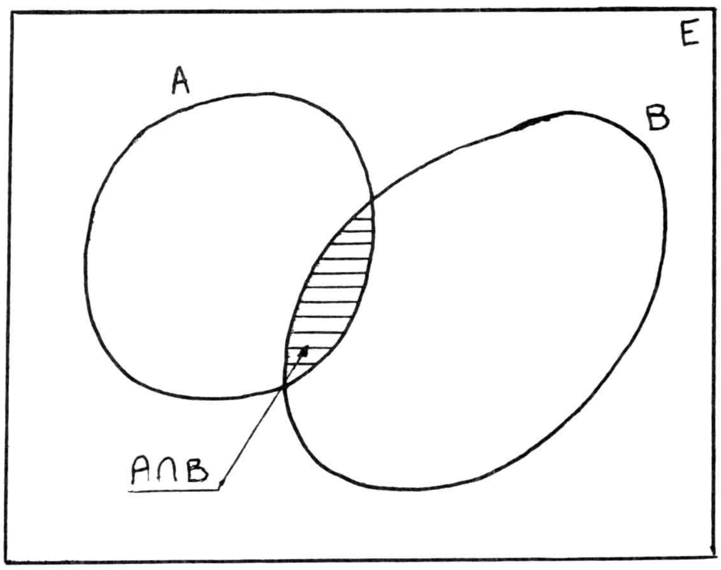
B - INTERSECTION ET REUNION DANS ρ(E)

a) *Intersection.*

Soit A et B deux parties de E. L'intersection de A et B est composée des éléments appartenant à A et à B et est noté $A \cap B$

exemples : $A = \{a, b, c\}$ $B = \{b, c, e, f\}$

alors $A \cap B = \{b, c\}$



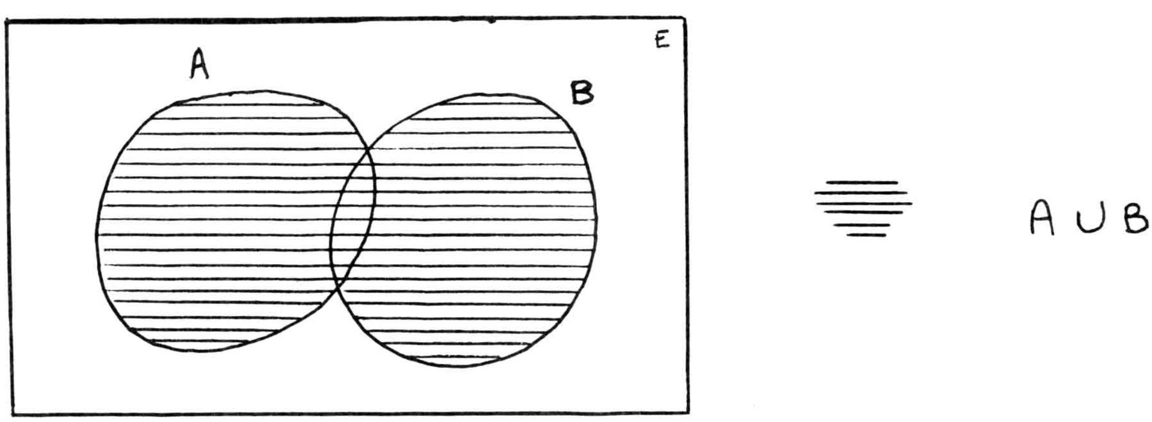
Il est clair que A et B étant deux parties d'un même ensemble, l'intersection $A \cap B$ est aussi une partie de E.

b) *Réunion.*

Soit A et B deux parties de E. La réunion de A et B est composée des éléments appartenant à A ou à B et est noté $A \cup B$

Exemples : $A = \{a,b\}$ $B = \{b, c, d\}$

$A \cup B = \{a, b, c, d\}$



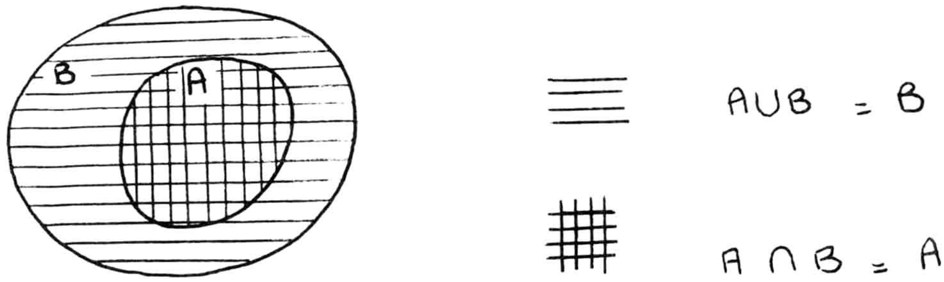
c) *Propriétés de l'intersection et de la réunion dans* ρ (E)

. $A \cap \emptyset = \emptyset$

. $A \cup \emptyset = A$

. Si $A \subset B$ alors $A \cap B = A$

et $A \cup B = B$



. Distributivité

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Remarque : Si $A \cap B = \emptyset$ A et B sont deux parties disjointes.

Exemple : $E = \{a, b, c, d\}$ $A = \{a, c\}$ $B = \{b, d\}$

$A \cap B = \emptyset$ A et B sont disjoints.

EXERCICES

I - 1. Soit E = {4, 3, 5, 2}. Former $\rho(E)$.

Former tous les nombres distincts à trois chiffres distincts que l'on peut écrire à l'aide des chiffres du nombre 4352.

I - 2. Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

a) Quelle est l'intersection de l'ensemble des multiples de 3 et de l'ensemble des multiples de 2 ? Quel est le complémentaire dans $\mathbb{N}$ de cette intersection ?

b) Quel est le complémentaire dans $\mathbb{N}$ de l'ensemble des nombres "impairs <u>ou</u> non multiples de 5" ?

I - 3. Représenter sous forme de diagramme les ensembles suivants :

. $A \cap \overline{B}$

. $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$

. $[A \cup (A \cap B)] \cap B$

A et B sont des parties d'un ensemble E.

Remarque : $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels, c'est-à-dire $\{0,1,2,\ldots\}$

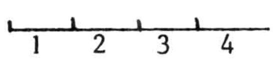
II

ANALYSE COMBINATOIRE

PERMUTATIONS - ARRANGEMENTS

A - EXEMPLES DE PERMUTATIONS.

On considère un ensemble F de 4 intervalles numérotés 1, 2, 3 et 4



Soit L un ensemble de quatre lettres, par exemple l'ensemble des lettres permettant d'écrire le mot "ciel".

L = {C, I, E, L }

On se propose de déterminer et de compter tous les mots (assemblages de lettres) que l'on peut former avec les lettres du mot "ciel", c'est-à-dire les façons possibles de placer les lettres C, I, E, L sur les intervalles de F [les lettres n'existent qu'à un seul exemplaire et ne peuvent servir qu'une fois].

Comme le montre la figure n° 1, il y a quatre façons possibles de remplir le premier intervalle [avec la lettre C, ou la lettre I, ou la lettre E, ou bien la lettre L].Une fois le premier choix fixé, il ne reste que 3 façons possibles de placer une lettre sur le deuxième intervalle [par exemple dans le cas où le C occupe l'intervalle n° 1, l'intervalle n° 2 peut être rempli par les lettres I, E ou L].

Puis les deux premiers intervalles étant comblés, il ne reste que deux choix possibles pour l'intervalle n° 3 [dans le cas où la lettre C occupe l'intervalle n° 1, la lettre I l'intervalle n° 2, l'intervalle n° 3 sera comblé par la lettre E ou la lettre L]. Enfin, les 3 premiers intervalles étant remplis, il ne reste que la dernière lettre à placer sur l'intervalle n° 4.

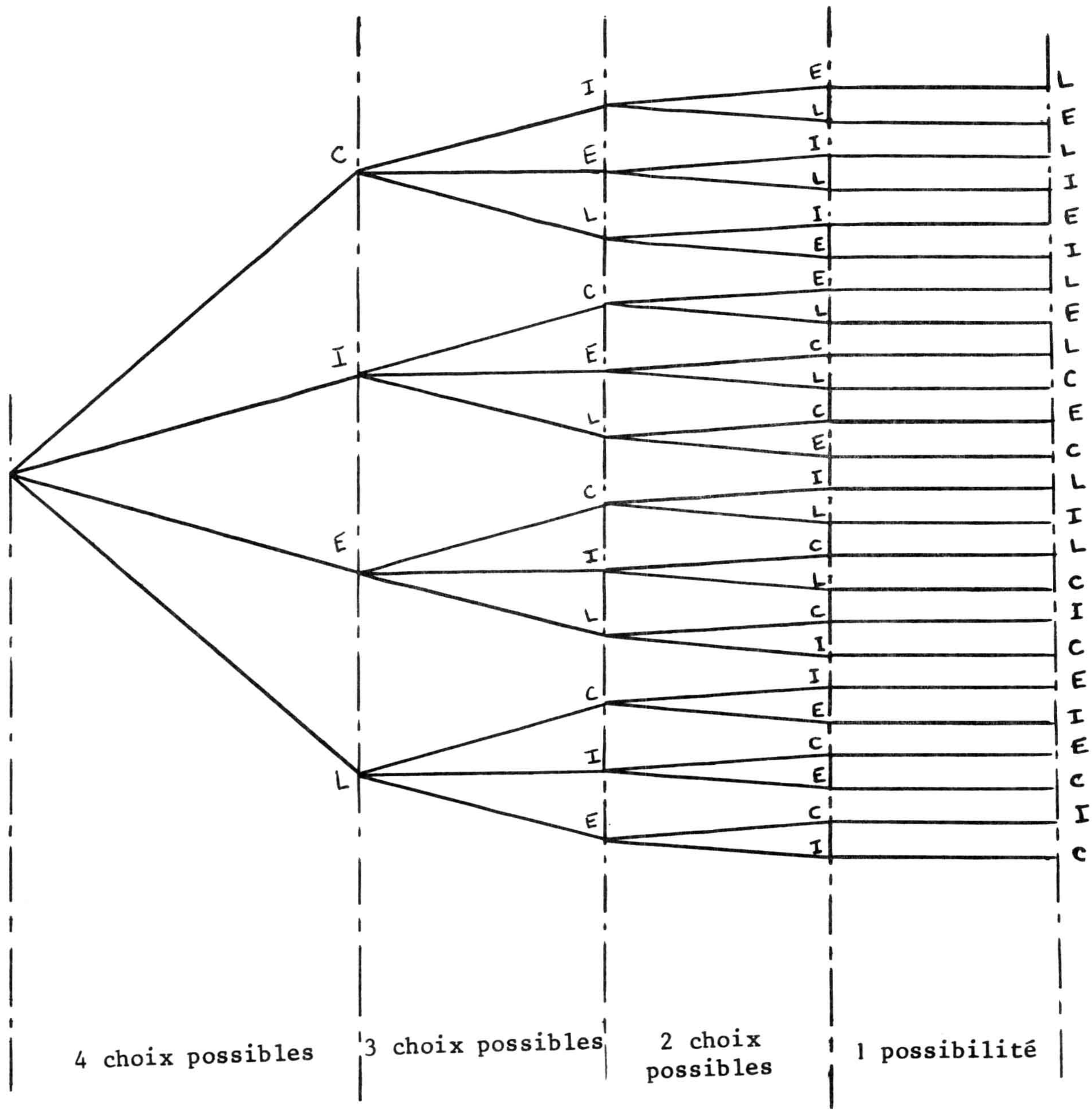


fig. 1

Cet arbre comporte 24 chemins différents. A chaque chemin correspond une disposition des quatre lettres sur les quatre intervalles. Il y aura donc 24 mots différents formés avec les lettres C, I, E, L.

Examinons la construction de cet arbre. Du départ partent 4 branches puis de chaque sommet 3 branches puis des 12 sommets 2 branches et enfin des 24 derniers sommets 1 branche. Au total donc $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

B - PERMUTATION.

On aura réalise une permutation dans un ensemble dès que l'on aura rangé les éléments de cet ensemble dans un ordre particulier (exemple précédent : C I E L, C E L I, ... représentent des permutations de l'ensemble {C, I, E, L}).

C - NOMBRE DE PERMUTATIONS.

On peut raisonner de manière analogue sur un ensemble de n éléments comme on l'a fait sur l'ensemble L des quatre lettres. Dans ce cas, il y aura n choix possibles pour le premier intervalle, puis (n - 1) pour l'intervalle n° 2, puis (n - 2) etc...

Finalement le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est :

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \ldots\ldots\ldots 2 \times 1$$

Ce nombre est appelé factorielle n et s'écrit n !

Exemples :

. Il y a 3 ! = 6 permutations pour 3 objets x, y z soit xyz, xzy, yxz, yzx, zxy, zyx.

. Il y a 5 ! = 5 × 4 × 3 × 2×1 = 120 permutations pour 5 personnes assises sur cinq chaises autour d'une table.

. Nous admettons par convention 0 ! = 1

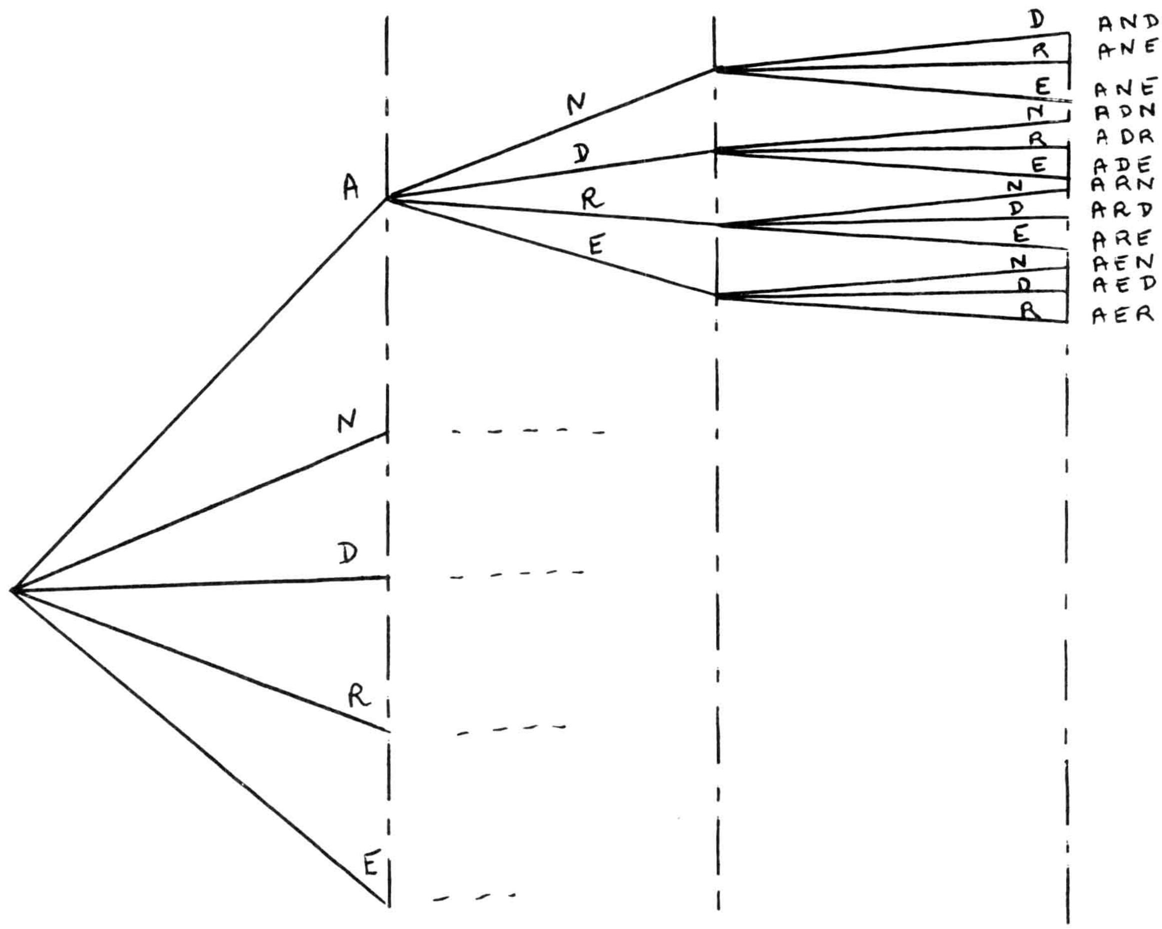
D - EXEMPLES D'ARRANGEMENTS.

Combien de mots (assemblages de lettres placées les unes à côté des autres sans qu'elles aient nécessairement une signification) peut-on former avec 3 lettres du mot ANDRE ? (Chaque lettre existe en un seul exemplaire et ne peut être répétée plus d'une fois).

Il existe 5 choix possibles pour la première lettre du mot, puis 4 pour la seconde lettre, puis 3 pour la dernière lettre. Finalement nous aurons :

$$5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ mots}$$

Nous pouvons ici encore, représenter l'ensemble des mots de trois lettres par la construction d'un arbre (fig. 2) dont une partie figure ci-après.



E - ARRANGEMENTS

Un arrangement d'ordre p d'un ensemble à n éléments est réalisé dès que l'on a rangé, dans un ordre particulier, p éléments de cet ensemble (dans l'exemple précédent AND, AER, ... représentent des arrangements d'ordre 3 de l'ensemble $\{A, N, D, R, E\}$).

F - NOMBRE DES ARRANGEMENTS.

Soit un ensemble composé de n éléments. On se propose de déterminer le nombre de classements possibles de p objets de cet ensemble ($p \leqslant n$). En reprenant le raisonnement utilisé précédemment (§ C) nous trouvons

n manières possibles d'attribuer la place n° 1

(n - 1) " " " " n° 2

donc n (n - 1) manières possibles d'attribuer les deux premières places. En attribuant la place n° 3 à l'un des (n - 2) objets restants, nous trouvons que cela peut se faire de (n - 2) manières. Donc il existe n (n - 1) (n - 2) manières possibles d'attribuer les trois premières places (cf. fig. 2).

Le raisonnement se poursuit jusqu'à la place n° p. Il y a déjà (p - 1) objets de placés et par conséquent n - (p - 1) objets à placer à la place n° p.

Nous aboutissons à la formule :

Le nombre des arrangements de p objets choisi dans un ensemble de n objets distincts est égal au produit :

$n\ (n - 1)\ (n - 2)\ \ldots\ldots\ (n - p + 1)$

Ce nombre est noté A_n^p

Exemples :

. Combien y a-t-il de tiercés dans l'ordre possibles, lors d'une course où figurent 15 partants [on suppose qu'il n'y a pas d'ex-aequo].

- la première place peut être occupée de 15 façons différentes ;

- la seconde place peut être occupée de 14 façons différentes ;

- la troisième place enfin peut être occupée de 13 façons différentes.

Finalement le nombre de tiercés dans l'ordre est :

$A_{15}^3 = 15 \times 14 \times 13 = 2730$

. $A_{10}^7 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$

. $A_{10}^1 = 10$

Remarques.

a) Si p = n [c'est-à-dire : Combien y a-t-il de classements de n objets pris dans un ensemble de n objets]. Alors

$A_n^n = n\ (n - 1)\ (n - 2)\ldots\ldots\ (n - n + 1) = n\,!$

On retrouve bien évidemment le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments.

b) On peut remarquer

$$A_n^p = n\ (n - 1)(n - 2)\ldots(n - p + 1) = \frac{n\ (n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)(n-p)(n-p-1)\ldots 1}{(n - p)\ (n - p - 1)\ldots 1}$$

$$= \frac{n\,!}{(n - p)\,!}$$

Exemples : $A_6^4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = \dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \dfrac{6\,!}{2\,!}$